ランダウ=リフシッツ理論物理学教程

相対論的量子力学

1

ヴェ・ベレステツキー
イェ・リフシッツ 著
エリ・ピタエフスキー
井 上 健 男 訳

東京図書株式会社

В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц,
Л. П. Питаевский

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

Часть 1

Издательство «НАУКА»
Москва 1968

まえがき

この巻は，この教程の全般的計画にしたがって，その言葉の広い意味での相対論的量子力学にあてられる．すなわち，すべての輻射の理論を含めて，光速の有限性と結びついたあらゆる現象の理論である．

よく知られているように，現在のところ，理論物理学のこの分野は，その基礎にある物理的原理さえも，いまだに完成にはほど遠い状態である．これは強い相互作用，そして弱い相互作用の理論について特に言えることである．しかし量子電磁力学でさえも，この20年間に達成した輝かしい成功にもかかわらず，その論理構造についてはまだ満足すべきものではない．

この本のための材料の選択にあたって，われわれは合理的な信頼度で十分に確立されているような結果だけに限ることにした．このような取り扱いでは，量子電磁力学がこの本の大部分を占有してしまうのは当然である．われわれは現実的な観点からの叙述を行なうこと，すなわち，理論のなかで行なわれる物理的な仮定を強調し，理論の現状ではどうせ純形式的な性格しか持たないような基礎づけにはかかわりあわないように努力した．

理論の具体的な応用にあたって，われわれはそれに関係する膨大な数の効果をすべて捕えることは目的としなかった．そして，ただその基礎を与えることに限った．そして詳細な研究を含む原論文の引用を付け加えた．非常に膨大な計算をするときには，われわれはしばしば中間の式を省いて，つねに，有用で無意味でない方法論的要素だけを示すように努めた．

この教程の他の巻にくらべて，この本の記述は読者の非常に高い水準の予備知識を前提としている．理論物理学を学ぶ過程で，場の量子論にまで至った読者は，もはや材料についての余分な詳しい説明は必要としないということから出発した．

この本を2部に分けたことは，原理的な性質のものではなく，その資料の膨大さからきている．第2部では，電磁場での輻射補正，弱い相互作用の理論，および強い相互作用の

理論の若干の問題が含まれる.

この本はわれわれの師であるエリ・デ・ランダウの直接の参加なしに書かれた. しかしわれわれは, 彼がつねにわれわれに教え, また, この教程の他の巻で彼が行なった, 理論物理学に対する精神と態度を守るように努力した. われわれはしばしば, あれこれの問題に対してダウだったらどう扱っただろうかと自問し, 彼との長年のつきあいがわれわれに助言するように, 答えを出すことに努力した.

われわれは, ヴェ・エヌ・バイエルに対して§59および§94を作るのに彼が示した大きな助力を, またヴェ・イ・リトスに対して§98を書くときの大きな助力を感謝する. ベ・エ・マイエロヴィッチに対しては, 若干の計算の際の助力を感謝する. われわれはまたア・エス・カンパニエーツに, 1959～60学年度にモスクワ国立大学でエリ・デ・ランダウによって行なわれた量子電磁力学についての講義の, 彼のノートをわれわれに自由に使わせていただいたことに対して感謝する.

この本は集団労作の成果であり, この本の全内容はすべての著者などによって議論されてきた. しかし仕事の直接の配分はつぎのとおりである. 第1, 5章はイェ・エム・リフシッツにより, 第2, 3, 7章はヴェ・ベ・ベレステツキーおよびイェ・エム・リフシッツの共同で, 第4, 6, 9章はイェ・エム・リフシッツおよびエリ・ペ・ピタエフスキーにより, 第8, 10章は3人の著者の共同で書かれた.

1967年6月

ヴェ・ベ・ベレステツキー
イェ・エム・リフシッツ
エリ・ペ・ピタエフスキー

記 号 例

4次元記号

4次元のテンソル添字はギリシア文字 $\lambda, \mu, \nu, \cdots\cdots$ で表わされ，0，1，2，3 の値をとる．

$(+---)$ の記法の 4-計量が使われる．

計量テンソルは $g_{\mu\nu}(g_{00}=1,\ g_{11}=g_{22}=g_{33}=-1)$.

4-ベクトルの成分を書くと $a^\mu=(a^0,\ \boldsymbol{a})$.

簡単のために式を書くときに4-ベクトルの成分の添字はしばしば落とされる[1]. このとき，4-ベクトルのスカラー積は単に (ab) あるいは ab と書かれる．$ab \equiv a_\mu b^\mu = a_0 b_0 - \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}$.

4-動径ベクトルは $x^\mu=(t, \boldsymbol{r})$.

4-体積要素は d^4x.

4-座標による微分演算子は $\partial_\mu=\partial/\partial x^\mu$.

反対称4-テンソルは $e^{\lambda\mu\nu\rho}$，ここで $e^{0123}=-e_{0123}=+1$.

4次元の δ-関数は $\delta^{(4)}(a)=\delta(a_0)\delta(\boldsymbol{a})$.

3次元記号

3次元のテンソル添字はラテン文字 $i, k, l, \cdots\cdots$ で表わされ，x, y, z の値をとる．

3次元ベクトルはボールド体のイタリック文字で表わされる．

3次元体積要素は d^3x.

演 算 子

演算子はローマン体活字で表わされる．

---

1) このような記法は現在の文献でひろく用いられている．このアルファベットの使い方と物理学上の要求との調和は，書く人に特別の注意を要求することになる．

$\boldsymbol{\phi}$-演算子はボールド体文字 $\boldsymbol{\phi}$

2演算子の交換積および反交換積は $\{\mathrm{f},\mathrm{g}\}_{\pm} = \mathrm{fg} \pm \mathrm{gf}$.

転置演算子は $\tilde{\mathrm{f}}$.

エルミート共役演算子は f^{+}.

荷電共役の演算子は C[1].

空間反転の演算子は P[1].

時間反転の演算子は T[2].

行列要素

始状態 i から終状態 f への遷移に対する演算子Fの行列要素は F_{fi} あるいは $\langle f|\mathrm{F}|i\rangle$.

記号 $|i\rangle$ は，その波動関数が表わされる具体的な表示によらない状態の絶対的な記号として使われる．記号 $\langle f|$ も終りの（≪複素共役の≫）状態の記号である[3]．したがって $\langle s|r\rangle$ によって，量子数 s の状態を重ね合わせた，量子数 r の状態の系の展開係数を表わしている．すなわち $|r\rangle = \sum_s |s\rangle\langle s|r\rangle$.

球面テンソルの既約行列要素は $\langle f\|\mathrm{F}\|i\rangle$.

ディラック方程式

ディラック行列は γ^{μ}，ここで $(\gamma^0)^2 = 1$，$(\gamma^1)^2 = (\gamma^2)^2 = (\gamma^3)^2 = -1$．行列 $\boldsymbol{\alpha} = \gamma^0\boldsymbol{\gamma}$，$\beta = \gamma^0$．スピノールおよび標準表示の式は，(21.3)，(21.16)，(21.20)(87，90頁).

$\gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$，$(\gamma^5)^2 = 1$ (95頁 (22.18) 参照).

$\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} - \gamma^{\nu}\gamma^{\mu})$ (117頁 (28.2) 参照).

4-ベクトルとディラック行列の積は $\hat{a} = (a\gamma) \equiv a_{\mu}\gamma^{\mu}$.

ディラック共役は $\overline{\psi} = \psi^*\gamma^0$.

パウリ行列は $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$．定義は85頁.

4-スピノール添字は $\alpha, \beta, \ldots\ldots$ および $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \ldots\ldots$ で1，2および $\dot{1}$，$\dot{2}$ の値をとる.

双スピノール添字は $i, k, l, \ldots\ldots$ で 1，2，3，4 の値をとる.

---

1) Cは英語の charge すなわち電荷から，P は parity すなわち偶奇性からとった.
2) 演算子の経時積もまた文字Tにより表わされる.
3) ディラックの記号.

フーリエ展開

3次元展開は

$$f(\boldsymbol{r})=\int f(\boldsymbol{k})\,e^{i\boldsymbol{kr}}\frac{d^3k}{(2\pi)^3},\qquad f(\boldsymbol{k})=\int f(\boldsymbol{r})\,e^{-i\boldsymbol{kr}}d^3x\,.$$

4次元の場合も同様.

単　　位

特に断わらないときは，いつでも相対論単位が用いられる．そこでは $\hbar=1$，$c=1$ である．この単位では基本電荷の2乗は $e^2=1/137$

原子単位．$e=1$，$\hbar=1$，$m=1$．この単位では $c=137$．長さ，時間およびエネルギーの原子単位は $\hbar^2/me^2$，$\hbar^3/me^4$ および $me^4/\hbar^2$ ($R_y=me^4/2\hbar^2$ をリドベルグと呼ぶ).

普通の単位は，絶対（ガウス）単位系である.

定　　数

光速　$c=2.9979025\cdot10^{10}\,\mathrm{cm/sec}$.

基本電荷　$e=4.803\cdot10^{-10}\,\mathrm{cgs\ esu}$.

電子の質量　$m=9.109\cdot10^{-28}\mathrm{g}$.

プランク定数　$\hbar=1.054\cdot10^{-27}\ \mathrm{erg\cdot sec}$.

微細構造定数　$\alpha=e^2/\hbar c$；$1/\alpha=137.04$.

ボーア半径　$\hbar^2/me^2=5.292\cdot10^{-9}\,\mathrm{cm}$.

古典電子半径　$r_e=e^2/mc^2=2.818\cdot10^{-13}\,\mathrm{cm}$.

電子のコンプトン波長　$\hbar/mc=3.861\cdot10^{-11}\,\mathrm{cm}$.

電子の静止エネルギー　$mc^2=0.5110\cdot10^6\,\mathrm{eV}$.

エネルギーの原子単位　$me^4/\hbar^2=4.359\cdot10^{-11}\,\mathrm{erg}=27.21\,\mathrm{eV}$.

ボーア磁子　$e\hbar/2mc=9.273\cdot10^{-21}\,\mathrm{erg}\cdot\Gamma^{-1}$.

陽子の質量　$m_p=1.673\cdot10^{-24}\mathrm{g}$.

陽子のコンプトン波長　$\hbar/m_pc=2.102\cdot10^{-14}\,\mathrm{cm}$.

核磁子　$e\hbar/2m_pc=5.050\cdot10^{-24}\,\mathrm{erg}\cdot\Gamma^{-1}$.

引　　用

この教程の他の巻は，記号で行なわれる．すなわち I（≪力学≫ 1965)，II（≪場の古典論≫ 1967)，III（≪量子力学≫ 1963）である.

目　　次

第3章 フェルミオン

第4章 外場内の粒子

第5章　輻　　射

第6章　光の散乱

第7章　散乱行列

第8章 不変摂動論

第9章 電子の相互作用

第10章 電子と光子の相互作用

付　　録

第1巻への補遺

第2巻の目次

序　　章

§ 1. 相対論の領域での不確定性関係

この教程の III(≪量子力学≫) で述べられている量子論は，本来非相対論的のもので，光速度にくらべて非常に小さくはない速度を持つ運動の結果起こる現象には適用できない．ちょっと考えると，非相対論的量子力学の方法の多少とも直接の一般化によって，相対論的理論への移行が可能であることを期待してよさそうである．しかし，注意深く考えると，論理的に首尾一貫した相対論的理論を組み立てるには，新しい物理的原理の導入が要求されることが明らかになる．

非相対論的量子力学の基礎にある物理的な考え方を思い起こそう (III § 1)．そこでは測定の概念が非常に重要な役割を演じることを見てきた．その測定とは量子系と≪古典的対象≫(≪測定器≫)との相互作用を意味し，その結果量子系におけるある力学変数（座標，速度その他）が一定値を得る．われわれはまた，電子[1] の異なる力学変数が同時に値を持つ可能性が，量子力学によって強く制限されることも見てきた．すなわち，座標と運動量の値を同時に測定するときの不確定性 Δq と Δp は関係式 $\Delta q\Delta p\sim\hbar$ [2] で結ばれている．これらの量のなかの一方が精度よく測られると，同時に測られた他の量の精度はそれだけ悪くなる．

しかしながら，電子のどの力学変数も個々には，どんなに短い時間のあいだにも，どんな精度でも測定できることが重要である．この事情が非相対論的量子力学全般に対して基本的な役割を演じている．この理論の方法の基礎である波動関数の概念も，上の事情があってはじめて導入することができる．実際には波動関数 $\psi(q)$ の物理的意味はつぎのようにまとめることができる．その絶対値の 2 乗は，ある与えられた瞬間に行なわれた測定の

---

1) III, § 1 と同じように，任意の量子系を言外に含ませて簡単に電子と呼ぶことにする．
2) この節では普通の単位系が使われている．

結果，電子の座標が一定値を持つ確率を与えるものである．明らかに，このような確率の概念を導入するために必要な前提は，十分な精度と迅速さを持った座標の測定が原理的に実行可能なことである．そうでない場合にはこの概念は実体がなくなり，物理的意味は失われてしまう．

極限速度（光速 c ）の存在は，異なる物理量の測定可能性に対して，新たな原理的制限をもたらすことになる（Л. Д. Ландау，R. Peierls, 1930)．

Ⅲ，§44 では，電子の運動量の測定の不確定性 Δp とその測定操作の継続時間 Δt とを結ぶ関係式

$$(v'-v)\,\Delta p\,\Delta t\sim\hbar \tag{1.1}$$

が得られた． v と v' は測定の前後の電子の速度である．この関係式から，十分に短い時間での運動量の精密な（すなわち Δt が小さいときに Δp も小さい）測定は，その測定の結果の速度変化が十分大きいときにのみ可能ということになる．非相対論的理論でこの事情は短時間内での運動量の測定の非反復性として現われていて，差 $v'-v$ がいくらでも大きくできるので，運動量の一回限りのいくらでも正確な測定の原理的可能性と少しも抵触するものではない．

極限速度の存在は事態を根本的に変える．差 $v-v'$ もまた速度であり，いまや c（正確には $2c$ ）を超えることはできない．(1.1) 式で $v'-v$ を c に置き換えて，測定時間 Δt が与えられた際の，運動量の測定の原理上可能な最良の精度を決める式

$$\Delta p\,\Delta t\sim\frac{\hbar}{c} \tag{1.2}$$

が得られる．こうして相対論的理論では，任意の精度と迅速さを持つ運動量の測定は原理的に不可能であることが明らかになる．運動量の正確な測定（$\Delta p\to 0$）は，無限大の測定時間の極限でのみ可能である．

座標の測定可能性もまた，少なからず深刻な変化を受ける．相対論的理論では，座標は一定の極小の限界を超えない精度でのみ測定可能であることがわかる．これにより電子の局所化の概念はその物理的意味を一層制限されることになる．

理論の数学的定式化の上からは，この事情は座標の精密測定と自由粒子のエネルギーが正であるという命題とは両立しないという形をとって現われる．われわれはさらに，自由粒子の相対論的波動方程式の固有関数の全系のなかに，（≪正しい≫ 時間依存性を示す解と並んで）≪負の振動数≫ の解もまた含まれることを知るだろう．これらの関数は一般

に，空間の小さい部分に局所化された電子に対応する波束の展開中に含まれる．

≪負の振動数≫の波動関数は反粒子——陽電子——の存在と結びついていることが示される．波束の展開にこの関数が現われることは，電子の座標の測定の過程で，一般に不可避の電子－陽電子対生成を示している．その過程で必ず起こる新粒子の発生は，明らかに電子の座標の測定の意味を奪っている．

電子の静止した系では，その座標の測定の最小の誤差は

$$\Delta q \sim \frac{\hbar}{mc} \tag{1.3}$$

である．（ディメンジョンの考察から，ただ一つ許される）この値に運動量の不確定性 $\Delta p \sim mc$ が対応する．後者は，他方では対形成の**しきい**のエネルギーに対応している．

電子がエネルギー ε で動いている系では (1.3) の代りに

$$\Delta q \sim \frac{\hbar c}{\varepsilon} \tag{1.4}$$

を得る．特に超相対論的極限の場合には，エネルギーは運動量と，関係式 $\varepsilon \approx cp$ で結ばれ，そこでは

$$\Delta q \sim \frac{\hbar}{p} \tag{1.5}$$

となる．すなわち，誤差 Δq は粒子のド・ブロイ波長と一致する．

光子に対してはいつも超相対論的な場合があてはまる．したがって (1.5) が成立する．これは，問題を特徴づける大きさが波長にくらべて大きい場合に限って光子の座標を云々する意味があることを示している．しかしこれは，一定の軌跡——光線——に沿っての光の伝播を問題にする幾何光学に対応する，≪古典的≫極限の場合にほかならない．量子論の場合に波長はもはや小さいとみなすことはできず，光子の座標の概念は実体のないものである．さらにあとで (§ 4) 見るように，理論の数学的定式化において，光子の座標の測定不可能性は，相対論的不変性の要求を満たす確率密度の役割を演じうるような量を，光子の波動関数からは作りえないという形で現われる．

すでに述べたことから，首尾一貫した相対論的量子力学では粒子の座標は，一般に本来正確な意味を持つはずの力学的変数として記述しえないことが明らかである．粒子の運動量もまた以前の意味を保ってはいない．運動量の精密な測定は十分長い時間を要し，その過程でその変化の具合を追跡することは不可能である．

この節の始めに述べたことを思い出しながら，われわれは非相対論的量子力学のすべて

の方法は，相対論的領域への移行には不適当であるという結論に傾いていく．隠れた情報の保持者と理解される，以前の意味の波動関数 $\psi(q)$ は，首尾一貫した相対論的理論の道具のなかには現われることはできない．

首尾一貫した理論で，運動量は自由粒子に用いるときにのみ重要な役割を演じることができる．この場合には運動量は保存され，任意の精度で測定可能である．したがって，将来の理論は，粒子の相互作用の過程の時間的進行の考察を放棄すると考えることができる．これらの過程では（普通の量子力学的精度の極限でさえも）正確に定義しうる特徴はなく，したがって時間を追って過程を記述することは，非相対論的量子力学における古典的軌道のように，まったく幻想的なものであることがわかる．自由粒子——すなわち相互作用をする前の始めの粒子，およびその過程の結果生ずる最終の粒子——の特性（運動量，偏り）が唯一の観測しうる量である（Л. Д. Ландау，R. Peierls, 1930）．

相対論的量子力学に特徴的な問題の設定は，粒子系の初めおよび終りの（すなわち $t\to\mp\infty$ における）状態を結ぶ遷移確率振幅を決定することになる．可能なすべての状態間のこのような振幅の集まりが**散乱行列**あるいは **S-行列**を構成する．この行列が粒子の相互作用の過程のすべての，測定可能な物理的意味を持った情報の保持者である（W. Heisenberg, 1938）．

このような理論では粒子の《素粒子性》や《複合性》の概念——何は何から構成されるといった問題——はなくなってしまうこともまた指摘しておこう．この問題は粒子間の相互作用の過程の考察なしに定式化できないし，このような考察自体がこの問題の実体をなくしてしまう．なんらかの物理的な衝突現象の始め，あるいは終りに現れてくるすべての粒子は，理論のなかに平等に登場する必要がある．この意味で，《複合粒子》とか《素粒子》とかいわれる粒子間の相違は純粋に定量的な性質を持つだけであり，それぞれの《組成部分》への崩壊に対する質量欠損の相対的大きさの問題に帰してしまう．したがって，重陽子が（陽子と中性子の崩壊に対する比較的小さい結合エネルギーを持っていて）複合粒子であるという命題と，中性子が陽子と π-中間子とから《構成される》という命題とは，ただ量的に異なるだけである．

現在完全に首尾一貫した相対論的量子力学はいまだ存在しない．現存する理論は，場の理論のいくつかの特徴を取り入れた粒子状態の記述法に，新しい物理的な見方を取り入れていることがわかる（§10 参照）．しかしながら，その大部分は普通の量子力学の概念を雛型とし，またその助けによって成り立っている．理論のこのような構成は量子電磁力学の

領域では成功をもたらした．この理論に論理的首尾一貫性がないことは，その数学的方法を直接に適用すると発散する表式が現われることに見られ，しかもその発散を除くためにはまったく同等ないくつかの方法がある．それにもかかわらず，これらの方法は半経験的な性質をかなり含んでいる．そしてこのような方法で得られた結果の正当性に対するわれわれの確信は，最終的にはそれが実験とみごとに一致することに依存しているのであって，理論の基礎原理の内部無矛盾性や論理的調和には依存しているわけではない．

粒子の強い相互作用（核力）と呼ばれるものと関連した現象の理論の分野での事情は，まったく別の性質を持っている．そこでは，この同じ方法に基礎を置いた理論を作る試みは，多少とも現実性のある物理的な結果には導かない．強い相互作用を含むような完全な理論の建設は，多分原理的に新しい物理的観念の導入を必要とするだろう．

第1章 光　　子

§ 2. 自由電磁場の量子化

電磁場を量子力学の対象として考察するためには，無限だが離散的な変数の数列で識別される場の記述法から出発するのが好つごうである．このような記述法により量子力学の方法を直接に用いることができる．空間の各点で与えられたポテンシャルを使った場の記述は，本質的には変数の連続的な集合による記述である．

$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ を自由電磁場のベクトル・ポテンシャルとすると，これは≪横波の条件≫

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=0 \tag{2.1}$$

を満足する．これからスカラー・ポテンシャル $\Phi=0$ であり，電磁場 $\boldsymbol{E}$ および $\boldsymbol{H}$ は

$$\boldsymbol{E}=-\dot{\boldsymbol{A}},\quad \boldsymbol{H}=\operatorname{rot}\boldsymbol{A} \tag{2.2}$$

である．マクスウェル方程式は $\boldsymbol{A}$ に関する波動方程式

$$\Delta\boldsymbol{A}-\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=0 \tag{2.3}$$

になる．

よく知られているように (II，§52 参照)，古典電磁気学で変数の離散数列を使った記述法への移行は，無限ではない大きな体積 V[1] のなかの場の考察から得られる．詳細な計算は省いて，そうなることを思い起こそう．

有限の体積内の電場は進行波に分解することができる．したがってそのポテンシャルは

$$\boldsymbol{A}=\sum_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k}}e^{i\boldsymbol{kr}}+\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k}}^{*}e^{-i\boldsymbol{kr}}) \tag{2.4}$$

の形の級数で表わされる．ここで係数 $\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k}}$ の時間依存性は

$$\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k}}\sim e^{-i\omega t},\quad \omega=|\boldsymbol{k}| \tag{2.5}$$

1) 余分な因子により式が複雑になるのを避けるために $V=1$ と置こう．

である．条件(2.1)から，複素ベクトル $\boldsymbol{a}_k$ は波動ベクトルと直交する．すなわち $\boldsymbol{a}_k\boldsymbol{k}=0$ である．

(2.4) のなかの和は，波動ベクトル（その3成分は k_x, k_y, k_z）の無限個の離散値について行なわれる．連続的な分布についての積分への移行は，$\boldsymbol{k}$ の可能な値の数に対する式

$$\frac{d^3k}{(2\pi)^3}$$

を使えばよい．これは $\boldsymbol{k}$-空間の体積要素 $d^3k = dk_x\, dk_y\, dk_z$ に対応する．

ベクトル $\boldsymbol{a}_k$ を与えることにより，考えている体積中の場は完全に決められる．かくしてこれらの量は古典的な≪場の変数≫の離散的な組と考えてよい．しかしながら，量子理論への移行法を明らかにするためには，さらにある種の変数変換が必要とされ，その結果，場の方程式は古典力学の正準変換（ハミルトンの方程式）に似た形になる．場の正準変数は

$$\boldsymbol{Q}_k = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}(\boldsymbol{a}_k + \boldsymbol{a}_k^*),$$
$$\boldsymbol{P}_k = \frac{-i\omega}{\sqrt{4\pi}}(\boldsymbol{a}_k - \boldsymbol{a}_k^*) = \dot{\boldsymbol{Q}}_k \tag{2.6}$$

で定義される（明らかに実数である）．ベクトル・ポテンシャルは正準変数によりつぎのように表わされる．

$$\boldsymbol{A} = \sqrt{4\pi}\sum_{k}\left(\boldsymbol{Q}_k \cos \boldsymbol{kr} - \frac{1}{\omega}\boldsymbol{P}_k \sin \boldsymbol{kr}\right). \tag{2.7}$$

ハミルトニアン H を得るためには，$\boldsymbol{Q}_k$，$\boldsymbol{P}_k$ という量で表わした場の全エネルギー

$$\frac{1}{8\pi}\int(\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{H}^2)\,d^3x$$

を計算する必要がある．$\boldsymbol{A}$ を (2.7) の展開式の形にし，$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{H}$ を (2.2) にしたがって計算し，積分を行なって次式を得る．

$$H = \frac{1}{2}\sum_{k}(\boldsymbol{P}_k^2 + \omega^2 \boldsymbol{Q}_k^2).$$

ベクトル $\boldsymbol{P}_k$ と $\boldsymbol{Q}_k$ のいずれもが波動ベクトル $\boldsymbol{k}$ に垂直，すなわち二つの独立な成分がある．これらのベクトルの方向は対応する波の偏りの方向を決定する．ベクトル $\boldsymbol{Q}_k$, $\boldsymbol{P}_k$ の（$\boldsymbol{k}$ に垂直な面内での）二つの成分を $Q_{k\alpha}$，$P_{k\alpha}$ ($\alpha = 1, 2$) と書いて，ハミルトニアンを

$$H=\sum_{k\alpha}\frac{1}{2}(P^2_{k\alpha}+\omega^2 Q^2_{k\alpha}) \tag{2.8}$$

の形に書き直そう．

こうしてハミルトン関数は，おのおのが一対の量 $Q_{k\alpha}$，$P_{k\alpha}$ だけを含む独立な項に展開された．この各項は定まった波動ベクトルと偏りを持った進行波に対応し，このとき1次元調和振動子のハミルトン関数の形になっている．したがって得られた展開を場の**振動子**による展開という．

さて，自由電磁場の量子化に移ろう．上述の場の古典的記述法は量子理論への移行法を明らかにする．ここでわれわれは正準変数——一般化された座標 $Q_{k\alpha}$ および一般化された運動量 $P_{k\alpha}$——を交換関係

$$\mathrm{P}_{k\alpha}\mathrm{Q}_{k\alpha}-\mathrm{Q}_{k\alpha}\mathrm{P}_{k\alpha}=-i \tag{2.9}$$

（異なる $k\alpha$ を持つ演算子はすべて互いに交換する）を持つ演算子と考えなければならない．これらとともにポテンシャル $\boldsymbol{A}$ および ((2.2)にしたがって) 張力 $\boldsymbol{E}$ および $\boldsymbol{H}$ もまた演算子になる．

場のハミルトニアンの最終的な決定は，積分

$$\mathrm{H}=\frac{1}{8\pi}\int(\mathbf{E}^2+\mathbf{H}^2)\,d^3x \tag{2.10}$$

の計算を必要とする．ここで $\mathbf{E}$ と $\mathbf{H}$ とは演算子 $\mathrm{P}_{k\alpha},\mathrm{Q}_{k\alpha}$ で表わされる．しかし実際には，これらの非可換性はこのときには現われない，それは積 $\mathrm{Q}_{k\alpha}\mathrm{P}_{k\alpha}$ は因子 $\cos \boldsymbol{kr}\ \sin \boldsymbol{kr}$ と一緒に現われ，全体積にわたって積分すると0になってしまうからである．したがって結果としてハミルトニアンとして次式を得る．

$$\mathrm{H}=\sum_{k\alpha}\frac{1}{2}(\mathrm{P}^2_{k\alpha}+\omega^2\mathrm{Q}^2_{k\alpha}). \tag{2.11}$$

これは当然予想されたことながら，古典的ハミルトン関数と正確に対応している．

このハミルトニアンの固有値の決定は，よく知られた線型振動子のエネルギー準位の問題 (III, §23 参照) に帰するので，特別な計算を必要としない．したがって，われわれはただちに場のエネルギー準位に対して

$$E=\sum_{k\alpha}\left(N_{k\alpha}+\frac{1}{2}\right)\omega \tag{2.12}$$

と書くことができる．ここで $N_{k\alpha}$ は整数である．

次節でこの公式の考察にたちもどることにして，ここでは振動子の座標の行列要素の知

られた公式（III, §23 参照）を使って，直接に求められる $Q_{k\alpha}$ の行列要素を計算しよう．0 と異なる行列要素は

$$\langle N_{k\alpha}|Q_{k\alpha}|N_{k\alpha}-1\rangle = \langle N_{k\alpha}-1|Q_{k\alpha}|N_{k\alpha}\rangle = \sqrt{\frac{N_{k\alpha}}{2\omega}} \tag{2.13}$$

に等しい．$P_{k\alpha}=\dot{Q}_{k\alpha}$ の行列要素は $Q_{k\alpha}$ の行列要素と因子 $\pm i\omega$ だけ異なっている．

しかしさらに計算する上で，量 $Q_{k\alpha}, P_{k\alpha}$ の代りにその1次結合 $\omega Q_{k\alpha}\pm iP_{k\alpha}$ を用いる方がよい．これは $N_{k\alpha}\longrightarrow N_{k\alpha}\pm 1$ の遷移に対してのみ行列要素を持っている．これに対応して演算子

$$c_{k\alpha}=\frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\omega Q_{k\alpha}+iP_{k\alpha}), \qquad c^{+}_{k\alpha}=\frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\omega Q_{k\alpha}-iP_{k\alpha}) \tag{2.14}$$

を導入しよう（古典的な量 $c_{k\alpha}, c^{*}_{k\alpha}$ は，$\sqrt{\dfrac{2\pi}{\omega}}$ という因子を除き展開 (2.4) の係数 $a_{k\alpha}$, $a^{*}_{k\alpha}$ と一致する）．これらの演算子の行列要素は

$$\langle N_{k\alpha}-1|c_{k\alpha}|N_{k\alpha}\rangle = \langle N_{k\alpha}|c^{+}_{k\alpha}|N_{k\alpha}-1\rangle = \sqrt{N_{k\alpha}} \tag{2.15}$$

に等しい．$c_{k\alpha}$ と $c^{+}_{k\alpha}$ のあいだの交換則は，定義 (2.14) と公式 (2.9) とを使って得られる．

$$c_{k\alpha}c^{+}_{k\alpha}-c^{+}_{k\alpha}c_{k\alpha}=1. \tag{2.16}$$

ベクトル・ポテンシャルに対してわれわれは (2.4) の形の展開式にもどる．しかしそこでの係数は，今では演算子である．それをつぎの形に書こう．

$$\mathbf{A}=\sum_{k\alpha}(c_{k\alpha}\boldsymbol{A}_{k\alpha}+c^{+}_{k\alpha}\boldsymbol{A}^{*}_{k\alpha}). \tag{2.17}$$

ここで

$$\boldsymbol{A}_{k\alpha}=\sqrt{4\pi}\frac{\boldsymbol{e}^{(\alpha)}}{\sqrt{2\omega}}e^{i\boldsymbol{kr}}. \tag{2.18}$$

われわれは振動子の偏りの方向を表わす単位ベクトルとして記号 $\boldsymbol{e}^{(\alpha)}$ を導入した．ベクトル $\boldsymbol{e}^{(\alpha)}$ は波動ベクトル $\boldsymbol{k}$ に垂直であり，そしておのおのの $\boldsymbol{k}$ に対して二つの独立な偏りがある．

同様に演算子 $\mathbf{E}$ と $\mathbf{H}$ に対して

$$\begin{aligned}\mathbf{E}&=\sum_{k\alpha}(c_{k\alpha}\boldsymbol{E}_{k\alpha}+c^{+}_{k\alpha}\boldsymbol{E}^{*}_{k\alpha}),\\ \mathbf{H}&=\sum_{k\alpha}(c_{k\alpha}\boldsymbol{H}_{k\alpha}+c^{+}_{k\alpha}\boldsymbol{H}^{*}_{k\alpha})\end{aligned} \tag{2.19}$$

と書こう．ここで

$$\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}\alpha}=i\omega\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}\alpha},\quad \boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}\alpha}=[\boldsymbol{n}\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}\alpha}]\qquad(\boldsymbol{n}=\boldsymbol{k}/\omega).\tag{2.20}$$

ベクトル $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}\alpha}$ は

$$\int\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}\alpha}\boldsymbol{A}^{*}_{\boldsymbol{k}'\alpha'}d^3x=\frac{2\pi}{\omega}\delta_{\alpha\alpha'}\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}\tag{2.21}$$

の意味で互いに直交する．実際に $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}\alpha}$ と $\boldsymbol{A}^{*}_{\boldsymbol{k}'\alpha'}$ が波動ベクトルを異にするならば，その積は因子 $e^{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\boldsymbol{r}}$ を含み，体積積分で0を与える．もしも偏りだけが異なるならば，二つの独立な偏りの方向は互いに直交するので，$\boldsymbol{e}^{(\alpha)}\boldsymbol{e}^{(\alpha')*}=0$ である．類似の関係がベクトル $\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}\alpha},\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}\alpha}$ に対しても成り立つ．これらの規格化は

$$\frac{1}{4\pi}\int(\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}\alpha}\boldsymbol{E}^{*}_{\boldsymbol{k}'\alpha'}+\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}\alpha}\boldsymbol{H}^{*}_{\boldsymbol{k}'\alpha'})d^3x=\omega\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}\delta_{\alpha\alpha'}\tag{2.22}$$

の形に書くとつごうがよい．

演算子(2.19)を(2.10)に代入し，(2.22)を使って積分すると，演算子 $\mathrm{c}_{\boldsymbol{k}\alpha}\mathrm{c}^{+}_{\boldsymbol{k}\alpha}$ を使って表わした場のハミルトニアン

$$\begin{aligned}\mathrm{H}&=\sum_{\boldsymbol{k}\alpha}\frac{1}{2}(\mathrm{c}_{\boldsymbol{k}\alpha}\mathrm{c}^{+}_{\boldsymbol{k}\alpha}+\mathrm{c}^{+}_{\boldsymbol{k}\alpha}\mathrm{c}_{\boldsymbol{k}\alpha})\frac{1}{4\pi}\int(|\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}\alpha}|^2+|\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}\alpha}|^2)d^3x\\&=\sum_{\boldsymbol{k}\alpha}\frac{1}{2}\omega(\mathrm{c}_{\boldsymbol{k}\alpha}\mathrm{c}^{+}_{\boldsymbol{k}\alpha}+\mathrm{c}^{+}_{\boldsymbol{k}\alpha}\mathrm{c}_{\boldsymbol{k}\alpha})\end{aligned}\tag{2.23}$$

を得る．いま考えている表示では（$\mathrm{c},\mathrm{c}^{+}$ の行列要素は (2.15))，この演算子は対角型であり，その固有値は結局(2.12)と一致する．

古典理論で，場の運動量は積分

$$\boldsymbol{P}=\frac{1}{4\pi}\int[\boldsymbol{E}\boldsymbol{H}]d^3x$$

で定義される．量子理論への移行にあたり，$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{H}$ とを演算子 (2.19) に換え，困難なしに

$$\mathbf{P}=\sum_{\boldsymbol{k}\alpha}\frac{1}{2}(\mathrm{P}^2_{\boldsymbol{k}\alpha}+\omega^2\mathrm{Q}^2_{\boldsymbol{k}\alpha})\boldsymbol{n}\tag{2.24}$$

を得る．これは平面波のエネルギーと運動量のあいだのよく知られた古典論の関係式に対応している．この演算子の固有値はつぎのようになる．

$$\boldsymbol{P}=\sum_{\boldsymbol{k}\alpha}\boldsymbol{k}\left(N_{\boldsymbol{k}\alpha}+\frac{1}{2}\right).\tag{2.25}$$

行列要素(2.15)に現われた演算子の表示は≪占有数表示≫である．すなわちこれは，量子数 $N_{k\alpha}$（占有数）を与えることにより，系（場）の状態を記述することに対応している．この表示では場の演算子 (2.19) は（そのハミルトニアン (2.11) とともに），量子数 $N_{k\alpha}$ の関数として表わされた系の波動関数に作用する．この波動関数を $\Phi(N_{k\alpha},t)$ で書き表わす．場の演算子 (2.19) は，あらわな形では時間に依存しない．これは非相対論的量子力学でおなじみの演算子のシュレーディンガー表示に対応している．このときは系の状態 $\Phi(N_{k\alpha},t)$ が時間に依存する．そしてこの依存性は，つぎのようなシュレーディンガー方程式で決められる．

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial t}=\mathrm{H}\Phi.$$

場のこのような記述法は，本来相対論的に不変のものである．なぜならば，これは不変なマクスウェル方程式を基礎にしているからである．しかしこの不変性はあらわな形で現われていない．なぜならば，他のことはさておき，特に空間座標と時間とが，記述のなかで極端に非対称的な形になっているからである．

相対論的理論では外面的にもっと不変な形にした方がふさわしい．そうするためには，いわゆるハイゼンベルク表示を使う必要がある．その表示では，あらわな時間依存性は演算子自身に移される (III, §13 参照)．そこでは時間と座標は同等な形で場の演算子の表式に現われ，系の状態 Φ は占有数のみの関数になる．

演算子 $\mathbf{A}$ に対するハイゼンベルク表示への移行は，(2.17) の和の各項で因子 e^{ikr} を $e^{i(kr-\omega t)}$ に変えるだけのことである．すなわち $A_{k\alpha}$ が，時間依存関数

$$A_{k\alpha}=\sqrt{4\pi}\frac{e^{(\alpha)}}{\sqrt{2\omega}}e^{-i(\omega t-kr)} \tag{2.26}$$

であるとすれば十分なわけである．ここで，遷移 $i\to f$ に対し，ハイゼンベルク演算子の行列要素は，因子 $\exp\{-i(E_i-E_f)t\}$ を含まねばならぬことが容易にわかる．ここで E_i と E_f は始めおよび終りの状態のエネルギーである (III, §13 参照)．N_k を1だけ減ずるか増す遷移に対し，この因子はそれぞれ $e^{-i\omega t}$ あるいは $e^{i\omega t}$ になる．この要求は上に示された置換でも守られている．

先へいって（電磁場や粒子場を考察する際），われわれはいつも演算子はハイゼンベルク表示を意味するものとしよう．

§3. 光　　子

得られた場の量子化の公式の考察に移ろう.

特に, 場のエネルギーに対する公式(2.12)にはつぎのような困難があることがわかる. すべての振動子の量子数 $N_{\boldsymbol{k}\alpha}$ が 0 に等しい状態は, 場のエネルギーの最低準位に対応する (この状態は**電磁場の真空状態**と呼ばれる). しかしこの状態でも各振動子は, 0 と異なる《零点エネルギー》 $\omega/2$ を持っている. 無限個の振動子のすべてにわたって加えると無限大の結果が出る. こうして《発散》の一つに突き当たったわけで, これは現存する理論が, 完全に論理的に首尾一貫していないための帰結である.

ただ, 場のエネルギー固有値についてのみ言えば, 零点振動のエネルギーを引き去るだけでこの困難を除くことができる. すなわち, 場のエネルギーと運動量[1]に対して

$$E = \sum_{\boldsymbol{k}\alpha} N_{\boldsymbol{k}\alpha}\omega, \quad \boldsymbol{P} = \sum_{\boldsymbol{k}\alpha} N_{\boldsymbol{k}\alpha}\boldsymbol{k} \tag{3.1}$$

と書けばよい.

これらの公式は, すべての量子電磁力学の基礎になる**光量子**あるいは**光子**の概念[2]へと導く. すなわち, われわれは自由電磁場を, エネルギー $\omega(=\hbar\omega)$ と運動量 $\boldsymbol{k}(=\boldsymbol{n}\hbar\omega/c)$ を持つ粒子の集まりと考えることができる. 光子のエネルギーと運動量の関係は, 静止質量が 0 で光速度で運動する粒子に対する相対論的力学における関係式と同じである. 占有数 $N_{\boldsymbol{k}\alpha}$ は与えられた運動量 $\boldsymbol{k}$ と偏り $\boldsymbol{e}^{(\alpha)}$ を持つ光子の数を意味している. 光子の偏りの本質は, 他の粒子のスピンの概念と似ている (この関係での光子の特殊性は, のちに§6で考察される).

すぐわかるように, 次節で展開されるすべての数学的定式化は, 光子の集まりとしての電磁場の表わし方に対応している. これは光子系に適用されたいわゆる第二量子化の方法にほかならない[3]. この方法では, 状態の占有数が独立変数の役割を果たし, 演算子はこれらの数の関数に作用する (III, §64 参照). このとき《消滅》および《生成》演算子が

---

1) この引き算は形式的に矛盾しない形で行なうことができる. それは(2.10)のなかの演算子の積を《正規型》, すなわち演算子 c^+ がいつも c より左にあるように制限しておけばよい. このとき公式(2.23)は $\mathrm{H} = \sum_{\boldsymbol{k}\alpha} \omega c^+_{\boldsymbol{k}\alpha} c_{\boldsymbol{k}\alpha}$ の形になる.

2) 光子の考えは, アインシュタインによって初めて導入された (A. Einstein, 1905).

3) 輻射理論に適用した第二量子化の方法は, 最初にディラックにより展開された (P. A. M. Dirac, 1927).

基礎的な役割を果たす．これはそれぞれ占有数を1だけ増減する．すなわち，これらの演算子は $c_{k\alpha}$, $c^+_{k\alpha}$ であり，演算子 $c_{k\alpha}$ は $k\alpha$ の状態の光子を一つ消滅し，$c^+_{k\alpha}$はその状態の光子を一つ生成する．

交換則(2.16)はボーズ統計にしたがう粒子の場合に対応する．こうして，光子は予期されたようにボソンである．ある状態に許される光子数は任意である（われわれは§5でふたたびこの事情の役割にたちもどろう）．

演算子 $\mathbf{A}$ (2.17) のなかで，光子の消滅演算子の係数の役割を果たしている平面波 $\boldsymbol{A}_{k\alpha}$ (2.26) は，一定の運動量 $\boldsymbol{k}$ と，偏り $e^{(\alpha)}$ を持つ光子の波動関数として扱ってよい．このような扱いは，第二量子化の非相対論的方法で，ψ-演算子を粒子の定常状態の波動関数の級数の形に展開することに対応している（しかしこの場合と違って，展開(2.17)には，粒子の消滅演算子も生成演算子も現われてくる．この違いはのちに§12で明らかになる）．

波動関数 (2.26) は

$$\int \frac{1}{4\pi}(|\boldsymbol{E}_{k\alpha}|^2+|\boldsymbol{H}_{k\alpha}|^2)d^3x = \omega \tag{3.2}$$

の条件で規格化される．これは≪体積 $V=1$ のなかに光子1個≫の規格化である．実際に，この等式の左辺の積分は，与えられた波動関数を持つ状態の光子のエネルギーの量子力学的平均値を表わしている（このような解釈は，(2.23)の1行目に見られる形のハミルトニアンの表わし方から明らかである）[1]．

マクスウェル方程式が光子に対する≪シュレーディンガー方程式≫の役割を果たしている．今の場合（(2.1) の条件を満たすポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ に対しては），この波動方程式は

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2}-\Delta \boldsymbol{A} = 0$$

である．普通任意の定常状態の光子の≪波動関数≫はこの方程式の複素解で表わされ，因子 $e^{-i\omega t}$ により時間に依存する．

光子の波動関数と言うとき，光子の空間的局所化の確率振幅として考えるのではけっしてない．すなわち非相対論的量子力学の波動関数の基礎的意味とは反対であることを繰り返し強調しよう．これは，（§1で示されたように）光子の座標の概念は一般に物理的意味

1) 積分 (3.2) の係数 $1/4\pi$ は，(2.10) のなかの普通の係数 $1/8\pi$ の2倍であることに注目しよう．これは結局，複素ベクトル $\boldsymbol{E}_{k\alpha}$, $\boldsymbol{H}_{k\alpha}$ が場の実演算子 $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ と異なることと結びついている．

を持たないことと関係している．この事情の数学的側面について，われわれは次節の最後でふたたびたちもどることにする．

関数 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ の座標についてのフーリエ展開の成分は，運動量表示での光子の波動関数を形成している．これを $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k},t)=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})e^{-i\omega t}$ と書こう．こうして，与えられた運動量 $\boldsymbol{k}$，偏り $\boldsymbol{e}^{(\alpha)}$ の状態に対し，運動量表示の波動関数は (2.26) の指数因子の係数として，簡単に求められる．

$$\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}\alpha}(\boldsymbol{k}',\alpha')=\sqrt{4\pi}\frac{\boldsymbol{e}^{(\alpha)}}{\sqrt{2\omega}}\delta_{\boldsymbol{k}'\boldsymbol{k}}\delta_{\alpha'\alpha}. \tag{3.3}$$

自由粒子の運動量の可測性に対応して，運動量表示の波動関数は，座標表示の関数よりもより深い物理的意味を持っている．これは与えられた状態にある光子が，運動量および偏りの種々の値を持つ確率 $w_{\boldsymbol{k}\alpha}$ を計算する可能性を与える．量子力学の一般法則にしたがって $w_{\boldsymbol{k}\alpha}$ は，一定の $\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{e}^{(\alpha)}$ を持つ状態の波動関数で，関数 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k}')$ を展開した係数の絶対値の2乗として，つぎのように与えられる．

$$w_{\boldsymbol{k}\alpha}\propto|\sum_{\boldsymbol{k}'\alpha'}\boldsymbol{A}^*_{\boldsymbol{k}\alpha}(\boldsymbol{k}',\alpha')\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k}')|^2.$$

(比例係数は関数の規格化の方法に依存している)．ここに (3.3) を代入して

$$w_{\boldsymbol{k}\alpha}\propto|\boldsymbol{e}^{(\alpha)}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})|^2 \tag{3.4}$$

を得る．二つの偏りについて加えると，運動量 $\boldsymbol{k}$ を持つ光子を見いだす確率は

$$w_{\boldsymbol{k}}\propto|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})|^2. \tag{3.5}$$

§ 4.　ゲージ不変性

よく知られているように，古典電磁気学で場のポテンシャルの選び方は一意的ではない．4-ポテンシャルの成分 A_μ は

$$A_\mu\longrightarrow A_\mu+\partial_\mu\chi \tag{4.1}$$

の形の任意の**ゲージ**（あるいは**グラディエント**）変換をしてもよい．ここで χ は座標と時間の任意関数である（II，§18 参照）．

平面波の場合，ポテンシャルの形（その比例因子 $\exp(-ik_\mu x^\mu)$）を変えない変換に限れば，一意性は波動振幅に4-ベクトル k^μ に比例する任意の4-ベクトルを加えてよいということに帰する．

結局，量子理論にはポテンシャルの非一意性が残る．すなわち，場の演算子あるいは光

子の波動関数に関してである．ポテンシャルの選び方の問題を，あらかじめ解決しないで，(2.17) の代りに4－ポテンシャルに対する類似の展開を書く必要がある．

$$A^{\mu} = \sum_{k\alpha}(c_{k\alpha} A^{\mu}_{k\alpha} + c^{+}_{k\alpha} A^{\mu *}_{k\alpha}). \tag{4.2}$$

ここで波動関数 $A^{\mu}_{k\alpha}$ は

$$A^{\mu}_{k} = \sqrt{4\pi}\frac{e^{\mu}}{\sqrt{2\omega}}e^{-ik_{\nu}x^{\nu}}, \quad e_{\mu}e^{\mu *} = -1$$

の形の4－ベクトルである．あるいは4元のベクトル添字を省略して

$$A_{k} = \sqrt{4\pi}\frac{e}{\sqrt{2\omega}}e^{-ikx}, \quad ee^{*} = -1. \tag{4.3}$$

ここで4－運動量 $k^{\mu} = (\omega, \boldsymbol{k})$（したがって $kx = \omega t - \boldsymbol{kr}$），$e$ は偏りの単位4－ベクトルである[1]．

関数 (4.3) の座標および時間依存性を変えないゲージ変換に限れば，

$$e_{\mu} \longrightarrow e_{\mu} + \chi k_{\mu} \tag{4.4}$$

の置換になる．ここで $\chi = \chi(k^{\mu})$ は任意関数である．偏りが横方向であることは，4－ベクトル e が

$$e^{\mu} = (0, \boldsymbol{e}), \quad \boldsymbol{ek} = 0 \tag{4.5}$$

であるようなゲージがいつも可能なことを意味している（このようなゲージを**3次元の横波**と呼ぼう）．不変の4次元形式ではこの要求は，**4次元の横波**の条件

$$ek = 0 \tag{4.6}$$

の形に書かれる．

この条件は（規格化の条件 $ee^{*} = -1$ と同様に）$k^{2} = 0$ であるために (4.4) の変換により壊されないことに注意しよう．他面，粒子の4－運動量の2乗が0に等しいことは，その質量が0に等しいことを意味する．これによりゲージ不変性と，光子の質量が0に等しいことが関係しあっていることがわかる（この関係の他の一面は §14 で示される）．

---

1) (4.3) 式は完全な相対論的共変（4－ベクトル）の形をしていない．これは有限の体積 $V = 1$ での規格化が用いられたが，その非不変性に結びついている．しかしこの事情は原理的な価値は持たない．そしてこのような規格化の方法が提供する便利さで十分に償なわれている．先へいってわれわれは，正しい不変形式のなかの現実の物理量を，自動的に簡単に求めることがそれにより保障されることを見るだろう．

測定しうるいかなる物理量も，その過程に関与する光子の波動関数のゲージ変換で変わってはならない．この**ゲージ不変性**の要求は量子力学において，古典力学におけるよりも一層大きな役割を果たしている．われわれは，相対論的不変性の要求と並んで，これが強力な探求法になるようなたくさんの例を見るだろう．

また，別にゲージ不変性は電荷の保存則と密接に結びついている．この一面は §43 でさらに詳述しよう．

すでに前節で，光子の座標の波動関数は，その空間的局所化の確率振幅として扱えないことを見てきた．数学的な面からこの事情は，形式的にも確率密度の役割を果たしうるような量を，波動関数を使って，組み立てえないことに現われている．このような量は本質的に，波動関数 A_μ とその共役複素関数との正の双2次形式として表わされる必要がある．その他にそれは相対論的共変性の一定の要求も満足しなければならない．すなわち自身が4-ベクトルの時間成分として表わされねばならない(すなわち，つぎのようになる．粒子数の保存を表わす連続方程式が，流れの4-ベクトルの**発散**が0に等しいという4次元形式に書かれる．この場合，この流れの4-ベクトルの時間成分は粒子の局所化の確率密度になる．II，§29 参照)．他方ゲージ不変性のために4-ベクトル A_μ は，反対称テンソル $F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu=-i(k_\mu A_\nu-k_\nu A_\mu)$ の形でのみ流れのなかに入ることができる．このようにして流れの4-ベクトルは $F_{\mu\nu}$ と $F^*_{\mu\nu}$ (および4-ベクトル k_μ の成分) の双2次形式から組み立てられている．しかし，このような4-ベクトルは一般には組み立てることができない．上に設定した条件を満足するすべての式 (たとえば $k^\lambda F^*_{\lambda\nu}F^\nu_\mu$) は横波の条件 ($k^\lambda F_{\nu\lambda}=0$) のために0になるので ($k_\mu$ の奇数次の成分を含むので)，本質的に正のものでないことはもちろんである．

§ 5.　量子論における電磁場

電磁場を光子の集まりとする記述法は，物理的意味で量子理論における電磁場にまったく適した記述法である．それは場の張力を使ったその古典的記述を変えた．その張力は光子像の数学的方法のなかでは，第二量子化の演算子として現われる．

よく知られているように，量子系の性質はその定常状態を定める量子数が大きい場合には古典的なものに近づいてゆく．(与えられた体積内の)自由電磁場に対して，このことは振動子の量子数，すなわち光子数 $N_{k\alpha}$ が大きいことを意味している．この意味で光子がボーズ統計にしたがうことが深い意義を持っている．理論の数学的定式化のなかでは，ボ

ーズ統計と古典場の性質との関係は演算子 $c_{k\alpha}$, $c^+_{k\alpha}$ の交換則に現われている. $N_{k\alpha}$ が大きく, これらの演算子の行列要素が大きいときには, 交換関係 (2.16) の右辺の 1 は無視できる. その結果

$$c_{k\alpha}c^+_{k\alpha} \approx c^+_{k\alpha}c_{k\alpha}$$

を得る. すなわちこれらの演算子は互いに交換する古典的量 $c_{k\alpha}$, $c^*_{k\alpha}$ になり, 場の古典的張力を決定する.

しかしながら, 電磁場が準古典的である条件はさらに詳細にする必要がある. それはつぎのようなことである. すべての $N_{k\alpha}$ が大きいとすると, すべての状態について加えれば, 場のエネルギーは無限大となることがわかる. したがって条件は非現実的である.

準古典性の条件に関する物理的に意味のある問題の設定は, そう長くない時間間隔 Δt で平均された場の値の考察に基礎を置くものである. 古典電場 $\boldsymbol{E}$ (あるいは磁場 $\boldsymbol{H}$) を時間についてのフーリエ積分による展開で表わすとする. それを時間間隔 Δt で平均すると, 平均値 $\bar{\boldsymbol{E}}$ への目立った寄与は振動数が条件 $\omega\Delta t \lesssim 1$ を満たすフーリエ成分から与えられる. それ以外の場合は振動因子 $e^{-i\omega t}$ がほとんど0になる. したがって, 準古典性の条件を明らかにするためには, 振動数が $\omega \lesssim 1/\Delta t$ の量子振動子の平均場だけを考えればよい. これらの振動子の量子数が大きいことだけを要求すれば十分である.

0 と $\omega \sim 1/\Delta t$ のあいだの振動数を持った ($V=1$ の体積中にある) 振動子の数は

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^3 \sim \frac{1}{(c\Delta t)^3} \tag{5.1}$$

の程度の大きさに等しい[1]. 単位体積の場の全エネルギーは, ほぼ $\bar{\boldsymbol{E}}^2$ に等しい. この量は振動子の数と個々の光子の平均エネルギー ($\sim \hbar\omega$) とで割って, 光子数の大きさの程度を見いだす.

$$N_k \sim \frac{\bar{E}^2 c^3}{\hbar\omega^4} .$$

この数が大きいことを要求して, つぎの不等式を得る.

$$|\boldsymbol{E}| \gg \frac{\sqrt{\hbar c}}{(c\Delta t)^2}. \tag{5.2}$$

これが (時間間隔 Δt での) 平均電場の古典的考察を許す条件である. 電場は十分強くなければならないこと, すなわち平均時間域 Δt が小さければ小さいほど, 大きくなければ

1) この節では普通の単位が用いられている.

ならないことを見た．交番電場に対してはこの間隔は，もちろん電場が目立つほど変わる時間の周期を超えてはならない．したがって，十分に弱い交番電場はほとんどすべての場合に準古典的ではありえない．ただ，静（時間的に一定）電場の場合には $\Delta t \to \infty$ と置くことができ，不等式 (5.2) の右辺が 0 になる．すなわち静電場はいつも古典的であることを意味している．

すでに示したように，平面波の重ね合わせの形の電磁場の古典式は，量子論では演算子とみなさねばならない．しかしこれらの演算子の物理的意味は限られている．実際には，光子の真空の状態では，物理的に意味のある場の演算子は 0 に等しい場の値へと導く．それにもかかわらず，場の 2 乗の演算子 $\mathbf{E}^2$ の平均値は，普通の状態では因子を除いて場の零点エネルギーと一致し，無限大であることがわかる．（≪平均値≫を，量子力学的平均値と考える．すなわち，演算子の対角行列要素に対応する）．なんらかの形式的引き算演算子を使ってさえもこれを避けることはできない（これは場のエネルギーに対しては可能である）．なぜなら，今の場合われわれは演算子 $\mathbf{E}$ と $\mathbf{H}$ 自身の（2 乗ではない）なんらかのうまい変形によってこれを行なう必要があるであろうし，これが不可能であることが示されている．かくして，普通の量子力学の演算子とは反対に，量子電磁力学の場の演算子はなんらかの意味のある物理量には対応しない．

§ 6.　光子の角運動量と偶奇性

すべての粒子と同様に，光子も一定の角運動量を持ちうる．光子におけるこの性質を明らかにするために，あらかじめ量子力学の数学的方法で，粒子の波動関数の性質とその角運動量がどんなふうに関係しているかを思い出そう．

粒子の角運動量 $\boldsymbol{j}$ は，その軌道角運動量 $\boldsymbol{l}$ とその内部角運動量，すなわちスピン $\boldsymbol{s}$ とから合成される． スピン s の粒子の波動関数は，$2s$ 階の対称スピノールである． すなわち $2s+1$ 個の成分の集まりで，その成分は座標系の回転の際に一定の規則で互いに変換される．軌道角運動量は波動関数の座標依存性と結びついている．軌道角運動量 l の状態は，l 次の球関数により（線型に）表わされる成分を持つ波動関数に対応する．

したがって，スピンと軌道角運動量を完全に区別することができるためには，波動関数の≪スピンの≫性質と≪座標の≫性質が独立であることが要求される．（与えられた時間の）スピノール成分の座標依存性はいかなる付加的条件によっても制限されてはいけない．

波動関数の運動量表示で，座標依存性は運動量 $\boldsymbol{k}$ への依存性に対応する．（3次元横波ゲージの）光子の波動関数はベクトル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})$ である．ベクトルは2階のスピノールと同等であり，この意味で光子をスピン1と書けるだろう．しかしこのベクトル波動関数は横波条件 $\boldsymbol{k}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})=0$ にしたがう．これはベクトル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})$ の運動量依存性に課せられた付加条件である．この結果，この依存性は，もはやベクトルのすべての成分に対して同時に任意な形では与えられない．そして軌道角運動量とスピンの分離はできないことになる．

光子に対しては静止粒子の角運動量のようなスピンの定義もまた使えない．なぜかというと，光速で動いている光子に対しては，一般に静止系が存在しないからである．

このように光子に対しては，その全角運動量についてのみ語ることができる．その上，全角運動量はただ整数値のみを取りうることも早くから明らかである．これは光子を特徴づける量のなかで，奇数階のスピノールがまったくないことからもわかる．

すべての粒子と同様，光子の状態はまたその偶奇性で特徴づけられる．これは座標系の反転に対する波動関数のふるまい（III，§30 参照）と結びついている．運動量表示で座標の符号を変えることは，$\boldsymbol{k}$ のすべての成分の符号を変えることに対応している．反転演算子Pのスカラー関数 $\varphi(\boldsymbol{k})$ に対する作用はつぎのようなものである；$\mathrm{P}\varphi(\boldsymbol{k})=\varphi(-\boldsymbol{k})$．ベクトル関数 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})$ に対する作用には，軸が逆向きに変わるとベクトルのすべての成分の符号が変わることを考慮しなければならない．したがって[1]

$$\mathrm{P}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})=-\boldsymbol{A}(-\boldsymbol{k}). \tag{6.1}$$

光子の角運動量を軌道角運動量とスピンに分けることは物理的意味を失っているが，それにもかかわらず，≪スピン≫ s と≪軌道角運動量≫ l を形式的に，波動関数の回転に対する変換性を表わす補助的概念にするとつごうがよい．$s=1$ は波動関数がベクトルであることに対応し，l の値はそれに含まれる球関数の次数を表わす．そこで光子の角運動量が一定値を持ち，自由粒子に対しては球面波であるような状態の波動関数を考えよう．l という数は特に光子の状態の偶奇性を与え

$$P=(-1)^{l+1}. \tag{6.2}$$

この意味で角運動量の演算子 $\mathbf{j}$ は和 $\mathbf{s}+\mathbf{l}$ として表わすことができる．よく知られてい

---

1) われわれは，$\boldsymbol{A}$（あるいはこれに対応する電場ベクトル $\boldsymbol{E}=i\omega\boldsymbol{A}$）のような極性ベクトルに対する反転演算子の作用で，偶奇性を決定することに限ってきた．これは軸性ベクトル $\boldsymbol{H}=i[\boldsymbol{k}\boldsymbol{A}]$ に対する作用と符号が違っている．なぜならば，このベクトルは反転で変わらないからである．$\mathrm{P}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{k})=\boldsymbol{H}(-\boldsymbol{k})$．

るように，角運動量演算子は座標系の無限小回転の演算子と結ばれている．いまの場合は，この演算子のベクトル場への作用と結ばれている．和 $\mathbf{s}+\mathbf{l}$ のなかの演算子 $\mathbf{s}$ はベクトルの添字に作用し，ベクトルの異なる成分へ互いに変換する．演算子 $\mathbf{l}$ は運動量（あるいは座標）の関数と同様にこれらの成分に作用する．

（与えられたエネルギーの）光子の角運動量が与えられた値 j のときに可能な（この際，角運動量の方向による $(2j+1)$ 重の縮退は考えない）状態の数を計算しよう．

$\boldsymbol{l}$ と $\boldsymbol{s}$ が独立であるとき，このような計算はベクトル模型により角運動量 $\boldsymbol{l}$ と $\boldsymbol{s}$ を合成して，必要な値 j が得られる方法の数を計算することによって実現される．スピン $s=1$ の粒子に対しては，われわれはこのようにして（0 と異なる値 j が与えられたとき），つぎのような 3 組の l の値と偶奇性が見いだされよう．

$$l=j,\quad P=(-1)^{l+1}=(-1)^{j+1},$$
$$l=j\pm1,\quad P=(-1)^{l+1}=(-1)^{j}.$$

$j=0$ ならば（$l=1$ の）偶奇性が $P=+1$ を持つ唯一の状態が得られる．

この計算では，しかしながら，ベクトル $\boldsymbol{A}$ の横波の条件は考えていない．その 3 成分すべてが独立であるとみなした．だから，求められた状態数から，なお縦ベクトルに相当する状態の数を差し引く必要がある．このようなベクトルは $\boldsymbol{k}\varphi(\boldsymbol{k})$ の形に書くことができる．ここからその（回転に対する）変換性により，3 成分は唯一のスカラー φ と同値であることがわかる[1]．したがって，横波条件と両立しない余分な状態は，スカラー波動関数（0 階のスピノール），すなわち ≪スピン 0≫ を持つ粒子の状態に対応するはずである[2]．この状態の角運動量は，したがって，φ に表わされる球関数の次数に一致する．この状態の偶奇性は光子の状態と同様に，反転演算子のベクトル関数 $\boldsymbol{k}\varphi$ への作用により決定される．

$$\mathrm{P}(\boldsymbol{k}\varphi)=-(-\boldsymbol{k})\varphi(-\boldsymbol{k})=(-1)^{j}\boldsymbol{k}\varphi(\boldsymbol{k}).$$

すなわち，$(-1)^{j}$ に等しい．このようにして，上に得た偶奇性が $(-1)^{j}$（$j\neq0$ のとき二つ，そして $j=0$ のとき一つ）の状態数のうち一つは差し引かなければならない．

---

1) 実際に，回転に対するある量の変換性について語るときは，いつも与えられた点における，すなわち $\boldsymbol{k}$ が与えられたときの変換について言っている．このような変換に際し，$\boldsymbol{k}\varphi(\boldsymbol{k})$ は一般には変わらない．すなわちスカラーということになる．

2) ここでは何か現実の粒子の状態を考えているのでないことを繰り返し強調しよう．ここで行なった計算は形式的なもので，数学的観点からは回転群の既約表現により互いに変換される量の集まりの分類へと導いている．

結局，光子の角運動量 j が 0 と異なるとき，偶-状態一つと奇-状態一つが存在する結果になる．$j=0$ のときには，まったく状態が存在しない．これは光子が 0 に等しい角運動量は持ちえないこと，したがって j は 1，2，3……の値だけしか取らぬことを意味する．しかし，$j=0$ の値が不可能なことは前から明らかである．角運動量が 0 に等しい状態の波動関数は球対称であり，それはもちろん横波ではありえない．

光子のいろいろな状態の定まった述語がある．角運動量が j で偶奇性が $(-1)^j$ の状態の光子は**電気的** $\boldsymbol{2^j}$**-重極**の（あるいは $\boldsymbol{Ej}$-）光子，また偶奇性が $(-1)^{j+1}$ のを**磁気的** $\boldsymbol{2^j}$**-重極**の（あるいは $\boldsymbol{Mj}$-）光子と呼ばれる．したがって電気的 2 重極の光子は $j=1$ の奇状態に対応し，電気的 4 重極は $j=2$ の偶状態，磁気的 2 重極は $j=1$ の偶状態に対応する[1]．

§7.　光子の球面波

光子の角運動量の可能な値を決めたので，われわれはいまやそれに対応する波動関数を見いだそう[2]．

始めに形式的問題を考えよう．演算子 $\mathbf{j}^2$ および j_z の固有関数であるようなベクトル関数を決めよう．この際これらの関数のどれが，われわれに興味のある光子の波動関数に含まれるかはあらかじめ決めない．そして横波の条件も考察はしないことにする．

われわれは運動量表示でこの関数を求めよう．この表示で座標の演算子は $\mathbf{r}=i\,\partial/\partial\boldsymbol{k}$ である（III（15.12）参照）．軌道角運動量の演算子は

$$\mathbf{l}=[\mathbf{r}\boldsymbol{k}]=-i\left[\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\right]$$

である．すなわち座標表示における角運動量とくらべて，$\boldsymbol{r}$ という文字を $\boldsymbol{k}$ に置き換えた点だけが違っている．

求める固有関数を $\boldsymbol{Y}_{jm}$ と書き，**球ベクトル**と呼ぶ．これは方程式

$$\mathbf{j}^2\boldsymbol{Y}_{jm}=j(j+1)\boldsymbol{Y}_{jm},\quad \mathrm{j}_z\boldsymbol{Y}_{jm}=m\boldsymbol{Y}_{jm} \tag{7.1}$$

を満足する（z 軸は空間の与えられた方向である）．$\boldsymbol{a}Y_{jm}$ の形の任意関数がこの性質を持っていることを示そう．ここで $\boldsymbol{a}$ は単位ベクトル $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{k}/\omega$ を使ってできるあるベクト

1)　この呼び方は古典輻射論の述語に対応している．先へいって（§46，§47）電気および磁気型の光子の輻射は，対応する電荷系の電気的および磁気的モーメントによって決定されることを見るだろう．

2)　この問題は最初にハイトラーにより考察された（W. Heitler, 1936）．ここに述べる形式はヴェ・ベ・ベレステツキーによる(1947)．

ルで，Y_{jm} は普通の（スカラー）球関数である．後者はいつも，III, § 28 のように定義される．

$$Y_{lm}(\boldsymbol{n}) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} i^l \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos\theta) e^{im\varphi} \tag{7.2}$$

(θ, φ は $\boldsymbol{n}$ の方向の球座標の角である)[1]．

これに対して III (29.4) の交換則を思い起こそう．

$$\{\mathrm{l}_i, a_k\}_- = ie_{ikl}a_l.$$

この等式の右辺は ($-\mathrm{s}_i a_k$) の形に書くことができる．ここで $\mathbf{s}$ はスピン 1 の演算子である（ベクトル関数に対するこの演算子の作用は，等式 $\mathrm{s}_i a_k = -ie_{ikl}a_l$ によって定義される．III, § 58 参照）．したがって

$$\mathrm{l}_i a_k - a_k \mathrm{l}_i = -\mathrm{s}_i a_k$$

を得る．この等式を使って

$$\mathrm{j}_i a_k = (\mathrm{l}_i + \mathrm{s}_i) a_k = a_k \mathrm{l}_i$$

になる．したがって

$$\mathbf{j}^2(\boldsymbol{a}Y_{jm}) = \boldsymbol{a}\,\mathbf{l}^2 Y_{jm}, \quad \mathrm{j}_z(\boldsymbol{a}Y_{jm}) = \boldsymbol{a}\,\mathrm{l}_z Y_{jm}.$$

しかし，球関数 Y_{jm} は演算子 $\mathbf{l}^2$ と l_z の固有関数で，その固有値は $j(j+1)$ と m であり，したがってわれわれは等式 (7.1) に達する．

つぎのベクトル[2]

$$\frac{\nabla_{\boldsymbol{n}}}{\sqrt{j(j+1)}}, \quad \frac{[\boldsymbol{n}\nabla_{\boldsymbol{n}}]}{\sqrt{j(j+1)}}, \quad \boldsymbol{n} \tag{7.3}$$

---

1) 将来の引用のために，$\theta = 0$ の ($\boldsymbol{n}$ が z 軸に沿った) ときの関数の値は

$$Y_{lm}(\boldsymbol{n}_z) = i^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \delta_{m0} \tag{7.2a}$$

であることを指摘しておこう．

2) 演算子 $\nabla_{\boldsymbol{n}} \equiv |\boldsymbol{k}| \nabla_{\boldsymbol{k}}$ は，方向 $\boldsymbol{n}$ だけに依存する関数に作用する．（球座標では）あわせて二つの成分

$$\nabla_{\boldsymbol{n}} = \left(\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

を持っている．つぎに $\Delta_{\boldsymbol{n}}$ で書き表わした演算子は，ラプラス演算子の角部分である．

$$\Delta_{\boldsymbol{n}} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

の一つをベクトル $\boldsymbol{a}$ として選ぶと，われわれは三つの本質的に異なった形の球ベクトルを得る.

かようにして，つぎの形の球ベクトル

$$\boldsymbol{Y}_{jm}^{(\text{電})}=\frac{1}{\sqrt{j(j+1)}}\nabla_{\boldsymbol{n}}Y_{jm},\quad P=(-1)^{j}$$

$$\boldsymbol{Y}_{jm}^{(\text{磁})}=[\boldsymbol{n}\boldsymbol{Y}_{jm}^{(\text{電})}],\quad P=(-1)^{j+1} \tag{7.4}$$

$$\boldsymbol{Y}_{jm}^{(\text{縦})}=\boldsymbol{n}Y_{jm},\quad P=(-1)^{j}$$

を定義しよう．各ベクトルと並んで，その偶奇性 P が示されている．三つの形の球ベクトルは互いに直交する．そして $\boldsymbol{n}$ に対して $\boldsymbol{Y}_{jm}^{(\text{縦})}$ は縦，$\boldsymbol{Y}_{jm}^{(\text{電})}$ と $\boldsymbol{Y}_{jm}^{(\text{磁})}$ は横方向である.

球ベクトルはスカラー球関数を使って表わすことができる．その際，$\boldsymbol{Y}_{jm}^{(\text{磁})}$ は同じ次数 $l=j$ の球関数を使って，また $\boldsymbol{Y}_{jm}^{(\text{電})}$ および $\boldsymbol{Y}_{jm}^{(\text{縦})}$ は次数が $l=j\pm1$ の球関数を使って表わされる．この事情は前から明らかであった．(7.2)～(7.4)で示された球ベクトルの偶奇性を，ベクトル場に含まれる球関数の次数によって表わしたベクトル場の偶奇性 $(-1)^{l+1}$ とくらべれば十分である.

おのおのの形の球ベクトルは互いに直交し

$$\int\boldsymbol{Y}_{jm}\boldsymbol{Y}_{j'm'}^{*}\,do=\delta_{jj'}\delta_{mm'} \tag{7.5}$$

によって規格化される．ベクトル $\boldsymbol{Y}_{jm}^{(\text{電})}$ については球関数の規格化の条件から明らかである．ベクトル $\boldsymbol{Y}^{(\text{電})}$ に対しては規格化積分は

$$\frac{1}{j(j+1)}\int\nabla_{\boldsymbol{n}}Y_{jm}\nabla_{\boldsymbol{n}}Y_{j'm'}^{*}\,do=-\frac{1}{j(j+1)}\int Y_{j'm'}^{*}\Delta_{\boldsymbol{n}}Y_{jm}do$$

で，$\Delta_{\boldsymbol{n}}Y_{jm}=-j(j+1)Y_{jm}$ であるから，(7.5)へ達する．ベクトル $\boldsymbol{Y}_{jm}^{(\text{磁})}$ の規格化もこのような積分になる.

上にやったように方程式 (7.1) の直接の証明をしなくても，関数の変換性に対する一般的考察に基づいて，球ベクトル (7.4) に到達することができることに注目しよう．このような考察は，前節でわれわれにつぎのような結論をもたらした．つまり $\boldsymbol{n}\varphi$ の形のベクトル関数は，φ に現われる球関数の次数と一致する角運動量の値 j に対応している．単に $\varphi=Y_{jm}$ と置けば，関数 $\boldsymbol{n}\varphi$ はまた角運動量の投影が一定値 m に対応する．かようにして，われわれはただちにベクトル $\boldsymbol{Y}_{jm}^{(\text{縦})}$ に達する．しかし §6 で述べられた変換性に関す

る考察は，$n\varphi$ のなかの因子 $\boldsymbol{n}$ をベクトル $\nabla\boldsymbol{n}$ あるいは $[\boldsymbol{n}\nabla\boldsymbol{n}]$ に変えても影響されない．かくしてわれわれは他の二つの形の球ベクトルを得る．

光子の波動関数にもどろう．電気型 (Ej) の光子に対し，ベクトル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})$ は偶奇性 $(-1)^j$ を持っている．球ベクトル $\boldsymbol{Y}_{jm}^{(\text{電})}$ も $\boldsymbol{Y}_{jm}^{(\text{縦})}$ もこのような偶奇性を持っている．しかしながら，これらのなかの前者のみが横波の条件を満たしている．磁気型 (Mj) 光子に対してはベクトル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k})$ は偶奇性 $(-1)^{j+1}$ を持っていて，ただ球ベクトル $\boldsymbol{Y}_{jm}^{(\text{磁})}$ だけがこのような偶奇性を持っている．したがって，一定の角運動量 j とその投影 m（およびエネルギー ω）を持った光子の波動関数は

$$\boldsymbol{A}_{\omega jm}(\boldsymbol{k}) = \frac{4\pi^2}{\omega^{\frac{3}{2}}}\delta(|\boldsymbol{k}|-\omega)\boldsymbol{Y}_{jm}(\boldsymbol{n}) \tag{7.6}$$

で，ここで $\boldsymbol{Y}_{jm}$ という量は，電気型あるいは磁気型光子の場合に，それぞれ $\boldsymbol{Y}_{jm}^{(\text{電})}$ あるいは $\boldsymbol{Y}_{jm}^{(\text{磁})}$ と書く必要がある．与えられたエネルギー値は因子 $\delta(|\boldsymbol{k}|-\omega)$ で考慮されている．

関数 (7.6) は条件

$$\frac{1}{(2\pi)^4}\int \omega\omega' \boldsymbol{A}_{\omega' j' m'}^{*}(\boldsymbol{k})\boldsymbol{A}_{\omega jm}(\boldsymbol{k})d^3k = \omega\delta(\omega'-\omega)\delta_{jj'}\delta_{mm'} \tag{7.7}$$

で規格化される．座標表示の波動関数に対し，条件 (7.7) は条件[1]

$$\frac{1}{4\pi}\int\{\boldsymbol{E}_{\omega' j' m'}^{*}(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}_{\omega jm}(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{H}_{\omega' j' m'}^{*}(\boldsymbol{r})\boldsymbol{H}_{\omega jm}(\boldsymbol{r})\}d^3x = \omega\delta(\omega'-\omega)\delta_{jj'}\delta_{mm'} \tag{7.8}$$

と同等である．実際には，等式の左辺の積分は，ポテンシャルを使って

$$\frac{1}{2\pi}\int \boldsymbol{A}_{\omega' j' m'}^{*}(\boldsymbol{r})\boldsymbol{A}_{\omega jm}(\boldsymbol{r})\omega'\omega d^3x$$

の形に表わされる．ここで

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}_{\omega jm}(\boldsymbol{r}) &= \int \boldsymbol{A}_{\omega jm}(\boldsymbol{k})\,e^{i\boldsymbol{kr}}\frac{d^3k}{(2\pi)^3},\\ \boldsymbol{A}_{\omega' j' m'}^{*}(\boldsymbol{r}) &= \int \boldsymbol{A}_{\omega' j' m'}^{*}(\boldsymbol{k}')e^{-i\boldsymbol{k}'\boldsymbol{r}}\frac{d^3k'}{(2\pi)^3}\end{aligned} \tag{7.9}$$

と置く必要がある．そうすると d^3x の積分が $(2\pi)^3\delta(\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{k})$ を与え，これで d^3k の積分がなくなり，積分は (7.7) の形になる．

---

1) この条件は (2.22) と同じ型である．等式の右辺に因子 $\delta(\omega'-\omega)$ が現われるのは，ここでは有限の体積 $V=1$ のなかの場でなく無限の全空間のなかの（球面波の）場を考えているためである．

これまでのところ，われわれはスカラー・ポテンシャルが $\Phi=0$ のようなポテンシャルの横波ゲージと考えてきた．しかしたくさんの応用で，球面波では別のゲージの，さらに便利な方法を示しうる．

運動量表示でのポテンシャルの可能な変換は，置換

$$\boldsymbol{A}\longrightarrow\boldsymbol{A}+\boldsymbol{n}f(\boldsymbol{k}),\quad \Phi\longrightarrow\Phi+f(\boldsymbol{k})$$

である．ここで $f(\boldsymbol{k})$ は任意関数である．これを今の場合，新しいポテンシャルが球関数で表わされるように，また前と同じように定まった偶奇性を持つように選ぶことにしよう．電気型光子ではこの条件はポテンシャルの選択を，つぎのような関数

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{(\text{電})}_{\omega jm}(\boldsymbol{k})&=\frac{4\pi^2}{\omega^{\frac{3}{2}}}\delta(|\boldsymbol{k}|-\omega)(\boldsymbol{Y}^{(\text{電})}_{jm}+C\boldsymbol{n}Y_{jm}),\\ \Phi^{(\text{電})}_{\omega jm}(\boldsymbol{k})&=\frac{4\pi^2}{\omega^{\frac{3}{2}}}\delta(|\boldsymbol{k}|-\omega)CY_{jm}\end{aligned}\qquad(7.10)$$

に限ることになる．ここで C は任意定数である．磁気型光子に対しては $\boldsymbol{A}^{(\text{磁})}(\boldsymbol{k})$ にこのようなものをつけると，その一定の偶奇性が失われる．したがって，このような条件では (7.6) の選択が唯一のものになる．

一定の角運動量と偶奇性を持つ光子が，$\boldsymbol{n}$ 方向の立体角要素 do に動くことが記録される確率は，(3.5) と (7.6) にしたがって

$$w(\boldsymbol{n})do=|\boldsymbol{Y}^{(\text{電})}_{jm}(\boldsymbol{n})|^2do\qquad(7.11)$$

に等しい．われわれは E-型の光子に対する式を書いた．しかし $|\boldsymbol{Y}^{(\text{磁})}_{jm}|^2=|\boldsymbol{Y}^{(\text{電})}_{jm}|^2$ であるから両方の型の光子に対する確率分布 $w(\boldsymbol{n})$ は同じである．

絶対値の2乗 $|\boldsymbol{Y}^{(\text{電})}_{jm}|^2$ は方位角 φ によらない（球関数の因子 $e^{\pm im\varphi}$ は落ちる）．したがって，確率分布 $w(\boldsymbol{n})$ は z 軸に関して対称である．さらに，球ベクトルがどれも定まった偶奇性を持つので，その絶対値の2乗は反転，すなわち極角 $\theta\to\pi-\theta$ の置換に対して偶である．これは関数 $w(\theta)$ が次数において偶である多項式を含むルジャンドル多項式で展開されることを意味している．この展開係数の決定は，3個の球関数の積の積分の計算と，そのつぎに成分に対する和をとることに帰着する．これらはIII, §107～§108で得られた公式を使って遂行され，つぎの結果に到達する．

$$w(\theta)=(-1)^{j+1}\frac{(2j+1)^{\frac{3}{2}}}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(4n+1)\begin{pmatrix}j&j&2n\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}j&j&1\\j&j&2n\end{Bmatrix}P_{2n}(\cos\theta).\qquad(7.12)$$

最後に，球関数展開の形の球ベクトルの成分の式を導こう．この際 III，§ 107 にしたがって定義されたベクトルの ≪球面成分≫ を用いよう．ベクトル $\boldsymbol{f}$ の成分 f_λ は

$$f_0 = if_z, \quad f_{+1} = -\frac{i}{\sqrt{2}}(f_x+if_y), \quad f_{-1} = \frac{i}{\sqrt{2}}(f_x-if_y) \tag{7.13}$$

である．もしも≪球面基底≫

$$\boldsymbol{e}^{(0)} = i\boldsymbol{e}^{(z)}, \quad \boldsymbol{e}^{(+1)} = -\frac{i}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}^{(x)}+i\boldsymbol{e}^{(y)}), \quad \boldsymbol{e}^{(-1)} = \frac{i}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}^{(x)}-i\boldsymbol{e}^{(y)}) \tag{7.14}$$

($\boldsymbol{e}^{(x,y,z)}$ は x, y, z 軸の基底)を導入すると

$$\boldsymbol{f} = \sum_\lambda (-1)^{1-\lambda} f_{-\lambda} \boldsymbol{e}^{(\lambda)}, \quad f_\lambda = (-1)^{1-\lambda} \boldsymbol{f}\boldsymbol{e}^{(-\lambda)*} = \boldsymbol{f}\boldsymbol{e}^{(\lambda)} \tag{7.15}$$

となる．球ベクトルの球面成分は $3j$-記号の助けを借りて球関数を使ってつぎの式で表わされる．

$$\begin{aligned}
(-1)^{j+m+\lambda+1}(\boldsymbol{Y}^{(\text{電})}_{jm})_\lambda &= -\sqrt{j}\begin{pmatrix} j+1 & 1 & j \\ m+\lambda & -\lambda & -m \end{pmatrix} Y_{j+1,\, m+\lambda} \\
&\quad + \sqrt{j+1}\begin{pmatrix} j-1 & 1 & j \\ m+\lambda & -\lambda & -m \end{pmatrix} Y_{j-1,\, m+\lambda}, \\
(-1)^{j+m+\lambda+1}(\boldsymbol{Y}^{(\text{磁})}_{jm})_\lambda &= -\sqrt{2j+1}\begin{pmatrix} j & 1 & j \\ m+\lambda & -\lambda & -m \end{pmatrix} Y_{j,\, m+\lambda}, \qquad (7.16) \\
(-1)^{j+m+\lambda+1}(\boldsymbol{Y}^{(\text{縦})}_{jm})_\lambda &= \sqrt{j+1}\begin{pmatrix} j+1 & 1 & j \\ m+\lambda & -\lambda & -m \end{pmatrix} Y_{j+1,\, m+\lambda} \\
&\quad + \sqrt{j}\begin{pmatrix} j-1 & 1 & j \\ m+\lambda & -\lambda & -m \end{pmatrix} Y_{j-1,\, m+\lambda}.
\end{aligned}$$

この公式はつぎのようにして導かれる．三つの球ベクトルはいずれも $\boldsymbol{Y}_{jm} = \boldsymbol{a}Y_{jm}$ の形をしている．ここで $\boldsymbol{a}$ は (7.3) のベクトルのなかの一つである．したがって

$$\boldsymbol{Y}_{jm} = \sum_{lm'} \langle lm'|\boldsymbol{a}|jm\rangle Y_{lm'}$$

である．そして問題は，軌道角運動量の固有関数に対するベクトル $\boldsymbol{a}$ の行列要素を求めることに帰する．III (107.6) によると

$$\langle lm'|a_\lambda|jm\rangle = i(-1)^{j_{\max}-m'}\begin{pmatrix} l & 1 & j \\ -m' & \lambda & m \end{pmatrix}\langle l\|a\|j\rangle$$

である．ここで $j_{\max}$ は，l と j のなかの大きい方である．したがって，0と異なる既約行列要素 $\langle l\|a\|j\rangle$ がわかれば十分である．これらに対しては公式がある．

$$\langle l-1\|n\|l\rangle=\langle l\|n\|l-1\rangle^*=i\sqrt{l},$$
$$\langle l\|\nabla n\|l-1\rangle=i(l-1)\sqrt{l},$$
$$\langle l-1\|\nabla n\|l\rangle=i(l+1)\sqrt{l}, \tag{7.17}$$
$$\langle l\|[n\nabla n]\|l\rangle=i\sqrt{l(l+1)(2l+1)}\ .$$

§ 8.　光子の偏り

偏りのベクトル e は光子に対し波動関数の≪スピン部分≫の役割を果たしている（これには，光子のスピンの概念に関して§6で述べられた注意書きがついている）.

光子の偏りが起こる種々の場合は，古典電磁波の偏りの可能な形とすこしも異なっていない（II，§48参照）.

任意の偏り e は，なんらかの方法で互いに直交するように選ばれた二つの偏り $e^{(1)}$ と $e^{(2)}$（$e^{(1)}e^{(2)*}=0$）の合成した形で表わすことができる．展開

$$e=e_1e^{(1)}+e_2e^{(2)} \tag{8.1}$$

で，係数 e_1 と e_2 の絶対値の2乗は光子が偏り $e^{(1)}$ あるいは $e^{(2)}$ を持つ確率を決定する.

この $e^{(1)}$ と $e^{(2)}$ として，二つの互いに垂直な直線偏光をとってもよい．また任意の偏光は二つの逆回転の円偏光に分解することもできる．右および左回転の円偏光をそれぞれ $e^{(+1)}$ および $e^{(-1)}$ と書こう．ζ 軸が光子の方向 $n=k/\omega$ に沿った ξ,η,ζ 軸で

$$e^{(+1)}=-\frac{i}{\sqrt{2}}(e^{(\xi)}+ie^{(\eta)}),\quad e^{(-1)}=\frac{i}{\sqrt{2}}(e^{(\xi)}-ie^{(\eta)}) \tag{8.2}$$

である.

（運動量が与えられた）光子が二つの異なった偏りを持ちうることは，言いかえれば，運動量の固有値が2重に縮退していることを意味している．これは光子の質量が0であることと深く結びついている.

質量が0でなく自由に運動する粒子には，つねに静止系が存在する．明らかに，このような系では粒子の固有の対称性自身が姿を現わす．この際，中心のまわりのすべての可能な回転に対する（すなわち，すべての球対称の群に対する）対称性が考察されなければならない．このような群に対する粒子の対称の特性はそのスピン s に現われる．これは縮退度（互いに異なる波動関数の数 $2s+1$）を定義する．特に，（3成分）ベクトル波動関数はスピン1に対応する.

質量が0の粒子に対しては静止系は存在しない．すなわちどの系でも粒子は光速度で運

動している．このような粒子に対してはいつも空間の特別な方向，すなわち運動量ベクトル $\boldsymbol{k}$ の方向（ζ 軸）が存在する．このような場合，全3次元回転群に関する対称性は存在せず，選ばれた軸のまわりの軸対称だけを問題にすることができる．

軸対称の場合には粒子の**螺線度**，すなわち ζ 軸への角運動量の投影が保存され，これを λ と置く[1]．ζ 軸を通る平面での鏡映に対する対称性も要求すれば，λ が異なる状態は互いに縮退している．したがって $\lambda \neq 0$ のときには2重縮退である[2]．運動量一定の光子の状態はこのような2重縮退状態の一つに対応する．それは $\xi\eta$ 平面のベクトル $\boldsymbol{e}$ で表わされる≪スピン≫波動関数として書き表わされる．このベクトルの二つの成分は ζ 軸のまわりの回転，および ζ 軸を通る平面での鏡映によって互いに移りうる．

光子の偏りの種々の場合は，その螺線度の可能な値に一定の対応をしている．この対応は公式 III (58.3) にしたがって可能である．この式は波動関数ベクトルの成分と，それと同等な2階のスピノールの成分とを結びつけている[3]．投影 $\lambda = +1$ あるいは $\lambda = -1$ はベクトル $\boldsymbol{e}$ の0と異なる成分 $e_\xi - ie_\eta$ あるいは $e_\xi + ie_\eta$，すなわち $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}^{(+1)}$ あるいは $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}^{(-1)}$ だけに対応している．言いかえれば，$\lambda = +1$ および $\lambda = -1$ の値は光子の右および左円偏光に対応する（§16 では，スピンの投影の演算子の固有関数の直接の計算によってこの結果が求められる）．

このようにして，光子の角運動量のその運動方向への投影は二つの値（±1）しかとりえない．0の値は不可能である．

一定の運動量と偏りを持った光子の状態は（III, §14 で説明された意味で）純粋状態である．それは波動関数で記述された粒子（光子）の完全な量子力学的記述に対応している．また波動関数ではなく，ただ密度行列のみで行なうすこし不完全な記述に対応する，光子の≪混合≫状態も可能である．

偏りに関しては混合していて，一定の運動量 $\boldsymbol{k}$ に対応する光子の状態を考えよう．このような状態（これを**部分偏光**と呼ぶ）では≪座標の≫波動関数[4]は存在する．

光子の偏りの密度行列は，ベクトル $\boldsymbol{n}$ に垂直な平面内（$\xi\eta$ 平面；添字 α, β は二つの値

---

1) 空間の与えられた方向（z 軸）への角運動量への投影 m とは違っている．これについては前節で述べた．

2) 二原子分子の電子項はこのようにして分類されていることを思い出そう（III, §78）．

3) （ここで問題になっている）粒子の角運動量の投影の種々の値の確率振幅としての波動関数の成分は，スピノールの反変成分に対応している．

4) 非相対論的理論において電子に対して類似の行列が III, §59 で考察されている．

をとる）で2階のテンソル $\rho_{\alpha\beta}$ で表わされる．このテンソルはエルミートである．

$$\rho_{\alpha\beta}=\rho^*_{\beta\alpha}. \tag{8.3}$$

そして条件

$$\rho_{\alpha\alpha}\equiv\rho_{11}+\rho_{22}=1 \tag{8.4}$$

で規格化される．(8.3) から対角要素 ρ_{11} と ρ_{22} は実数で，(8.4) の条件により一方が決まれば，他方も決まる．成分 ρ_{12} は複素数で $\rho_{21}=\rho^*_{12}$ である．したがって全密度行列は実パラメータの項で特徴づけられる．

もしも偏りの密度行列が既知ならば，光子が任意の偏り $\boldsymbol{e}$ を持つ確率を見いだすことができる．その確率は，テンソル $\rho_{\alpha\beta}$ のベクトル $\boldsymbol{e}$ への《投影》，すなわち

$$\rho_{\alpha\beta}\,e^{\alpha*}e_\beta \tag{8.5}$$

により決定される．したがって，成分 ρ_{11} と ρ_{22} は ξ および η 軸方向の直線偏光の確率を表わす．ベクトル (8.2) への投影は二つの円偏光の確率を与える．

$$\frac{1}{2}[1\pm i\,(\rho_{12}-\rho_{21})]\,. \tag{8.6}$$

テンソル $\rho_{\alpha\beta}$ の性質は形式上からも性質上からも，古典理論で光の部分偏光を記述するテンソル $J_{\alpha\beta}$ の性質と一致している（II, §50参照）．ここでその性質のいくつかを思い起こそう．

一定の偏り $\boldsymbol{e}$ を持った純粋状態の場合に，テンソル $\rho_{\alpha\beta}$ はベクトル $\boldsymbol{e}$ の成分の積になってしまい

$$\rho_{\alpha\beta}=e_\alpha e^*_\beta. \tag{8.7}$$

ここでは，判別式 $|\rho_{\alpha\beta}|=0$ である．逆に偏らない光子の場合には，偏りのすべての方向は同等である．すなわち

$$\rho_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta} \tag{8.8}$$

である．ここでは $|\rho_{\alpha\beta}|=\dfrac{1}{4}$ である．

一般の部分偏光の場合には，ストークスの3個の実パラメータ[1] ξ_1,ξ_2,ξ_3 を使って書き表わせばよい．これによって密度行列は

1）ξ 軸の記号とパラメータの記号を混同しないこと．

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ \xi_1 + i\xi_2 & 1-\xi_3 \end{pmatrix} \tag{8.9}$$

の形に表わされる．これら3個のパラメータは -1 と $+1$ とのあいだのすべての値をとる．偏りのない状態では $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$ である．完全に偏った光子では $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1$ である．

パラメータ ξ_3 は，ξ あるいは η 軸方向の直線偏光を特徴づける．光子がこれらの軸の方向に直線偏光になる確率はそれぞれ $\frac{(1+\xi_3)}{2}$ または $\frac{(1-\xi_3)}{2}$ に等しい．$\xi_3 = +1$ あるいは -1 は，これらの方向の完全偏光に対応する．

パラメータ ξ_1 は ξ 軸と角度 $\varphi = \frac{\pi}{4}$ あるいは $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ の方向の直線偏光を特徴づける．光子がこれらの方向の直線偏光を持つ確率はそれぞれ $\frac{(1+\xi_1)}{2}$ あるいは $\frac{(1-\xi_1)}{2}$ に等しい．これらはテンソル $\rho_{\alpha\beta}$ を $\boldsymbol{e} = \frac{(1, \pm 1)}{\sqrt{2}}$ の方向に投影して確かめることができる．

最後に，パラメータ ξ_2 は円偏光の度合である．(8.6) によって，光子が右あるいは左円偏光になる確率は $\frac{(1+\xi_2)}{2}$ あるいは $\frac{(1-\xi_2)}{2}$ に等しい．二つの偏りは螺線度 $\lambda = \pm 1$ に対応するので，一般の場合に ξ_2 は光子の螺線度の平均値であることは明らかである．偏り $\boldsymbol{e}$ の純粋状態では

$$\xi_2 = i[\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^*]\boldsymbol{n} \tag{8.10}$$

であることに注目しよう．

ローレンツ変換に対し ξ_2，および $\sqrt{\xi_1^2 + \xi_3^2}$ は不変量であることを思い起こそう（II，§50 参照）．

また先にいって時間反転の操作に関するストークスのパラメータの性質の問題にぶつかるだろう．この変換に対してそれらが不変なことは容易にわかる．明らかにこの性質は偏りの状態の性質には依存しない．したがって，純粋状態の場合にそうであることを確かめれば十分である．量子力学では，時間反転は波動関数をその共役複素数に変えることに対応する（III，§18 参照）．平面偏光の波に対しては，これは置き換え[1]

$$\boldsymbol{k} \longrightarrow -\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{e} \longrightarrow -\boldsymbol{e}^* \tag{8.11}$$

---

1) 時間反転で電磁場のベクトル・ポテンシャルの符号が変わるが，$\boldsymbol{e}$ の符号の付加的な変化もそれと関係している．スカラー・ポテンシャルは符号を変えない．したがって，4-ベクトル e に対し，時間反転は変換

$$(e_0, \boldsymbol{e}) \longrightarrow (e_0^*, -\boldsymbol{e}^*). \tag{8.11 a}$$

となる．

を意味する．このような変換に対して密度行列の対称部分

$$\frac{1}{2}(e_\alpha e_\beta^* + e_\beta e_\alpha^*)$$

と，したがってパラメータ ξ_1 と ξ_3 は変わらない．パラメータ ξ_2 がこの変換に際して変わらないことは (8.10) からわかる．それはまた螺線度の平均値という ξ_2 の意味からもまた明らかである．実際には，螺線度は角運動量 $\boldsymbol{j}$ の $\boldsymbol{n}$ 方向への投影，すなわち $\boldsymbol{jn}$ である．時間反転はこれら二つのベクトルの符号を変える．

将来の計算では，4次元形式，すなわち4-テンソル $\rho_{\mu\nu}$ の形で書いた密度行列が必要になる．4-ベクトル e_μ で記述された偏った光子に対して，このテンソルは

$$\rho_{\mu\nu} = e_\mu e_\nu^* \tag{8.12}$$

のように定義するのが自然である．3次元横波ゲージでは $e = (0, \boldsymbol{e})$ であり，もしも空間軸の一つを $\boldsymbol{n}$ 方向に選べば，この4-テンソルの0でない成分は (8.7) と一致する．

偏りのない光子に対し，3次元横波ゲージでは

$$\rho_{ik} = \frac{1}{2}(\delta_{ik} - n_i n_k), \quad \rho_{0i} = \rho_{i0} = \rho_{00} = 0 \tag{8.13}$$

を成分に持つテンソル $\rho_{\mu\nu}$ が対応する（もしも軸の一つが $\boldsymbol{n}$ 方向と一致すれば，(8.8) にもどることになる）．しかしながら，このような3次元形式のテンソルの直接使用は不便である．しかし，われわれはゲージ変換を利用することができる．密度行列に対し，それは

$$\rho_{\mu\nu} \longrightarrow \rho_{\mu\nu} + \chi_\mu k_\nu + \chi_\nu k_\mu \tag{8.14}$$

の形になる．ここで χ_μ は任意関数である．

$$\chi_0 = -\frac{1}{4\omega}, \quad \chi_i = \frac{k_i}{4\boldsymbol{k}^2}$$

と置き，(8.13)の代りに簡単な4次元の式を得る．

$$\rho_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu}. \tag{8.15}$$

部分偏光の光子の密度行列の4次元表現は，あらかじめ2次元テンソル (8.9) を3次元の形に書き直しておけば，容易に得られる．

$$\rho_{ik} = \frac{1}{2}(e_i^{(1)} e_k^{(1)} + e_i^{(2)} e_k^{(2)}) + \frac{\xi_1}{2}(e_i^{(1)} e_k^{(2)} + e_i^{(2)} e_k^{(1)})$$
$$- \frac{i\xi_2}{2}(e_i^{(1)} e_k^{(2)} - e_i^{(2)} e_k^{(1)}) + \frac{\xi_3}{2}(e_i^{(1)} e_k^{(1)} - e_i^{(2)} e_k^{(2)}).$$

ここで $\boldsymbol{e}^{(1)}, \boldsymbol{e}^{(2)}$ は ξ および η 軸の基底の単位ベクトルである．これらの3-ベクトルを4元の空間類似の単位実ベクトル $e^{(1)}, e^{(2)}$ で置き換えることにより，求める一般化に到達できる．これらはお互どうし，および光子の4-運動量 k と直交する．つまり

$$e^{(1)2} = e^{(2)2} = -1,$$
$$e^{(1)}e^{(2)} = 0,$$
$$e^{(1)}k = e^{(2)}k = 0. \tag{8.16}$$

特別の系では $e^{(1)} = (0, \boldsymbol{e}^{(1)})$, $e^{(2)} = (0, \boldsymbol{e}^{(2)})$ である．かくして光子の4元密度行列は

$$\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(e_\mu^{(1)}e_\nu^{(1)} + e_\mu^{(2)}e_\nu^{(2)}) + \frac{\xi_1}{2}(e_\mu^{(1)}e_\nu^{(2)} + e_\mu^{(2)}e_\nu^{(1)})$$
$$-\frac{i\xi_2}{2}(e_\mu^{(1)}e_\nu^{(2)} - e_\mu^{(2)}e_\nu^{(1)}) + \frac{\xi_3}{2}(e_\mu^{(1)}e_\nu^{(1)} - e_\mu^{(2)}e_\nu^{(2)}). \tag{8.17}$$

実際に，4-ベクトル $e^{(1)}, e^{(2)}$ にどんな選択をするかは，考える問題の具体的条件に依存する．

条件 (8.16) は $e^{(1)}$ および $e^{(2)}$ の選択を一意的には決定しないことを考えに入れなければならない．もしもどれかの4-ベクトル e_μ がこれらの条件を満足したとすると，$e_\mu + \chi k_\mu$ の形の任意の4-ベクトルもまた（$k^2 = 0$ であるので）これを満足する．この非一意性は密度行列のゲージ非一意性と結びついている．

(8.17) の第1項は偏りのない状態である．したがって (8.15) から，$-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}$ と置き換えることができるだろう．このような置き換えもまた，あるゲージ変換と同値である．

二つの独立な4-ベクトルに分解された(8.17)の形の4-テンソルを使うとき，つぎのような形式的なやり方を適用すればよい．テンソル(8.17)を

$$\rho_{\mu\nu} = \sum_{a,b=1}^{2} \rho^{(ab)} e_\mu^{(a)} e_\nu^{(b)}$$

の形に書き，係数 $\rho^{(ab)}$ を2行2列の行列

$$\mathsf{\rho} = \begin{pmatrix} \rho^{(11)} & \rho^{(12)} \\ \rho^{(21)} & \rho^{(22)} \end{pmatrix}$$

で表わす．すべてのエルミートの2行2列の行列と同様に，これも四つの独立な2行2列の行列，すなわちパウリ行列 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ および単位行列1に分解することができる．このような分解は

$$\mathsf{\rho} = \frac{1}{2}(1 + \boldsymbol{\xi\sigma}), \quad \boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \tag{8.18}$$

の形になる．これは(8.17)と直接にくらべ，よく知られたパウリ行列の式(18.5)を使って容易に確かめられる（三つの量ξ_1, ξ_2, ξ_3を≪ベクトル≫$\boldsymbol{\xi}$にまとめるのは書くのに便利なための形式的意味しかない）．

問　題

光子の密度行列を，座標≪軸≫が球面基底になるような表示で書き表わせ．

解　新しい軸$(\alpha, \beta=\pm1)$でのテンソル成分$\rho'_{\alpha\beta}$は，テンソル(8.9)を基底(8.2)に投影して求められる．

$$\rho'_{11}=\rho_{\alpha\beta}e_{\alpha}^{(+1)*}e_{\beta}^{(+1)}, \quad \rho'_{1-1}=\rho_{\alpha\beta}e_{\alpha}^{(+1)*}e_{\beta}^{(-1)}, \cdots\cdots$$

$$\rho'=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\xi_2 & -\xi_3+i\xi_1 \\ -\xi_3-i\xi_1 & 1-\xi_2 \end{pmatrix}.$$

§9.　2光子系

§6で行なわれたのと同様の考察から，2光子系のさらに複雑な場合に，可能な状態数を数えることができる(Л. Д. Ландау, 1948).

重心系で光子を考えよう．光子の運動量は$\boldsymbol{k}_1=-\boldsymbol{k}_2\equiv\boldsymbol{k}$[1]である．（運動量表示の）2光子系の波動関数は，両方の光子のベクトル波動関数の成分から双一次形式で作った，2階の3次元テンソル$A_{ik}(\boldsymbol{n})$の形に表わすことができる．これらのテンソルの添字はどれも光子の一つに対応している（$\boldsymbol{n}$は$\boldsymbol{k}$方向の単位ベクトルである）．光子がいずれも横波であることは，テンソルA_{ik}とベクトル$\boldsymbol{n}$とが直交することに現われている．つまり

$$A_{il}n_l=0, \quad A_{lk}n_l=0. \tag{9.1}$$

光子の交換はA_{ik}の添字の交換と，$\boldsymbol{n}$の符号を変えることを意味する．光子はボーズ統計にしたがうので

$$A_{ik}(-\boldsymbol{n})=A_{ki}(\boldsymbol{n}). \tag{9.2}$$

一般には，テンソルA_{ik}はその添字について対称ではない．これを対称部分(s_{ik})と反対称部分(a_{ik})に分解する．$A_{ik}=s_{ik}+a_{ik}$．明らかに，これらの部分がいずれも関係式

1)　互いに平行に同じ向きで動いている2光子の場合だけを除けば，このような系はいつも存在する．このような光子の全運動量$\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2$と全エネルギー$\omega_1+\omega_2$とは，一つの光子の場合と同じ関係式で互いに結ばれている．したがって，$\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2=0$のような系は存在しない．

(9.2)(および直交性(9.1))を満足しなければならない．そこで

$$s_{ik}(-\boldsymbol{n}) = s_{ik}(\boldsymbol{n}), \tag{9.3}$$

$$a_{ik}(-\boldsymbol{n}) = -a_{ik}(\boldsymbol{n}). \tag{9.4}$$

座標系の反転それ自身は2階のテンソルの成分の符号を変えない．しかし$\boldsymbol{n}$の符号を変える．したがって(9.3)から，つぎのことが明らかになる．波動関数s_{ik}は反転に対して対称である．すなわち光子系の偶状態に対応する．また波動関数a_{ik}は奇状態に対応する．

2階の反対称テンソルは，適当な軸ベクトル$\boldsymbol{a}$と同等(対偶)であり，その成分は$a_i = \frac{1}{2}e_{ikl}a_{kl}$にしたがって，テンソルの成分により表わされる．ここでe_{ikl}は反対称単位テンソルである(II, §6参照)．テンソルa_{kl}とベクトル$\boldsymbol{n}$の直交性は，ベクトル$\boldsymbol{a}$と$\boldsymbol{n}$が平行であることを意味する[1]．したがって$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{n}\varphi(\boldsymbol{n})$と書ける．ここで$\varphi$はスカラーである．(9.4)から$\boldsymbol{a}(-\boldsymbol{n}) = -\boldsymbol{a}(\boldsymbol{n})$でなければならない．したがって

$$\varphi(-\boldsymbol{n}) = \varphi(\boldsymbol{n}).$$

この等式は，φが偶数次L(0次を含む)のみの球関数の1次結合から作ることができることを意味している．

われわれは，反対称テンソルa_{ik}が，その(回転に対する)変換性については，スカラーと同等であることを見た(21頁の脚注1)参照)．これを≪スピン≫0とくらべると，系の角運動量が$J = L$であることがわかる．こうして，テンソルa_{ik}は偶数の角運動量Jを持つ，光子系の奇状態に対応する．

対称テンソルs_{ik}に移ろう．これは$\boldsymbol{n}$の符号の変化に対して偶であるから，光子系の偶状態に対応している．ここから，s_{ik}のすべての成分は偶数次L($L = 0$を含む)の球関数によって表わされる．任意の2階の対称テンソルはよく知られているように，スカラー(s_{ii})と，0に等しい跡を持つ($s'_{ii} = 0$)対称テンソル(s'_{ik})とになる．

スカラーs_{ii}は≪スピン≫0に対応させられる．したがって対応する状態の角運動量は$J = L$，すなわち偶である．テンソルs'_{ik}は≪スピン≫2に対応する(III, §58参照)．角運動量の合成則にしたがって，この≪スピン≫と偶の≪軌道角運動量≫Lとを合成して，偶の$J \neq 0$に対しては可能な三つの($L = J \pm 2$, Jを持った)状態を得，奇の$J \neq 0$に対しては二つの($L = J \pm 1$を持った)状態を見いだす．例外は一つの状態($L = 2$)の$J = 0$と，一つの状態($L = 2$)の$J = 1$とである．

---

1) $a_{ik} = e_{ikl}a_l$および直交条件から$a_{ik}n_k = e_{ikl}a_l n_k = [\boldsymbol{na}]_i = 0$.

しかしながら，これらの勘定ではテンソル s_{ik} とベクトル $\boldsymbol{n}$ の直交性は考慮されていない．したがって，得られた状態数から，さらにベクトル $\boldsymbol{n}$ に≪平行な≫2階の対称テンソルに対応する状態数を差し引かねばならぬ．このようなテンソル(これを s''_{ik} と呼ぼう)は

$$s''_{ik} = n_i b_k + n_k b_i$$

の形に表わされる．ここで $\boldsymbol{b}$ は一つのベクトルである．(9.3) にしたがって，このベクトルは条件 $\boldsymbol{b}(-\boldsymbol{n}) = -\boldsymbol{b}(\boldsymbol{n})$ を満足する必要がある．このようにして，余分の状態に責任のあるテンソル s''_{ik} は奇ベクトルと同等である．したがって，このベクトルは奇数次の L だけの球関数によって表わすことができる．またベクトルが≪スピン≫1に対応することに気がつけば，偶の $J \neq 0$ のいずれに対しても ($L = J \pm 1$ を持つ) 二つの状態があり，奇の J のいずれに対しても ($L = J$ の) 一つの状態がある．特別の場合は $J = 0$ で ($L = 1$ の) 一つの状態だけが存在することがわかる．

得られた結果をまとめて，つぎの表を得る．それは (運動量の和が0に等しい) 2光子系の，全角運動量のいろいろの値に対する可能な偶および奇状態の数を示している．

J	偶	奇
0	1	1
1	—	—
$2k$	2	1
$2k+1$	1	—

(9.5)

(k は0と異なる正の整数である)．J が奇のとき奇状態は存在しないで，また $J = 1$ の値が一般に不可能なことがわかる．

2光子系の波動関数は，その偏りの相関を決定する．2個の光子が同時に定まった偏り $\boldsymbol{e}_1$ および $\boldsymbol{e}_2$ を持つ確率は

$$A_{ik} e^*_{1i} e^*_{2k}$$

に比例する．言いかえれば，もしも一つの光子の偏り $\boldsymbol{e}_1$ が与えられると，第二の偏り $\boldsymbol{e}_2$ は

$$e_{2k} \backsim A_{ik} e^*_{1i} \tag{9.6}$$

に比例する．

系の奇状態で A_{ik} は反対称テンソル a_{ik} と一致する．このとき

$$\boldsymbol{e}_2 \boldsymbol{e}^*_1 \backsim a_{ik} e^*_{1i} e^*_{1k} = 0 .$$

すなわち，2光子の偏りは互いに直交する．直線偏光の場合には，これはその方向の直交性を意味し，円偏光の場合にはその回転方向が逆であることを意味している．

$J=0$ を持つ偶状態は対称テンソルで記述され，スカラー

$$s_{ik} = \text{const}\cdot(\delta_{ik} - n_i n_k)$$

へと導かれる．したがって (9.6) から $e_1 = e_2^*$ を得る．直線偏光の場合，これはその方向が平行なことを意味し，円偏光の場合には，その回転方向が逆向きであることを意味している．この事情は前から明らかである．$J=0$ のときにはすべての場合，光子の角運動量の同じ $\boldsymbol{k}$ 方向への投影が 0 に等しくなければならない（逆向きの $\boldsymbol{k}_1$ および $\boldsymbol{k}_2$ の方向への投影，すなわち螺線度はこのとき同じである）．

第2章 ボ ソ ン

§10. スピン0の粒子の波動方程式

第1章では，古典的極限の場の知られた性質から出発し，普通の量子力学の表わし方の上に立った，自由電磁場の量子論的記述法をどうすれば作れるかが示された．このようにして得られた場を，光子系として記述する様式は，量子論における粒子の相対論的記述にも転用できるいくつかの特性を持っている．

電磁場は無限個の自由度を持つ系として表わされる．それに対して（光子の）粒子数の保存則は存在しない．一連の可能な状態はすべて任意の粒子数を持つ状態である[1]．しかし一般的には，相対論的理論ではどの粒子系も，またこのような性質を持つはずである．非相対論的理論での粒子数の保存は質量保存則と結びついていた．粒子の質量（静止質量）の和はその相互作用の際に変わらない．たとえば，電子系での質量の和の保存はまたその数の和を意味している．相対論的力学では質量保存則は存在しない．ただ系の全エネルギー（そのなかには粒子の静止エネルギーも含まれる）だけが保存される必要があり，粒子数はもはや保存しなくてもよい．したがって，粒子の相対論的理論はすべて無限個の自由度を持つ理論でなければならない．言いかえれば，このような粒子の理論は場の理論の特色を持っている．

粒子数を変数とした系の記述のための適当な数学的方法は第二量子化の方法である（III，§64，§65）．電磁場の量子論的記述において，第二量子化の演算子のなかに4-ポテンシャル $\mathbf{A}$ が現われる．それは個々の粒子（光子）の（座標の）波動関数，およびその生成と消滅演算子によって表わされる．粒子系の記述においても，量子化された波動関数の演算子 ψ が類似の役割を果たす．これを作るためには，まず第一に一つの自由粒子の波動関数の形と，それが満足する方程式を知る必要がある．

1）もちろん，実際には，いろいろな相互作用の過程の結果としてのみ光子の個数は変化する．

自由粒子の場の概念の，補助的な性質も強調する必要がある．現実の粒子は相互作用をする．そして理論の課題はその相互作用を研究することである．しかしすべての相互作用は衝突に帰し，その前後で系は自由粒子の集まりとして考えられる．§1 で，これが唯一の測定しうる対象であることを強調してきた．したがって，われわれは自由粒子の場を，始めと終りの状態の記述法として利用しよう．

われわれはスピン0の場合の自由粒子の相対論的記述にとりかかろう．この場合の数学的な簡単さは，この方法の基礎の考えや特質を明らかにするのに，非常に役立つ．

（スピンのない）自由粒子の状態は，その運動量 $\boldsymbol{p}$ だけを考えることによって完全に定められる．このとき粒子のエネルギー ε[1] は $\varepsilon^2 = \boldsymbol{p}^2 + m^2$（ここで m は粒子の質量である）によって，あるいは4次元形式で

$$p^2 = m^2 \tag{10.1}$$

によって定義される．

よく知られているように，運動量とエネルギーの保存則は時空間の一様性，すなわち4-座標系の平行移動に対する対称性と結びついている．量子論的記述では，この対称性の要求はつぎのことを意味する．すなわち，定まった4-運動量を持つ粒子の波動関数は，4-座標の上記の変換に対し（絶対値1を持った）位相因子が掛けられるだけである．4-座標に線形の指数を持つ指数関数だけが，この要求を満足する．言いかえると，一定の4-運動量 $p^\mu = (\varepsilon, \boldsymbol{p})$ を持つ自由粒子の波動関数は平面波である．つまり

$$\mathrm{const}\cdot e^{-ipx}, \quad px = \varepsilon t - \boldsymbol{p}\boldsymbol{r} \tag{10.2}$$

（相対論的理論では，指数の符号の選択自身も制限され，非相対論の場合に対応するように選ばれる）．

波動方程式は，条件（10.1）を満足する任意の4-ベクトル p に対して，その正確な解が(10.2)になるようなものでなければならない．それは重ね合わせの原理の式のように線形でなければならない．すなわち，関数(10.2)の任意の1次結合もまた粒子の可能な状態を記述する．したがって，また解でなければならない．最後に，可能な限り低い次数のものでなければならない．すなわち，高次のものは解がないかもしれない．

スピンは静止系での粒子の角運動量である．もしも粒子のスピンが s ならば，その波動関数は，静止系で $2s$-階の3次元スピノールになる．任意の系での粒子の記述には，波動

1) われわれは個々の粒子のエネルギーを ε と書き，粒子系のエネルギー E と区別しよう．

関数は4次元の量の形で表わされる必要がある.

スピン0の粒子は静止系で3次元スカラーで記述される. しかしながら, このようなスカラーはいろいろな4次元的≪起源≫を持ちうるものである. すなわち, それは4次元スカラー ψ であってもよい, また4-ベクトル ψ_μ の第4 (時間類似の) 成分であってもよい. このとき静止系では, 成分 ψ_0[1] だけが0と異なる.

自由粒子に対して波動方程式を構成しうる唯一の演算子は, 4-運動量演算子 p である. その成分は座標および時間の微分演算子である.

$$\mathrm{p}^\mu = i\partial^\mu = \left(i\frac{\partial}{\partial t}, -i\nabla\right). \tag{10.3}$$

波動方程式は, 演算子 p を使ってできた, 量 ψ と ψ_μ のあいだの微分関係でなければならない. もちろん, この関係は相対論的不変の関係式でなければならない. このようにして

$$m\psi_\mu = \mathrm{p}_\mu\psi, \quad \mathrm{p}^\mu\psi_\mu = m\psi \tag{10.4}$$

ができる. ここで m は粒子[2] を特徴づける大きさの定数である.

第一の方程式から ψ_μ を第二の方程式に代入して

$$(\mathrm{p}^2-m^2)\psi = 0 \tag{10.5}$$

を得る (O. Klein, B. A. Фок, 1926). 展開するとこの方程式は

$$-\partial_\mu\partial^\mu\psi \equiv \left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\Delta\right)\psi = m^2\psi \tag{10.6}$$

の形になる. このなかに平面波 (10.2) の形の ψ を代入すると $p^2 = m^2$ を得る. ここから m が粒子の質量であることがわかる. 結局, 方程式 (10.5) の形はつぎのことからもすでにわかっていた. それは p^2 は p を使って作ることのできる唯一のスカラー演算子であるからである (このために, 任意のスピンを持つ粒子の波動関数の各成分がこのような方程式を満足する. このことをわれわれは将来何回も確かめるだろう).

このようにして, スピン0の粒子は本来2次方程式 (10.5) にしたがう唯一の (4次元の) スカラー ψ により記述される. 1次方程式 (10.4) では ψ および ψ_μ の全体が波動関

---

1) または, 同様にさらに高次の 4-テンソルの時間成分でもよい. この場合はさらに次数の高い方程式に到達するだろう.

2) 定数 m は ψ_μ と ψ とが同じ次元を持つように (10.4) に導入された. この二つの方程式に異なる定数 m_1 および m_2 を導入することは意味がない. なぜならば, ψ あるいは ψ_μ の定義を変えることによって, つねに同じにできるからである.

数の役割を果たし，そこでは4-ベクトル ψ_μ はスカラー ψ の4-勾配になっている．静止系では粒子の波動関数は（空間）座標には依存しない．したがって，4-ベクトル ψ_μ の空間成分は0になる．

さらに第二量子化を遂行するためには，エネルギーおよび運動量を，その空間的密度を表わすような，（ψ と ψ^* の）ある双一次結合の空間積分の形で表わしたほうが便利である．言いかえれば，方程式 (10.5) に対応するエネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ を見いだす必要がある．このテンソルの助けを借りてエネルギーおよび運動量の保存則は，方程式

$$\partial_\mu T^\mu_\nu = 0 \tag{10.7}$$

で表わされる．

場の理論の一般則（II，§32参照）にしたがって，方程式 (10.5) を導くような変分原理を書くことにしよう．このような原理は4-スカラー L，すなわち場のラグランジュ関数の密度[1]を使った≪作用積分≫

$$S = \int L\, d^4x \tag{10.8}$$

の極小の要求にまとめられるはずである．スカラー ψ（と演算子 ∂^μ）を使って

$$L = \partial_\mu\psi^* \cdot \partial^\mu\psi - m^2\psi^*\psi \tag{10.9}$$

の形に表わされた，実の双1次スカラー式を作ることができる．ここで m は大きさの定数である．ψ と ψ^* を場を記述する独立変数とすると（場の≪一般化された座標≫は q である），ラグランジュの方程式

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial L}{\partial q_{,\mu}} = \frac{\partial L}{\partial q} \tag{10.10}$$

$(q_{,\mu} \equiv \partial_\mu q)$ は，実際には，ψ と ψ^* に対する方程式 (10.5) と一致する．ここで m は粒子の質量である．また式 (10.9) は，時間微分の2乗 $|\partial\psi/\partial t|^2$ が L のなかにプラス符号で入るような，一般的記法で書かれていることに着目しよう．すなわち，この逆の場合には作用は極小になりえない（II，§27参照）．L のなかの共通の因子の選択は制限される（ψ の規格化定数にだけ反映している．下記参照）．

---

1) これに対する第二量子化をした演算子Lは，場のラグランジアンと呼ばれる．述語を簡単にするための便利さとも関連して，われわれは≪量子化された≫そしてまた≪量子化されない≫ラグランジュ関数密度に対して，この述語を使うことにしよう．

ここで，エネルギー運動量テンソルは，公式

$$T_{\mu}^{\nu} = \sum q_{,\mu}\frac{\partial L}{\partial q_{,\nu}} - L\delta_{\mu}^{\nu} \tag{10.11}$$

で計算される（和は q のすべてについて行なう）．(10.9) を代入して

$$T_{\mu\nu} = \partial_{\mu}\psi^{*}\cdot\partial_{\nu}\psi + \partial_{\nu}\psi^{*}\cdot\partial_{\mu}\psi - Lg_{\mu\nu} \tag{10.12}$$

を得る（したがって，これらの量は実であり，L が実になることを保証する）．特に

$$T_{00} = 2\frac{\partial\psi^{*}}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial t} - L = \frac{\partial\psi^{*}}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial t} + \nabla\psi^{*}\cdot\nabla\psi + m^{2}\psi^{*}\psi, \tag{10.13}$$

$$T_{i0} = \frac{\partial\psi^{*}}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial x^{i}} + \frac{\partial\psi^{*}}{\partial x^{i}}\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{10.14}$$

である．4-運動量は積分

$$P_{\mu} = \int T_{\mu 0}\, d^{3}x \tag{10.15}$$

で与えられ，T_{00} と T_{0i} はエネルギーおよび運動量密度の役割を果たす．T_{00} という量が本質的に正の量であることにも注意しよう．

公式 (10.13) は波動関数の規格化に使うことができる．≪体積 $V=1$ に粒子1個≫ になるように規格化された波動関数は

$$\psi_{p} = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}e^{-ipx} \tag{10.16}$$

の形に書かれる．実際に，この関数に対しては $T_{00}=\varepsilon$ であり，体積 $V=1$ のなかの全エネルギーは，1個の粒子のエネルギーと一致するようになっている．

角運動量の保存は空間の等方性と結びついているが，これはまた空間積分の形でも表わすことができる．しかし，このような角運動量の表示は将来とも不必要である．

最後に，時空間の対称性と直接結びついた保存則のほかに，方程式 (10.4) にはもう一つの保存則がある．事実，容易にわかるように，(10.4)（および ψ^{*} に対する方程式）を使って

$$\partial_{\mu}j^{\mu} = 0 \tag{10.17}$$

が成り立つ．ここで

$$j_{\mu} = m(\psi^{*}\psi_{\mu} + \psi_{\mu}^{*}\psi) = i[\psi^{*}\partial_{\mu}\psi - (\partial_{\mu}\psi^{*})\psi] \tag{10.18}$$

である．これから j^{μ} は4-ベクトルの流れの密度の役割を演じることがわかる．このとき

(10.17) は連続方程式で

$$Q = \int j_0 \, d^3x \qquad (10.19)$$

という量の保存則を表わしている．ここで

$$j_0 = j^0 = i\left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi^*}{\partial t}\psi\right). \qquad (10.20)$$

j_0 が正に定まった量でないことに注目しよう．すでにこの事情は，一般に，もちろん局所化した粒子の空間の存在確率と解釈してはいけないことを示している．方程式 (10.17) で表わされた保存則の意味は次節で明らかになる．

§11. 粒子と反粒子

第二量子化を実行する一般則にしたがって，自由粒子の可能な状態の完全な組の固有関数，たとえば平面波 ψ_p による，任意の波動関数の展開を考えよう．

$$\psi = \sum a_p \psi_p, \quad \psi^* = \sum_p a_p^* \psi_p^*.$$

つぎにこの係数 a_p, a_p^* は，対応する状態[1]にある粒子の消滅および生成演算子 a_p, a_p^+ と考える必要がある．

しかしながら，この際われわれはすぐにつぎの（非相対論的理論とくらべて）新しい原理的な事態につき当たることになる．方程式 (10.5) の解である平面波では，エネルギー ε は（運動量 $\boldsymbol{p}$ が与えられたとき）条件 $\varepsilon^2 = \boldsymbol{p}^2 + m^2$ だけを満足する．すなわち二つの値 $\pm\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$ を持つことができる．しかしながら，ε の正の値だけが自由粒子のエネルギーの物理的意味を持ちうる．しかし，負の値を簡単に落とすことは許されない．すなわち，波動方程式の一般解は，その独立した正確な解のすべての重ね合わせになっている．この事情は，第二量子化にあたって ψ および ψ^* の展開係数の解釈のなんらかの変更が不可避なことに示される．

この展開を

$$\psi = \sum_p \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} a_p^{(+)} e^{i(\boldsymbol{pr} - \varepsilon t)} + \sum_p \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} a_p^{(-)} e^{i(\boldsymbol{pr} + \varepsilon t)} \qquad (11.1)$$

の形に書こう．ここで第一の和は正の，第二の和は負の《振動数》を持ち，(10.16)にし

---

1) われわれは将来《負の振動数》を持つ関数を ψ_{-p} と書くことを考慮に入れて，ψ-関数に 4-運動量 p をつける．演算子 $\mathrm{a}_p, \mathrm{a}_p^+$ には，現実の粒子の状態を完全に定義する 3 次元運動量 $\boldsymbol{p}$ がつけられる．

たがって規格化された平面波からできている．ε はつねに正の量を表わす．すなわち $\varepsilon = +\sqrt{p^2+m^2}$ である．第二量子化に際し，第一の和の係数 $a_p^{(+)}$ は普通のように粒子の消滅演算子 a_p に変えられる．第二の和では，さらに行列要素を作る際に，その各項の時間依存性は粒子の消滅でなく生成演算子に対応していることがわかる．すなわち，因子 $e^{i\varepsilon t} = (e^{-i\varepsilon t})^*$ は最終状態でエネルギー ε を持った粒子が増したことに対応している（§2 の末尾参照）．これに対応して係数 $a_p^{(-)}$ を何か他の粒子の生成の演算子 b_{-p}^+ に取り替える．また (11.1) の第二の和で，和の変数 p を $-p$ に変えて（こうすると指数因子が $e^{-i(pr-\varepsilon t)}$ の形になる）

$$\phi = \sum_p \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}(\mathrm{a}_p e^{-ipx} + \mathrm{b}_p^+ e^{ipx}), \quad \phi^+ = \sum_p \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}(\mathrm{a}_p^+ e^{ipx} + \mathrm{b}_p e^{-ipx}) \qquad (11.2)$$

の形の ϕ-演算子を得る．

こうして，演算子 $\mathrm{a}_p, \mathrm{b}_p$ はすべて《正規の》時間依存性の関数 ($\sim e^{-i\varepsilon t}$) に掛かっていて，演算子 $\mathrm{a}_p^+, \mathrm{b}_p^+$ はそれに複素共役な関数に掛かっていることが示された．これは一般則にしたがって，演算子 $\mathrm{a}_p, \mathrm{b}_p$ は運動量 p とエネルギー ε の粒子の消滅演算子として，$\mathrm{a}_p^+, \mathrm{b}_p^+$ は生成演算子として議論する可能性を与えるものである．

われわれは同時に対等な形で現われる 2 種の粒子の表現に到達する．これらを**粒子**および**反粒子**と言う（この名前の意味はのちほど明らかになる）．このうちの一方は第二量子化の方法で演算子 $\mathrm{a}_p, \mathrm{a}_p^+$ に対応し，他方は $\mathrm{b}_p, \mathrm{b}_p^+$ に対応する．同じ ϕ-演算子のなかにその演算子が現れている二つの型の粒子は，まったく同じ質量を持っている．

相対論的不変性の直接の要求の観点から，これらの結果の生因に達することもできる．

ローレンツ変換は数学的な意味では，4 次元座標系での時間軸を変えるような回転である（時間軸には触れない純粋な空間の回転とともに，**ローレンツ群**[1] と呼ばれる変換群を形成している）．すべてのこれらの変換は，時間軸 t を，光円錐の対応する錐の境界から外に出さないという共通の性質を持っている．そしてこれは信号の伝播速度の限界があるという物理的原理に対応している．

しかし純数学的関係からは，四つの座標軸すべての符号を同時に変えること（**4 次元反転**）もまた回転であり，この変換の判別式は $+1$ に等しい．この変換で時間軸は光円錐の

---

1) （空間的）3 次元回転の全部は，それ自身群を作り，これはローレンツ群中の部分群となっている．ローレンツ変換の全部は，自身では群を作らない．ローレンツ変換を続けると純空間回転へと達するからである．

一方の錐から他の錐へ移される．このような事情は，このような変換が（基準系の変換として）物理的に存在しえないことを意味しているが，数学的な関係から，その違いはつぎの点だけになる．すなわち(計量が擬ユークリッド的であるために)，このような回転は座標の複雑な変換を伴わないように行なうことはできない．

4次元不変性に関して言えば，この違いは本質的でないはずであることが当然考えられる．そのときローレンツ変換に対して不変なすべての式は，4-反転に対して不変になるはずである．スカラーの ψ-演算子に適用するとき，この要求の正確な定式化は §13 で与えられる．そこでまず，すべての場合に ψ-演算子のなかに，指数の ε の前に両方の符号を持つ項が同時に現われることが不可避である，と結論されることを強調しよう．なぜかというと，$t\to -t$ の置き換えは同時にその符号も変えるからである．

(11.2) の式にもどろう．そして演算子 a_p, a_p^+（および b_p, b_p^+）の交換関係を作ろう．光子の場合には，振動子との類似から出発して（演算子 c_p, c_p^+ に対して）これが行なわれた．すなわち，本質的には古典的極限の電磁場の性質から出発した．今はこのような類似はない．演算子の（ボーズあるいはフェルミの）交換則を作るためにわれわれは，これらの演算子から作ったハミルトニアンの形だけに頼ることができる．

これは積分 $\int T_{00}d^3x$ [1] のなかの ϕ と ϕ^* の代りに，ψ および ψ^+ を置き換えることにより得られる (III, §64 参照)．かくして

$$\mathrm{H}=\sum_p \varepsilon\,(a_p^+a_p+b_p b_p^+)\,. \tag{11.3}$$

このハミルトニアンの固有値に対する合理的な結果は，演算子がボーズのつぎの交換則を満足するときだけであることが容易にわかる．

$$\{a_p, a_p^+\}_- = \{b_p, b_p^+\}_- = 1 \tag{11.4}$$

（ほかのすべての演算子の対は交換する．特に粒子のすべての演算子 a_p, a_p^+ は反粒子のすべての演算子 b_p, b_p^+ と交換する）．実際に，この場合には

$$\mathrm{H}=\sum_p \varepsilon\,(a_p^+a_p+b_p^+b_p+1)$$

になる．積 $a_p^+a_p$ および $b_p^+b_p$ の固有値は正の整数 N_p および $\overline{N_p}$ で，粒子および反粒子

1)　この際，非相対論的理論では，共役演算子 ψ^+ を ψ の左に書くものと考えられている．ここでは ψ と ψ^+ の交換は同等の演算子 a_p と b_p の交換になるだけであろうから，その順序はどちらでもよい．しかしながら，いずれかの順序を選ぶと，いつも同じ規則にしたがうようにしなければならない．

の数である．無限大の付加定数 $\sum\varepsilon$（≪真空のエネルギー≫）は今度も簡単に落とすことができて

$$E=\sum_{p}\varepsilon\,(N_{p}+\overline{N}_{p}) \tag{11.5}$$

((3.1) 式とその脚注参照)．この式は本質的に正で，2種類の現実の粒子を表わしていることに対応している．同様にして系の全運動量に対して，次式を得る．

$$\boldsymbol{P}=\sum_{p}\boldsymbol{p}\,(N_{p}+\overline{N}_{p}). \tag{11.6}$$

もしも (11.4) の代りにフェルミの交換関係（可換でなく反可換）を適用すると

$$\mathrm{H}=\sum_{p}\varepsilon\,(\mathrm{a}_{p}^{+}\mathrm{a}_{p}-\mathrm{b}_{p}^{+}\mathrm{b}_{p}+1)$$

が得られるだろう．そして (11.5) の代りに物理的意味のない式 $\sum\varepsilon\,(N_{p}-\overline{N}_{p})$ を得る．これは正に定まってはいないで，自由粒子のエネルギーを表わすことはできない．

このようにしてスピン0の粒子はボソンである．

さらに，積分 Q (10.19)を考察しよう．j^{0} のなかで関数 ϕ と ϕ^{*} を演算子 $\boldsymbol{\phi}$ と $\boldsymbol{\phi}^{+}$ に換え，積分すると

$$\mathrm{Q}=\sum_{p}(\mathrm{a}_{p}^{+}\mathrm{a}_{p}-\mathrm{b}_{p}\mathrm{b}_{p}^{+})=\sum_{p}(\mathrm{a}_{p}^{+}\mathrm{a}_{p}-\mathrm{b}_{p}^{+}\mathrm{b}_{p}-1) \tag{11.7}$$

を得る．この演算子の固有値は（本質的でない付加定数 $\sum 1$ を差し引いて）

$$Q=\sum_{p}(N_{p}-\overline{N}_{p}), \tag{11.8}$$

となり，粒子と反粒子の数の差に等しい．

われわれが，その相互作用に触れないで自由粒子を考える限りでは，Qという量の保存則の意味は（全エネルギーや運動量の保存則 (11.5)，(11.6) のように)，もちろん，かなりの程度制限されたものである．事実，その和だけでなく N_{p}, $\overline{N}_{p}$ という数がどれも個々に保存するからである．相互作用の結果Qという量が保存するかどうかは，相互作用の性質に依存する．もし Q が保存すれば（すなわち，演算子 Q が相互作用のハミルトニアンと可換であれば)，この法則が粒子数の可能な変化をどう制限するかを，式 (11.8) が示すことになる．すなわち，ただ≪粒子＋反粒子≫の対としてのみ発生したり消滅したりすることになる．

もしも粒子が帯電していれば，その反粒子は反対の符号の電荷を持たねばならない．すなわち，これらが同じ電荷を持っていれば，この対が発生したり消滅したりすることは厳

密な自然の法則——全電荷の保存——と矛盾することになる．先へいって（§32），電荷が反対であることが（粒子と電磁場の相互作用のときに）どのようにして自動的に理論に入ってくるかを見るだろう．

量 Q はしばしば与えられた粒子場の**電荷**と呼ばれる．特に，荷電粒子に対し Q は系の（基本電荷 e を単位として測られた）全電荷を定義する．しかしながら，粒子も反粒子も電気的に中性でありうることを強調しておこう．

このようにして，エネルギーと運動量の相対論的依存性（方程式 $\varepsilon^2 = \boldsymbol{p}^2+m^2$ の根の2重性）が相対論的不変性の要求とともに，粒子に対する新しい別の原理——前述の相互関係にある異なった粒子の対（粒子－反粒子）の存在の可能性——を，どのように量子論に持ち込んだかがわかる．このすばらしい予言は1930年にディラックが(スピン1/2の粒子に対して）最初に行なった．そしてそれはまだ最初の反粒子——陽電子——が実際に発見される前であった．

§12. 真正中性粒子

ψ-関数 (11.1) の第二量子化を行なう際に，係数 $a_{\boldsymbol{p}}^{(+)}$ および $a_{\boldsymbol{p}}^{(-)}$ は異なった粒子に関する演算子とみなされた．しかしながら，これは必らずこうしなければならないということではない．すなわち，特別の場合には $\hat{\psi}$ に現われる消滅および生成演算子が（光子に対してそうであったように——(2.17) 参照），同一粒子に関するものであってもよい．この場合その演算子を $c_{\boldsymbol{p}}$ および $c_{\boldsymbol{p}}^{+}$ として，$\hat{\psi}$-演算子を

$$\hat{\psi} = \sum_{\boldsymbol{p}} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}(c_{\boldsymbol{p}}\, e^{-ipx}+c_{\boldsymbol{p}}^{+}\, e^{ipx}) \qquad (12.1)$$

の形に書こう．このような演算子で記述される場は同一粒子系に対応する．そしてこの同じ粒子を≪自分の反粒子と一致する≫ものと言うことができる．

演算子 (12.1) はエルミートである ($\hat{\psi}^{+} = \hat{\psi}$)．つまり，場が実であると言ってよい．このような場は演算子 $\hat{\psi}$ と $\hat{\psi}^{+}$ とが一致しない複素場にくらべて，半分の≪自由度≫しか持たないのは当然である．

これに関連して，実演算子 $\hat{\psi}$ で表わされる場のラグランジァンは ((10.9) にくらべて) 余分な因子 1/2 [1] を含まなければならない．つまり

---

1) 同様に，複素波動関数表示の光子のエネルギー密度(3.2)とくらべて，(実演算子 E と H とで表わした) 電磁場のエネルギー密度の演算子には，余分な因子 1/2 がつく．

$$\mathrm{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi \cdot \partial^\mu \phi - m^2\phi^2). \tag{12.2}$$

これに対応するエネルギー運動量テンソルは

$$\mathrm{T}_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \cdot \partial_\nu \phi - \mathrm{L}\, g_{\mu\nu} \tag{12.3}$$

である．したがってエネルギー密度の演算子は

$$\mathrm{T}_{00} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^2 - \mathrm{L} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^2 + (\nabla \phi)^2 + m^2\phi^2\right]. \tag{12.4}$$

である．(12.1) を積分 $\int \mathrm{T}_{00}\, d^3x$ に代入して，場のハミルトニアン

$$\mathrm{H} = \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{p}} \varepsilon\, (\mathrm{c}_{\boldsymbol{p}}^+ \mathrm{c}_{\boldsymbol{p}} + \mathrm{c}_{\boldsymbol{p}} \mathrm{c}_{\boldsymbol{p}}^+) \tag{12.5}$$

を得る．ここでふたたびボーズによる量子化

$$\{\mathrm{c}_{\boldsymbol{p}}, \mathrm{c}_{\boldsymbol{p}}^+\}_- = 1 \tag{12.6}$$

が必要なことがわかり，エネルギーの固有値は（今度も付加定数を差し引いて）

$$E = \sum_{\boldsymbol{p}} \varepsilon_{\boldsymbol{p}} N_{\boldsymbol{p}} \tag{12.7}$$

であることがわかる．フェルミにしたがって量子化すると，意味のない結果，すなわち $N_{\boldsymbol{p}}$ に依存しない E が求まるだろう．

いま考察されている場の ≪電荷≫ Q は 0 に等しい．このことは，粒子を反粒子に変えると Q は符号を変えなければならないこと，そして今の場合この二つが ≪一致する≫ ことからも明らかである．これに関連して電流密度の 4 − ベクトルは存在しない．事実，保存量である 4 −ベクトル演算子 j に対する式

$$\mathrm{j}_\mu = i\,[\phi^+ \partial_\mu \phi - (\partial_\mu \phi^+)\phi] \tag{12.8}$$

は $\phi = \phi^+$ のときに 0 になる（$\phi \partial_\mu \phi$ 自身は保存しない）．このため今度は，粒子数の変化の可能性を制限するような，なんらかの特別な保存則はないことを意味している．このような粒子は，いかなる場合にも電気的に中性であることは明らかである．

このような種類の粒子を，反粒子を持つ電気的に中性な粒子と区別して，**真正中性**と呼ぶ．そして前者が反粒子との対でのみ消滅する（そして光子になる）ことができるが，真正中性粒子は 1 個だけで消滅することができる．

ϕ-演算子 (12.1) の構造は電磁場の演算子 (2.17)～(2.20) の構造と同様である．この意味で光子自身も真正中性粒子である．電磁場の場合に演算子がエルミートであること

は，（古典的極限で）電磁場の張力が測定可能な物理量であることと結びついている．粒子の ϕ-演算子の場合にはこのような関連はない．なぜかというと，一般になんらかの直接測定可能な量がそれに対応していないからである．これについては，現存する理論では ϕ-演算子はたぶん，首尾一貫した理論では消えてしまう《退化した概念》であることを思い起こすのが適当である．

保存する電流の4-ベクトルが存在しないことは，真正中性粒子の一般的性質で，（光子の場合にそうであったように）スピンが0に等しいことには結びつかない．物理的にそれは粒子数の変化に対する禁制がないことに現われている．形式的な観点からは，保存する電流のないことと場が実であること，すなわち演算子 ϕ がエルミートであることとのあいだに直接の関係がある．

複素場のラグランジアン

$$\mathrm{L} = \partial_\mu \phi^+ \cdot \partial^\mu \phi - m^2 \phi^+ \phi \tag{12.9}$$

は，ϕ-演算子に任意の位相因子を掛けても不変である．すなわち変換[1]

$$\phi \longrightarrow e^{i\alpha}\phi, \quad \phi^+ \longrightarrow e^{-i\alpha}\phi^+ \tag{12.10}$$

に対して不変である．特に，ラグランジアンは無限小変換

$$\phi \longrightarrow \phi + i\delta\alpha\cdot\phi, \quad \phi^+ \longrightarrow \phi^+ - i\delta\alpha\cdot\phi^+ \tag{12.11}$$

に際し変化しない．

《一般化された座標》q の無限小変換に際して，ラグランジアンはつぎのような変化をする．

$$\delta\mathrm{L} = \sum\left(\frac{\partial\mathrm{L}}{\partial q}\delta q + \frac{\partial\mathrm{L}}{\partial q_{,\mu}}\delta q_{,\mu}\right) = \sum\left(\frac{\partial\mathrm{L}}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial\mathrm{L}}{\partial q_{,\mu}}\right)\delta q + \sum\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial\mathrm{L}}{\partial q_{,\mu}}\delta q\right)$$

（和はすべての q について行なう）．第1項は《運動方程式》（ラグランジュの方程式）により0になる．《座標》q を演算子 ϕ および ϕ^+ と考え，$\delta\phi = i\delta\alpha\cdot\phi$，$\delta\phi^+ = -i\delta\alpha\cdot\phi^+$ と置くと

$$\delta\mathrm{L} = i\delta\alpha\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\phi\frac{\partial\mathrm{L}}{\partial\phi_{,\mu}} - \phi^+\frac{\partial\mathrm{L}}{\partial\phi^+_{,\mu}}\right)$$

を得る．これからラグランジアンが不変である条件（$\delta\mathrm{L}=0$）は，4-ベクトル

---

1)　これらの変換の集まりを**ゲージ群**と呼ぶ．

$$j^{\mu} = i\left(\phi^{+}\frac{\partial L}{\partial \phi^{+}_{,\mu}} - \phi\frac{\partial L}{\partial \phi_{,\mu}}\right) \qquad (12.12)$$

の連続方程式 ($\partial_{\mu} j^{\mu} = 0$) と同等であることがわかる.

このようにして，理論の数学的形式で，保存する電流の存在は，ラグランジァンが変換(12.10)に対して不変であることに関係があることがわかる (W. Pauli, 1941). 真正中性場のラグランジァンはこの対称性を持たない.

§13. 変換 C, P, T

4-反転と反対に，(空間の) 3次元反転は，4-座標系のなんらかの回転に帰するものではない. すなわちその変換の判別式は $+1$ でなく -1 である. したがって，反転 (P) に対する粒子の対称性は，相対論的不変性[1]の考察から予言することはできない.

スカラー波動関数に適用すると反転演算子は変換

$$P\psi(t, \boldsymbol{r}) = \pm\psi(t, -\boldsymbol{r}) \qquad (13.1)$$

にまとめられる. ここで右辺の $+$ または $-$ の符号は，それぞれ真正スカラーおよび擬スカラーに対応する.

ここから，反転に際して波動関数のふるまいの二つの側面を区別しなければならない. そのなかの一つは波動関数の座標依存性に関連している. 非相対論的量子力学では，ただこの問題だけを考えればよい. すなわち，それは粒子の運動の対称性を特徴づける状態の偶奇性 (いま**軌道偶奇性**と呼ぼう) に帰着する. もしも状態が一定の軌道偶奇性 ($+1$ または -1) を持つならば，つぎのことを意味する.

$$\psi(t, -\boldsymbol{r}) = \pm\psi(t, \boldsymbol{r}).$$

他の側面は，ある点 (座標の原点にとるとつごうがよい) における波動関数の (座標軸の反転に対する) ふるまいである. これは粒子の**内部偶奇性**の概念に帰する. 内部偶奇性 $+1$ あるいは -1 は，(スピン0の粒子に対しては) 定義 (13.1) における二つの符号に対応する. 粒子系の全偶奇性は，その内部偶奇性と運動に関する軌道偶奇性の積で与えられる.

いろいろな粒子の ≪内部≫ 対称性は，もちろんその相互変換の際に現われる. 複合系

---

1) 反転を加えたローレンツ群は**拡大ローレンツ群**と呼ばれる(そしてPを含まない，もとの**真正ローレンツ群**とは区別される). 拡大群は，t 軸をそれと対応した光円錐から出さない，全変換を含む.

の（たとえば原子核の）ある結合状態の偶奇性も非相対論的量子力学における内部偶奇性と同様である．複合粒子と素粒子のあいだに原理的な違いのない相対論的理論の観点からは，このような内部偶奇性は非相対論的理論で素粒子として扱われている粒子の内部偶奇性と区別がつかない．非相対論的領域でこれらは不変の粒子としてふるまい，その内部対称性は測定不可能であり，したがってその測定は物理的意味を持たない．

第二量子化の方法で，内部偶奇性は反転の際の ϕ-演算子のふるまいにより表わされる．変換則

$$\mathrm{P}:\phi(t,\boldsymbol{r})\longrightarrow\pm\phi(t,-\boldsymbol{r}) \tag{13.2}$$

がスカラーおよび擬スカラーに対応する．ϕ-演算子に対する反転の作用と同じ意味を，粒子の消滅および生成演算子のある一定の変換，すなわち，その結果 (13.2) の変換が起こるようなものに定式化する必要がある．

$$\mathrm{P}:\mathrm{a}_{\boldsymbol{p}}\longrightarrow\pm\mathrm{a}_{-\boldsymbol{p}},\quad \mathrm{b}_{\boldsymbol{p}}\longrightarrow\pm\mathrm{b}_{-\boldsymbol{p}} \tag{13.3}$$

（および共役演算子に対する同様な式）がこのようなものであることがすぐわかる．実際に演算子

$$\phi(t,\boldsymbol{r})=\sum_{\boldsymbol{p}}\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}(\mathrm{a}_{\boldsymbol{p}}e^{-i\omega t+i\boldsymbol{pr}}+\mathrm{b}_{\boldsymbol{p}}^{+}e^{i\omega t-i\boldsymbol{pr}}) \tag{13.4}$$

のなかで上記の置き換えを行ない，そのあとで和をとる変数の置き換え ($\boldsymbol{p}\to-\boldsymbol{p}$) を行なうと，これを

$$\pm\phi(t,-\boldsymbol{r})$$

の形に導くことができる．このようにして，変換 (13.3) を行なった演算子を $\phi^{P}(t,\boldsymbol{r})$ と書けば，つぎの等式を得る．

$$\phi^{P}(t,\boldsymbol{r})=\pm\phi(t,-\boldsymbol{r}). \tag{13.5}$$

変換 (13.3) はまったく当然の性質を持っていることに注目しよう．すなわち，反転は極性ベクトル $\boldsymbol{p}$ の符号を変える．したがって，運動量 $\boldsymbol{p}$ を持つ粒子は運動量 $-\boldsymbol{p}$ の粒子に変わる．

(13.3) で演算子 $\mathrm{a}_{\boldsymbol{p}}$ および $\mathrm{b}_{\boldsymbol{p}}$ は二つとも上，または二つとも下の符号をとる．このことは，第二量子化の方法で，（スピン0の）粒子と反粒子の内部偶奇性が同じであることに現われる．（スピン0の）粒子と反粒子が，まったく同じ（スカラーあるいは擬スカラー）波動関数により記述されることから，内部偶奇性の同一性は自明である．

φ-演算子 (13.4) は，非相対性理論に類似のない変換に対する対称性も同時に持っている．これを**荷電共役**と呼び C という記号で書こう．すべての演算子 a_p と b_p を互いに交換すると，すなわち

$$C: a_p \longrightarrow b_p, \quad b_p \longrightarrow a_p \tag{13.6}$$

を行なう（すなわち粒子と反粒子を互いに交換する）と，φ は≪荷電共役≫演算子 ϕ^C に移る．ここで

$$\phi^C(t, \boldsymbol{r}) = \phi^+(t, \boldsymbol{r}). \tag{13.7}$$

この等式は，粒子と反粒子の概念が理論に入るときに伴う特殊な対称性である．

荷電共役変換の定義には，本質的ではない形式的任意性が含まれることに注意しよう．定義 (13.6) に任意の位相因子を導入しても変換の意味は変わらない．すなわち

$$a_p \longrightarrow e^{i\alpha} b_p, \quad b_p \longrightarrow e^{-i\alpha} a_p$$

とすると

$$\phi \longrightarrow e^{i\alpha}\phi^+, \quad \phi^+ \longrightarrow e^{-i\alpha}\phi$$

となる．しかし2回繰り返すとこの変換は前と同じになる ($\phi \to \phi$)．しかし，このような定義は互いに同等である．φ-演算子の性質は位相因子を掛けても変わらない（次節の末尾参照）から，簡単に φ を $\phi e^{\frac{i\alpha}{2}}$ と書き換えることができる．そうすれば(13.6)，(13.7)の形の荷電共役の定義にもどる．

荷電共役は粒子をそれと同じものでない反粒子に変えるので，一般には粒子あるいは粒子系それ自身に何か新しい性質を生じさせるものではない．言いかえれば，演算子Cに対し，一般の場合，固有状態や固有値は存在しない．

この意味で，同数の粒子と反粒子とからなる系は例外である．演算子Cはこのような系を自分自身に移す．したがってこの場合には，固有値 $C = \pm 1$ （これは $C^2 = 1$ から出てくる）に対応する固有状態が存在する．この際荷電対称の記述に対して，粒子と反粒子を荷電量子数 $Q = \pm 1$ の異なる値を持つ，同一粒子の異なった≪荷電状態≫と考えることができる．系の波動関数は軌道と≪荷電の≫関数の積として表わされ，粒子の任意の対の（座標および荷電の）全変数の同時交換に対して対称でなければならない．≪荷電の≫関数の対称性は系の荷電偶奇性を定義する（問題参照）[1]．

---

1) この考察ではスピン0の粒子を扱っている．ここに記述された方法はただちに，他の場合に拡張される．たとえば§27参照．

§1で強調されているように相対論的理論では，≪複合粒子≫と≪素粒子≫のあいだに原理的な相違はない．したがって，≪真正中性な≫系に対し自然な形で生じた荷電共役の概念は，真正中性な≪素粒子≫に対してもそうならなければならない．第二量子化の方法でこの概念は，等式

$$\phi^{C} = \pm \phi \tag{13.8}$$

で記述される．符号＋および－は荷電偶および荷電奇の粒子に対応する．

§11で，相対論的不変性は4-反転に関してもまた不変でなければならないことを示した．スカラー場（4-回転の意味で）の演算子に関しては，このような変換は

$$\phi(t, \boldsymbol{r}) \longrightarrow \phi(-t, -\boldsymbol{r})$$

でなければならない．ここで右辺はいつも同じ＋符号である．演算子 a_p, b_p の変換を使って，$\phi(t, \boldsymbol{r})$ から $\phi(-t, -\boldsymbol{r})$ への変換は (13.4) で e^{-ipx} および e^{ipx} の係数を交換すること，すなわち，交換

$$a_p \longrightarrow b_p^+, \quad b_p \longrightarrow a_p^+ \tag{13.9}$$

によって達せられる．a-演算子を b-演算子で置き換えて，この変換自身のなかには粒子と反粒子の相互交換を含んでいる．われわれは，相対論的理論のなかには当然，空間反転（P）および時間反転（T）と同時に荷電共役（C）も行なわれるような変換に対する不変性の要求があることを見るだろう．この主張を**CPT-理論**[1]と呼ぶ．

しかしながら，これに関連してつぎのことを強調しておくのが適当である．すなわち，この節および§11，§12で記述された考察は，普通の量子力学および古典的相対性理論の概念の自然な発展ではあるが，このようにして得られた結果は形式の上からも（同時に粒子の生成および消滅の演算子を含む ϕ-演算子），また本質からも（粒子と反粒子）その枠外に出るものである．したがって，この結果は純論理的必然性と考えてはいけない．それは新しい物理的原理を内包し，その正当性の批判は，ただ実験によってのみ行なうことができる．

変換 (13.9) を行なった演算子 (13.4) を $\phi^{CPT}(t, \boldsymbol{r})$ とすれば

$$\phi^{CPT}(t, \boldsymbol{r}) = \phi(-t, -\boldsymbol{r}) \tag{13.10}$$

と書くことができる．このようにして，4-反転を変換 (13.9) として定式化したので，わ

1) これはシュヴィンガー (J. Schwinger, 1953)，リューデルス (G. Lüders, 1954) およびパウリ (W. Pauli, 1955) によって定式化された．

れわれはこれにより ϕ-演算子に対してもまた，時間反転変換の定式化を確立しよう．すなわち，それは変換 CP とともに (13.9) を与えなければならない[1]．したがって (13.3) と (13.6) の定義を考慮して

$$\mathrm{T}: \mathrm{a}_{\boldsymbol{p}} \longrightarrow \pm \mathrm{a}^{+}_{-\boldsymbol{p}}, \quad \mathrm{b}_{\boldsymbol{p}} \longrightarrow \pm \mathrm{b}^{+}_{-\boldsymbol{p}} \tag{13.11}$$

を得る（符号 ± は(13.3)における符号と同様である）．この変換の意味はまったく自然である．すなわち，時間反転は運動量 $\boldsymbol{p}$ を持つ運動を運動量 $-\boldsymbol{p}$ を持つ運動に移すだけでなく，行列要素の始状態と終状態を取り替える．したがって，運動量 $\boldsymbol{p}$ を持つ粒子の消滅演算子は運動量 $-\boldsymbol{p}$ を持つ粒子の生成演算子に変えられる．(13.4) のなかで交換 (13.11) を行ない，変数の記号の書き換え ($\boldsymbol{p} \to -\boldsymbol{p}$) を行なって次式を得る[2]．

$$\phi^{T}(t, \boldsymbol{r}) = \pm \phi^{+}(-t, \boldsymbol{r}). \tag{13.12}$$

この等式は量子力学における普通の時間反転の法則と類似している．すなわち，ある状態が波動関数 $\psi(t, \boldsymbol{r})$ で記述されるとすると，≪時間を反転した≫ 状態は関数 $\psi^{*}(-t, \boldsymbol{r})$ で記述される．複素共役関数への移行は，ψ の符号の変化によって壊された，≪正規の≫ 時間依存性の回復と結びついている (E. P. Wigner, 1932)．

変換 T（それとともに CPT）は始状態と終状態を交換するので，それらに対しては固有状態も固有値も意味を持たない．したがって，それ自身の新しい固有の粒子へ導かない．散乱の過程に適用して，それが導くところの結果については §70 で触れることにする．

変換 C, P および T に際して，演算子の 4-ベクトル電流 j^{μ} (12.8) がどう変化するかを見よう．変換 (13.2) は $(\partial_0, \partial_i) \longrightarrow (\partial_0, -\partial_i)$ の置き換えとともに

$$\mathrm{P}: (j^0, \boldsymbol{j})_{t, \boldsymbol{r}} \longrightarrow (j^0, -\boldsymbol{j})_{t, -\boldsymbol{r}} \tag{13.13}$$

を与える．これは真正 4-ベクトルとして当然である．変換 (13.7) は，演算子 ϕ と ϕ^{+} が可換ならば，単に

$$\mathrm{C}: (j^0, \boldsymbol{j})_{t, \boldsymbol{r}} \longrightarrow (-j^0, -\boldsymbol{j})_{t, \boldsymbol{r}} \tag{13.14}$$

を与えるだけである．しかしこれらの非可換性は同じ $\boldsymbol{p}$ を持った $\mathrm{a}_{\boldsymbol{p}}$ と $\mathrm{a}^{+}_{\boldsymbol{p}}$（あるいは $\mathrm{b}_{\boldsymbol{p}}$

---

1) 変換 CP を**結合反転**と呼ぶ．

2) 演算 T を他の変換と関係なく定義すると，演算 C に起こったのと同じ位相因子の選択の任意性が生じる．*CPT* 対称の要求は，位相因子の任意の選択を，変換 C あるいは T のなかのただ一つだけに残している．

と b_p^+) の非可換性だけからきている．しかし交換則 (11.4) のためにこれらの演算子の交換は占有数，すなわち，場の状態に依存しない項の出現へと導くだけである．((11.5), (11.6)におけるように) これらの項を本質的でないとして捨てて，われわれは本質的に意味のある法則 (13.14) にたちもどる．すなわち，粒子を反粒子に変えるので，荷電共役は4-電流のすべての成分の符号を変える．

時間反転演算は，始状態と終状態の置換と結びついているので，演算子の積に適用するとその因子の順序を変える．すなわち

$$(\phi^+ \partial_\mu \phi)^T = (\partial_\mu \phi)^T (\phi^+)^T.$$

しかしながら，今の場合この事情は本質的でない．すなわち，(前に述べた意味での) φ-演算子の可換性のために因子の始めの順序へもどしても結果には影響しない．また時間反転に際し $(\partial_0, \partial_i) \longrightarrow (-\partial_0, \partial_i)$ であることに注目し，電流の変換則

$$\mathrm{T} : (\mathrm{j}^0, \mathbf{j})_{t, \boldsymbol{r}} \longrightarrow (\mathrm{j}^0, -\mathbf{j})_{-t, \boldsymbol{r}} \tag{13.15}$$

を得る．3次元ベクトル $\mathbf{j}$ は符号を変える．これはこの量の古典的意味に適合している．

最後に変換CPT に際して

$$\mathrm{CPT} : (\mathrm{j}^0, \mathbf{j})_{t, \boldsymbol{r}} \longrightarrow (-\mathrm{j}^0, -\mathbf{j})_{-t, -\boldsymbol{r}} \tag{13.16}$$

を得る．これは4-反転としてのこの演算の意味に適合している．これに関連して，4-反転は4-座標系の回転に帰するので，それに関しては一般に任意の階数の4-テンソルの二つの型 (真正と擬) は存在しないことを強調しておこう．

いままで，われわれは粒子が自由なものと考えてきた．しかし偶奇性の量子数の現実の意味は，相互作用をしている粒子の考察でのみ得られる．そこではそれらが，種々の過程を許容または禁止をしている一定の選択則と結びついているわけである．しかしながら，相互作用をする粒子のハミルトニアンと交換する演算子の固有値のような，保存する性質だけがこのような意味を持ちうる．

相対論的不変性のために，CPT-変換の演算子はいつの場合でもハミルトニアンと可換でなければならない．変換C, P (これとともに T) 個々に関して，実験から，電磁相互作用および強い相互作用は，それらに関して不変であり，したがってそれに対応する偶奇性の量子数はその相互作用で保存する．弱い相互作用ではこの保存則は破られる[1]．

1) 弱い相互作用で偶奇性が保存しない可能性についての考えは，最初にリーおよびヤンによって述べられた (T. D. Lee, C. N. Yang, 1956).

少々先回りして，荷電粒子と電磁場の相互作用の演算子は，4-ベクトル演算子 A と j の積として与えられることを指摘しよう．荷電共役は j の符号を変えるので，電磁的相互作用のこの変換に対する不変性は，A もまた符号を変えなければならないことを意味する．言いかえれば，光子は荷電奇の粒子である．

上に示した演算子 A のふるまいは，古典理論の4-ポテンシャルの性質に対応している．事実，変換

$$\mathrm{C}:(\mathrm{A}_0,\mathbf{A})\longrightarrow(-\mathrm{A}_0,-\mathbf{A})_{t,\boldsymbol{r}},$$

$$\mathrm{P}:(\mathrm{A}_0,\mathbf{A})\longrightarrow(\ \mathrm{A}_0\ ,-\mathbf{A})_{t,-\boldsymbol{r}},$$

$$\mathrm{CPT}:(\mathrm{A}_0,\mathbf{A})\longrightarrow(-\mathrm{A}_0,-\mathbf{A})_{-t,-\boldsymbol{r}}$$

から

$$\mathrm{T}:(\mathrm{A}_0,\mathbf{A})\longrightarrow(\mathrm{A}_0,-\mathbf{A})_{-t,\boldsymbol{r}}$$

が出る．これは時間反転に対する電磁場のポテンシャルの古典的変換則に対応している．

問　題

スピン0と相対運動の軌道角運動量 l を持った2粒子系（粒子と反粒子）の荷電および空間偶奇性を決定せよ．

解　粒子の座標の交換は（その慣性中心に対する）反転と同等である．したがって軌道関数に $(-1)^l$ を掛ける．荷電変数の交換は荷電共役をとることと同等であり，波動関数の《荷電》因子に求める C を掛ける．$C(-1)^l=1$ の条件から

$$C=(-1)^l.$$

系の空間偶奇性 P は，軌道偶奇性と2粒子の内部偶奇性の積である．粒子と反粒子の内部偶奇性は同じであるから，今の場合 P は軌道偶奇性と一致する．すなわち，$P=(-1)^l$ となる．

§14. スピン1の粒子に対する波動方程式

スピン1の粒子はその静止系で3成分関数，すなわち3次元ベクトルで記述される（このような粒子をしばしば**ベクトル粒子**と呼ぶ）．その4次元的な起源からして，それは4-ベクトル ψ^μ，あるいは2階の反対称4-テンソル $\psi^{\mu\nu}$ の三つの空間（空間類似の）成分であってもよい．ただしこれらは，静止系ではその時間成分 (ψ^0) および空間成分 (ψ^{ik}) が

0になる[1].

波動方程式は，量 ψ^μ と $\psi^{\mu\nu}$ のあいだの微分関係で

$$i\psi_{\mu\nu} = \mathrm{p}_\mu\psi_\nu - \mathrm{p}_\nu\psi_\mu, \tag{14.1}$$

$$im^2\psi_\mu = \mathrm{p}^\nu\psi_{\mu\nu} \tag{14.2}$$

の形の関係式によって定義される．ここで $\mathrm{p} = i\partial$ である (A. Proca, 1936)．方程式(14.2)の両辺に演算 p^μ を行なって，($\psi_{\mu\nu}$ の反対称性から)

$$\mathrm{p}^\mu\psi_\mu = 0. \tag{14.3}$$

(14.1)，(14.2) から，第一の方程式を第二の式に代入し，$\psi_{\mu\nu}$ を消去することができる．(14.3) を考慮して

$$(\mathrm{p}^2 - m^2)\psi_\mu = 0. \tag{14.4}$$

ここからまた，m が質量であることがわかる (§10 と比較せよ)．このようにして，スピン1を持つ自由粒子は，唯一の4-ベクトル ψ^μ で記述され，その成分は2次方程式(14.4)と，ψ^μ からスピン0の部分を消去する付加条件 (14.3) とを満足する．

ψ_μ は空間座標に依存しない静止系では，$\mathrm{p}^0\psi_0 = 0$ であることがわかる．同時に $\mathrm{p}^0\psi_0 = m\psi_0$ であるから，静止系では当然のことながら $\psi_0 = 0$ であることがわかる．ψ_0 とともに ψ_{ik} もまた0になる．

スピン 1 の粒子は，ψ^μ が真正かあるいは擬ベクトルかによって異なる内部偶奇性を持っている．第一の場合は，$\mathrm{P}\psi^\mu = (\psi^0, -\psi^i)$，第二の場合は，$\mathrm{P}\psi^\mu = (-\psi^0, \psi^i)$.

方程式 (14.1)，(14.2) はラグランジアン

$$L = \frac{1}{2}\psi_{\mu\nu}\psi^{\mu\nu *} - \frac{1}{2}\psi^{\mu\nu *}(\partial_\mu\psi_\nu - \partial_\nu\psi_\mu) - \frac{1}{2}\psi^{\mu\nu}(\partial_\mu\psi^*_\nu - \partial_\nu\psi^*_\mu) + m^2\psi_\mu\psi^{\mu *} \tag{14.5}$$

の変分原理から求めることができる．独立な一般化された座標の役割は，そのなかの ψ_μ，ψ^*_μ，$\psi_{\mu\nu}$，$\psi^*_{\mu\nu}$ [2] が果たしている．

今の場合，エネルギー運動量テンソルを見いだすためには，(10.11) 式ではまったく不

---

1) 先回りして，つぎのことを指摘しておこう．4-ベクトル ψ^μ および4-テンソル $\psi^{\mu\nu}$ の全体は2階の4元スピノール $\xi^{\alpha\beta}, \eta_{\dot\alpha\dot\beta}, \zeta^{\alpha\dot\beta}$ の全体に対応する．ここで，$\xi^{\alpha\beta}$ および $\eta_{\dot\alpha\dot\beta}$ は反転(§19) に際して互いに移りあう対称スピノールである．

2) もしも ($\psi_{\mu\nu}$ がすでに (14.1) により ψ_μ で表わされていることを前提として)，ψ_μ だけで変分を行なうと，方程式 (14.3) は変分と関係のない付加条件となってしまうだろう．

十分である．なぜならば，それは非対称テンソルへ導き，追加の対称化を必要とするからである．この代りに公式

$$\frac{1}{2}T_{\mu\nu}\sqrt{-g} = -\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\frac{\partial\sqrt{-g}\,L}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\lambda}} + \frac{\partial\sqrt{-g}\,L}{\partial g^{\mu\nu}} \tag{14.6}$$

を利用することができる．ここで L は任意の曲線座標（II，§94 参照）による形で表わされているものと仮定している．もしも L が計量テンソル $g_{\mu\nu}$ の成分だけを含んでいる（座標による微分は含まない）とすると，式は簡単になり

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}\,L}{\partial g^{\mu\nu}} = 2\frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu}L$$

となる（$d\ln g = -g_{\mu\nu}dg^{\mu\nu}$ を思い起こそう）．

(14.6) の式のなかの微分は ψ_μ，$\psi_{\mu\nu}$ について行なうのでないから，その適用に際してこれらの量を独立と考えなければならない．関係式(14.1)を使ってただちにラグランジアン(14.5)を

$$L = -\frac{1}{2}\psi_{\mu\nu}\psi^{*}_{\lambda\rho}g^{\mu\lambda}g^{\nu\rho} + m^2\psi_\mu\psi^{*}_{\nu}g^{\mu\nu} \tag{14.7}$$

の形に書き直すことができる．このとき

$$T_{\mu\nu} = -\psi_{\mu\lambda}\psi_{\nu}^{\lambda *} - \psi^{*}_{\mu\lambda}\psi_{\nu}^{\lambda} + m^2(\psi^{*}_{\mu}\psi_\nu + \psi^{*}_{\nu}\psi_\mu) + g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}\psi_{\lambda\rho}\psi^{\lambda\rho *} - m^2\psi^{*}_{\lambda}\psi^{\lambda}\right) \tag{14.8}$$

である．特にエネルギー密度は正に定まった式

$$T_{00} = \frac{1}{2}\psi_{ik}\psi^{*}_{ik} + \psi_{0i}\psi^{*}_{0i} + m^2(\psi_0\psi^{*}_{0} + \psi_i\psi^{*}_{i}) \tag{14.9}$$

により与えられる．

保存する電流密度の4-ベクトルは，式

$$j^{\mu} = i(\psi^{\mu\nu *}\psi_\nu - \psi^{\mu\nu}\psi^{*}_{\nu}) \tag{14.10}$$

で与えられる．これは公式 (12.12) にしたがって，ラグランジアン (14.5) を $\partial_\mu\psi_\nu$ で微分することによって求められる．特に

$$j^0 = i(\psi^{0k *}\psi_k - \psi^{0k}\psi^{*}_{k}) \tag{14.11}$$

であり，これは正に定まった量にはならない．

体積 $V=1$ のなかに粒子が1個あるように規格化された平面波は

$$\psi_\mu = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}u_\mu e^{-ipx}, \quad u_\mu u^{\mu *} = -1 \tag{14.12}$$

である．ここで u_μ は偏りの単位4-ベクトルで，((14.3) のために) 4元横波の条件

$$u_\mu p^\mu = 0 \tag{14.13}$$

を満足する．事実，関数 (14.12) を (14.9) と (14.11) に代入して

$$T_{00} = -2\varepsilon^2 \psi_\mu \psi^{\mu *} = \varepsilon, \quad j_0 = 1.$$

光子の場合とは反対に，質量が0でないベクトル粒子は三つの独立な偏りの方向を持っている．それに対応する振幅は (16.21) を見よ．

第二量子化はスカラーの場合とまったく同様に行なわれ，ふたたびすべての考察を繰り返す必要はない．T_{00} に対する正に定まった式 (14.9) と，定まらない j^0 (14.11) は，スカラーの場合と同様にボーズにしたがって量子化しなければならないという結果へ導いている．

真正中性なベクトル場と電磁場の性質のあいだには，密接な関係がある．中性ベクトル場は実の ψ-演算子

$$\psi_\mu = \sum_{p\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} (c_{p\alpha} u_\mu^{(\alpha)} e^{-ipx} + c_{p\alpha}^+ u_\mu^{(\alpha)*} e^{ipx}) \tag{14.14}$$

で記述される．ここで $c_{p\alpha}, c_{p\alpha}^+$ は粒子の消滅および生成のボーズ演算子である（添字 α は三つの独立な偏りを番号づけしている）．この場のラグランジァンはつぎのようになる．

$$L = \frac{1}{4}\psi_{\mu\nu}\psi^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\psi^{\mu\nu}(\partial_\nu \psi_\mu - \partial_\nu \psi_\mu) + \frac{1}{2}m^2 \psi_\mu \psi^\mu. \tag{14.15}$$

電磁場は $m = 0$ の場合に対応する．この際4-ベクトル ψ^μ は 4-ポテンシャル A^μ になり，4-テンソル $\psi^{\mu\nu}$ は場のテンソル $F^{\mu\nu}$ となり，ポテンシャルの定義 (14.1) により結ばれている．方程式 (14.2) は $\partial^\nu \psi_{\mu\nu} = 0$ となり，これはマクスウェル方程式の第二の対に対応している．これからはもはや条件 (14.3) は出てこない．このようにして，これは必要欠くべからざる条件ではなくなる．付加条件がないので，ラグランジァンのなかで ψ_μ および $\psi_{\mu\nu}$ を独立《座標》として考える必要はなくなる．そしてラグランジァン (14.15) は

$$L = -\frac{1}{4}\psi_{\mu\nu}\psi^{\mu\nu} \tag{14.16}$$

となり，よく知られた電磁場のラグランジァンの古典論の式と一致する．このラグランジァンはテンソル $\psi_{\mu\nu}$ とともに，《ポテンシャル》ψ_μ の任意のゲージ変換に対して不変である．このことと0の質量との関係は明らかである．すなわち，ラグランジァン (14.15)

は $m^2\phi_\mu\phi^\mu$ の項のためにこの性質は持っていない．

§15. 大きい整数のスピンを持つ粒子に対する波動方程式

粒子の質量とスピンを与えれば，波動方程式 (14.3)，(14.4) はただちに得られるので，実際のラグランジァンの利用はこれらの方程式を導くのでなく，場のエネルギー，運動量および電荷の式を作ることになる．

すでに注意したように，(14.5) の代りに (14.7) の式をこの目的に使うことができる．そして (14.7) は，さらに変形することができる．(14.1) を使って (14.7) を

$$
\begin{aligned}
L &= -(\partial_\mu\phi_\nu^*)(\partial^\mu\phi^\nu)+(\partial_\nu\phi_\mu^*)(\partial^\mu\phi^\nu)+m^2\phi_\mu\phi^{\mu*} \\
&= -(\partial_\mu\phi_\nu^*)(\partial^\mu\phi^\nu)+m^2\phi_\mu^*\phi^\mu+\partial_\nu(\phi_\mu^*\partial^\mu\phi^\nu)-\phi_\mu^*\partial^\mu\partial_\nu\phi^\nu
\end{aligned}
$$

の形に書き直そう．(14.3) から最後の項は 0 になり，右辺の第 3 項は完全微分である．これらを落とすと，つぎのラグランジァンを得る．

$$
L' = -(\partial_\mu\phi_\nu^*)(\partial^\mu\phi^\nu)+m^2\phi_\mu^*\phi^\mu. \tag{15.1}
$$

これはスピン 0 の粒子のラグランジァン (10.9) とまったく同じ構造を持ち，スカラー ϕ を 4－ベクトル ϕ_μ に変え，符号を変える点だけが異なっている．この第 1 項の符号は，ϕ_μ が空間類似ベクトルで $\phi_\mu\phi^{\mu*}<0$ であり，同時にスカラー粒子に対しては $\phi\phi^*>0$ であることと関連している．

ラグランジァン (15.1) を使ってエネルギー運動量の 4－テンソルと電流の 4－ベクトルを作れば，スカラー場に対する式 (10.12) および (10.18) と同じ式を得る．

$$
T_{\mu\nu} = -\partial_\mu\phi^{\lambda*}\cdot\partial_\nu\phi_\lambda-\partial_\nu\phi^{\lambda*}\cdot\partial_\mu\phi_\lambda-L'g_{\mu\nu}, \tag{15.2}
$$

$$
j_\mu = -i[\phi_\lambda^*\partial_\mu\phi^\lambda-(\partial_\mu\phi_\lambda^*)\phi^\lambda]. \tag{15.3}
$$

これらと (14.8) および (14.10) との差は完全微分である．これらの量の局所的な値は(すでに前に強調したように)，深い物理的意味は持たない．ただ，体積積分 P_μ (10.15) および Q (10.19) が重要である．そして $T_{\mu\nu}$ および j_μ としてどちらをとっても，これらは一致する．

このような記述法はただちに任意の（整数の）スピンの粒子に拡張される．スピン s を持つ粒子の波動関数は s-階の既約 4－テンソルである．すなわち，すべての添字について対称で，どの二つの添字で縮約しても 0 になる．すなわち

$$\psi_{\cdot\cdot\mu\cdot\nu\cdot\cdot} = \psi_{\cdot\cdot\nu\cdot\mu\cdot\cdot}, \quad \psi_{\cdot\cdot\mu\cdot}{}^{\mu}{}_{\cdot\cdot} = 0. \tag{15.4}$$

このテンソルは4元横波の付加条件

$$\mathrm{p}^{\mu}\psi_{\cdot\cdot\mu\cdot\cdot} = 0 \tag{15.5}$$

を満足しなければならない．そしてそのおのおのの成分は2次方程式

$$(\mathrm{p}^2 - m^2)\psi_{\cdots} = 0 \tag{15.6}$$

を満足しなければならない．静止系で条件 (15.5) は，添字のなかに0があるすべての4-テンソル成分が0になることに帰してしまう．言いかえれば，静止系での（すなわち，非相対論的極限での）波動関数は，当然のことながら，s 階の既約3-テンソルになる．後者の独立な成分の数は $2s+1$ に等しい．

スピン s を持つ粒子の場のラグランジァン，エネルギー運動量テンソルおよび電流ベクトルは，(15.1)～(15.3) とは，ψ_λ を $\psi_{\lambda\mu\cdots}$ に置き換える点だけが異なっている．

規格化された平面波は

$$\psi^{\mu\nu\cdots} = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} u^{\mu\nu\cdots} e^{-ipx}, \quad u^*_{\mu\nu\cdots} u^{\mu\nu\cdots} = -1 \tag{15.7}$$

であり，波の振幅は条件

$$u^{\cdot\cdot\mu\cdot\cdot}p_\mu = 0 \tag{15.8}$$

を満足する．$2s+1$ 個の独立な偏りの状態がある．

スピン0および1の場合の明らかな一般化によって場の量子化は行なわれる．

自由粒子の場の記述という設定された目的のためには，上で述べられた概略で，十分である．粒子と電磁場との相互作用の記述の課題については事情が別である．付加条件の設定を必要としないですべての方程式を求めることができるような形に，相互作用がラグランジァンのなかに導入される必要がある (138頁の脚注参照)．しかしながら事実は，相互作用のこのような記述は，スピン1/2を持つ粒子である電子に対してのみ適用可能なことが明らかである (§32参照)．したがって，他のスピンの場合，この問題は，ただ方法論的興味しか持たないであろう．

すべての（整数および半奇数の）スピン $s>1$ に対して，与えられたスピンに対応する階数のただ一つの関数（テンソルあるいはスピノール）によって変分原理を定式化することが不可能であることがわかった．この目的のためには，それより低い階数の補助的な量としてテンソルあるいはスピノール量として導入する必要があることがわかった．この

際ラグランジァンは，これら補助量が変分原理から出てくる自由粒子の場の方程式により，自動的に0になるように選ばれる[1].

§16. 粒子の螺線状態[2]

相対論的理論では，運動している粒子の軌道角運動量 $\boldsymbol{l}$ とスピン $\boldsymbol{s}$ とは個々別々に保存しない．ただ全角運動量 $\boldsymbol{j}=\boldsymbol{l}+\boldsymbol{s}$ だけが保存する．したがって，ある与えられた方向（z 軸）へのスピンの投影も保存しない．したがって，この量は運動粒子の偏りの(スピンの)状態の記述と考えることはできない．

しかしながら，スピンの運動量方向への投影は保存する．すなわち，$\boldsymbol{l}=[\boldsymbol{rp}]$ であるから $\boldsymbol{sn}$ は保存量の積 $\boldsymbol{jn}(\boldsymbol{n}=\boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}|)$ と一致する．この量を**螺線度**[3]と呼ぶ（われわれはすでに§8で光子に対してこれを考察した)．その固有値を $\lambda(\lambda=-s,\cdots\cdots,\ +s)$ で表わそう．そして λ の一定値を持つ粒子の状態を螺線状態と呼ぶ．

$\psi_{p\lambda}$ を一定の $\boldsymbol{p}$ および λ を持つ粒子の状態を記述する波動関数（平面波）とし，$u^{(\lambda)}(\boldsymbol{p})$ をその振幅としよう．記法を簡単にするためこの関数の添字（整数のスピンに対し，これは4-テンソル添字である）を書かなかった．前節で0と異なる（整数）スピンを持つ粒子の相対論的記述では，$2s+1$ を超える多成分の波動関数を導入するのが好つごうであることを見てきた．しかし，この際の独立な成分の数は $2s+1$ に等しい．≪余分の≫成分は付加条件を課することによって消去される．そしてこの条件のために，これらの成分は静止系では0になる（次章でわれわれは半奇数の s に対してこれを見るだろう)．

角運動量の変換公式（II，§14参照）にしたがって，角運動量を投影する $\boldsymbol{p}$ の方向を変えないようなローレンツ変換に対して螺線度は不変である．したがって，このような変換に際し λ という数はその量子数の意味を保ち，螺線状態の対称性の研究には，運動量 $|\boldsymbol{p}|\ll m$（極限では静止系である）のような基準系を使うことができる．そのとき $\psi_{p\lambda}$ は非相対論的な $(2s+1)$-成分の波動関数に帰してしまう．この振幅を，角運動量を量子化する方向 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}|$ を引数として示した $w^{(\lambda)}(\boldsymbol{n})$ で表わす．振幅 $w^{(\lambda)}(\boldsymbol{n})$ は演算子 $\boldsymbol{ns}$ の固有関数である．つまり

---

1) M. Fierz, W. Pauli, *Proc. Roy. Soc.* **A173** (1939) 参照．この論文では，上記の手続きはスピン3/2および2の粒子に対して行なわれた．

2) この節の内容は任意の（整数あるいは半奇数）のスピンの粒子に成り立つ．

3) 英文の文献ではヘリシティ (helicity) である．

$$(\boldsymbol{n}\mathbf{s})w^{(\lambda)}(\boldsymbol{n}) = \lambda w^{(\lambda)}(\boldsymbol{n}). \tag{16.1}$$

スピノール表示では $w^{(\lambda)}$ は $2s$ 階の共変対称スピノールである．対応の公式Ⅲ (57.2) にしたがって，その成分はまた対応するスピンの z 軸[1]への一定の投影 σ によって書き直すことができる．

運動量表示では考えられている状態の波動関数は，基本的には振幅 $u^{(\lambda)}(\boldsymbol{p})$ と一致する．すなわち

$$\psi_{\boldsymbol{p}\lambda}(\boldsymbol{k}) = u^{(\lambda)}(\boldsymbol{k})\delta^{(2)}(\boldsymbol{\nu}-\boldsymbol{n}) = u^{(\lambda)}(\boldsymbol{p})\delta^{(2)}(\boldsymbol{\nu}-\boldsymbol{n}). \tag{16.2}$$

ここで独立変数としての運動量を $\boldsymbol{k}$ と書き，その固有値 $\boldsymbol{p}$ と区別し，また $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{k}/|\boldsymbol{k}|$ を $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}|$ と区別した[2]．非相対論的極限では

$$\psi_{\boldsymbol{n}\lambda}(\boldsymbol{\nu}) = w^{(\lambda)}(\boldsymbol{\nu})\delta^{(2)}(\boldsymbol{\nu}-\boldsymbol{n}) = w^{(\lambda)}(\boldsymbol{n})\delta^{(2)}(\boldsymbol{\nu}-\boldsymbol{n}). \tag{16.3}$$

さらに詳しくは，この式を

$$\psi_{\boldsymbol{n}\lambda}(\boldsymbol{\nu},\sigma) = w_{\sigma}^{(\lambda)}(\boldsymbol{\nu})\delta^{(2)}(\boldsymbol{\nu}-\boldsymbol{n})$$

の形に書く必要がある．ここで離散的な独立変数 σ もまた示してある．

螺線度の演算子 $\mathbf{s}\boldsymbol{n}$ は演算子 $\mathbf{j}_z$ および $\mathbf{j}^2$ と可換である．実際に，角運動量演算子は座標系の無限小回転と結びついていて，2ベクトルのスカラー乗積は任意の回転に対して不変である．したがって，粒子が同時に角運動量の一定値 j，その投影 $j_z = m$ および螺線度 λ を持つような定常状態が存在する．このような状態を**球面螺線状態**と名付けよう．

運動量表示でこの状態の波動関数を定義しよう．これは付録の §a[3] で得られる公式を使って行なうことができる．空間に固定された座標系（関数 $\psi_{jm\lambda}$ はこの系によって記述

---

1) ここで行なった考察（可能な λ 値を数えたりする）は，0と異なる質量の粒子に関するものである．質量が0の粒子に対しては静止系は存在しない．そして螺線度は $\lambda = \pm s$ のただ二つだけである．後者はすでに §8 で言及した事情と結びついている．すなわち，このような粒子の状態は軸対称の群に関するふるまいで分類され，ただ二つの縮退した準位だけを許す（波動関数の性質から，$m \to 0$ の極限でスピン s の粒子に対する方程式系は，スピンが s，$s-1$，…… の質量のない粒子に対応する独立な方程式に分解される）．かくして，光子に対しては $\lambda = \pm 1$ であり，対応する $w^{(\lambda)}$ の役割を3次元ベクトル $\boldsymbol{e}^{(\pm 1)}$ (8.2) が果たしている．

2) $\delta^{(2)}$-関数は $\int \delta^{(2)}(\boldsymbol{\nu}-\boldsymbol{n})do_{\nu} = 1$ になるように定義した．(16.2)（および同様の場合であるつぎの (16.4)）で，エネルギーの与えられた値を保証する δ-関数は落としてある．

3) §a で求められる公式は，回転に対する対称性のみに基づいている．したがって，座標表示とまったく同程度に運動量表示の関数に適用できる．

されている）とともに，$\boldsymbol{\nu}$ 方向の ζ 軸を持つ≪運動する≫系 $\xi\eta\zeta$ も導入しよう．公式 (a. 2) のなかで m' を λ に変えて

$$\psi_{jm\lambda}(\boldsymbol{k}) = \psi^{(0)}_{j\lambda} D^{(j)}_{\lambda m}(\boldsymbol{\nu})$$

と書こう．ζ 軸が関数 $\psi^{(0)}_{j_\lambda}$ の量子化の軸と一致するので，後者は振幅 $u^{(\lambda)}$ と一致する．規格化された波動関数は

$$\psi_{jm\lambda}(\boldsymbol{k}) = \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} D^{(j)}_{\lambda m}(\boldsymbol{\nu}) u^{(\lambda)}(\boldsymbol{k}) \,. \tag{16.4}$$

しかしながら，ここでつぎのような非一意性と結びついた位相の選択の問題が起こる．座標系 $\xi\eta\zeta$ の xyz に対する回転は三つの角 α, β, γ により決定される．粒子の波動関数が依存している方向 $\boldsymbol{\nu}$ は，二つの球面角 $\alpha\equiv\varphi$, $\beta\equiv\theta$ にのみ依存する．したがって，角度 γ のなんらかの選択を定める必要がある．われわれは $\gamma=0$ と置こう．すなわち $D^{(j)}_{\lambda m}(\boldsymbol{\nu})$ を

$$D^{(j)}_{\lambda m}(\boldsymbol{\nu}) = D^{(j)}_{\lambda m}(\varphi, \theta, 0) = e^{im\varphi} d^{(j)}_{\lambda m}(\theta) \tag{16.5}$$

のように定義しよう．

(a. 14) により関数 (16. 5) は規格化直交条件

$$\int D^{(j_1)*}_{\lambda_1 m_1}(\boldsymbol{\nu}) D^{(j_2)}_{\lambda_2 m_2}(\boldsymbol{\nu}) \frac{do_{\boldsymbol{\nu}}}{4\pi} = \frac{1}{2j+1} \delta_{j_1 j_2} \delta_{m_1 m_2} \tag{16.6}$$

を満足する ($do_{\boldsymbol{\nu}} = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$)．関数 $\psi_{jm\lambda}$ の添字 λ に関する直交性は乗数因子 $u^{(\lambda)}$ によって保証される．このようにして，当然のことながら，関数 $\psi_{jm\lambda}$ はすべての添字 $jm\lambda$ に関し直交する．そして (16. 4) の係数の選択に当たり，それは条件

$$\int |\psi_{jm\lambda}|^2 do_{\boldsymbol{\nu}} = 1 \tag{16.7}$$

で規格化される．この際，振幅 $u^{(\lambda)}$ は1に規格化されていること，すなわち $u^{(\lambda)} u^{(\lambda)*} = 1$ を仮定している．

螺線状態の波動関数の座標反転に対するふるまいを考察しよう．極性ベクトル $\boldsymbol{\nu}$ と軸性ベクトル $\boldsymbol{j}$ の積は擬スカラーである．したがって反転の結果，螺線度 λ の状態は $-\lambda$ の状態に移ることはあらかじめ明らかである．ただ，この変換での位相因子を決定する必要がある．

反転の際 $\boldsymbol{\nu}\to-\boldsymbol{\nu}$ である．ベクトル $\boldsymbol{\nu}$ は二つの角度 φ, θ で決定される．そして変換

$\boldsymbol{\nu}\to-\boldsymbol{\nu}$ は $\varphi\longrightarrow\varphi+\pi$, $\theta\longrightarrow\pi-\theta$ の置き換えで実現される．同様に新しい ζ 軸は固定されるが，ξ および η 軸はまた第三のオイラー角 γ に依存して不定のまま残ってしまう．θ および φ だけの変換は，この意味では，座標系の反転と ζ 軸の回転とを区別する可能性は与えない．三つのオイラー角のすべてを使って，反転はつぎの変換である．

$$\alpha\equiv\varphi\longrightarrow\varphi+\pi,\quad \beta\equiv\theta\longrightarrow\pi-\theta,\quad \gamma\longrightarrow\pi-\gamma. \tag{16.8}$$

したがって，もしも $D^{(j)}_{\lambda m}(\boldsymbol{\nu})$ が (16.5) から（すなわち，$\gamma=0$ で）定義され，交換 $\boldsymbol{\nu}\to-\boldsymbol{\nu}$ は反転の結果と考えられれば

$$D^{(j)}_{\lambda m}(-\boldsymbol{\nu}) = D^{(j)}_{\lambda m}(\varphi+\pi,\,\pi-\theta,\,\pi) \tag{16.9}$$

である．したがって公式 (a. 5)，(a. 9) および (a. 11) を使って

$$\begin{aligned}D^{(j)}_{\lambda m}(-\boldsymbol{\nu}) &= e^{i\lambda\pi}d^{(j)}_{\lambda m}(\pi-\theta)\,e^{im(\varphi+\pi)}\\ &= (-1)^{j-\lambda}e^{im\varphi}d^{(j)}_{-\lambda m}(\theta) = (-1)^{j-\lambda}D^{(j)}_{-\lambda m}(\varphi,\theta,0),\end{aligned}$$

あるいは

$$D^{(j)}_{\lambda m}(-\boldsymbol{\nu}) = (-1)^{j-\lambda}D^{(j)}_{-\lambda m}(\boldsymbol{\nu}) \tag{16.10}$$

を得る（$j-\lambda$ は整数である）．

$w^{(\lambda)}$ の成分 $w^{(\lambda)}_\sigma$ が，乗数因子以外は，関数

$$w^{(\lambda)}_\sigma(\boldsymbol{\nu})\sim D^{(s)}_{\lambda\sigma}(\boldsymbol{\nu})^* \tag{16.11}$$

と一致することに注目すれば，前と同じような公式がスピノール $w^{(\lambda)}$ に対しても得られる．事実，変換則 (a. 1) をスピンの固有関数に適用して，その ζ-投影が定まった値 λ を持つとすれば（すなわち(a. 1) の右辺で $\psi_{jm'}$ を$\delta_{m'\lambda}$ で取り替えて），われわれは $D^{(s)}_{\lambda\sigma}(\boldsymbol{\nu})$ が z- および ζ-投影の一定値（σ および λ）に対応するスピン波動関数であることがわかる．これらの関数の集まり（$\sigma=-s,\cdots\cdots,+s$）は（III (58. 1) の対応則にしたがって）$2s$ 階の共変スピノールを形成している．反変スピノールの成分（これは III (57. 2) の公式にしたがい成分 $w^{(\lambda)}_\sigma$ に対応する）は同じ階数の共変スピノールの成分の複素共役のように変換される．

(16. 10)，(16. 11) から

$$w^{(\lambda)}(-\boldsymbol{\nu}) = (-1)^{s-\lambda}w^{(-\lambda)}(\boldsymbol{\nu}) \tag{16.12}$$

となる（$s-\lambda$ は整数である）．反転の演算は $w^{(\lambda)}$ に適用すると $\boldsymbol{\nu}\to-\boldsymbol{\nu}$ の置き換えだけ

でなく，共通の位相因子 (粒子の ≪内部偶奇性≫) を掛けることからも成立している．これを η と書く．すなわち

$$\mathrm{P}w^{(\lambda)}(\boldsymbol{\nu}) = \eta w^{(\lambda)}(-\boldsymbol{\nu}) = \eta(-1)^{s-\lambda}w^{(-\lambda)}(\boldsymbol{\nu}) \tag{16.13}$$

となる．相対論的振幅では，この変換は

$$\mathrm{P}u^{(\lambda)}(\boldsymbol{k}) = \eta\beta u^{(\lambda)}(-\boldsymbol{k}) = \eta(-1)^{s-\lambda}u^{(-\lambda)}(\boldsymbol{k}) \tag{16.14}$$

の形に書かれる． ここで β は， $|\boldsymbol{p}|\to 0$ の極限でも残り， 成分 $u^{(\lambda)}$ に関する単位行列である．この行列が状態の量子数に依存しないことが重要であり，その意味で (16.13) と (16.14) の差は本質的ではない[1]．

(16.14) を (16.2) に適用して，状態の波動関数 $|\boldsymbol{n}\lambda\rangle$ の変換則を得る．すなわち

$$\mathrm{P}\psi_{\boldsymbol{n}\lambda}(\boldsymbol{\nu}) = \eta(-1)^{s-\lambda}\psi_{-\boldsymbol{n}-\lambda}(\boldsymbol{\nu}). \tag{16.15}$$

球形螺線状態に対しては，(16.10) と (16.14) を利用して，つぎの変換則を得る．

$$\mathrm{P}\psi_{jm\lambda}(\boldsymbol{\nu}) = \eta(-1)^{j-s}\psi_{jm-\lambda}(\boldsymbol{\nu}). \tag{16.16}$$

状態 ψ_{jm0} は (16.16) にしたがって自分自身に変換する．すなわち，一定の偶奇性を持っている． $\lambda\neq 0$ であれば，逆向きの螺線度を持った状態の重ね合わせのみが一定の偶奇性を持っている．すなわち

$$\psi^{(\pm)}_{jm|\lambda|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{jm\lambda}\pm\psi_{jm-\lambda}) \tag{16.17}$$

である．反転により

$$\mathrm{P}\psi^{(\pm)}_{jm|\lambda|}(\boldsymbol{\nu}) = \pm\eta(-1)^{j-s}\psi^{(\pm)}_{jm|\lambda|}(\boldsymbol{\nu}) \tag{16.18}$$

にしたがって，自分自身に変換される．

この節で，与えられた角運動量を持った自由粒子の状態の分類を行なったこと，そしてただ保存量だけを使い，(たとえば，光子の状態の分類のために §6，7 で使った) 軌道角運動量の概念に頼らないでこれを行なったことに注目しよう．

例としてスピン 1 の場合を考察しよう．静止系では，振幅 $u^{(\lambda)}$ (4-ベクトル) は 3 次元ベクトル $\boldsymbol{e}^{(\lambda)}$ になった．それはここでは振幅 $w^{(\lambda)}$ の役割を演じている．スピン 1 の演算

---

1) $s=1$ のときには，振幅 $u^{(\lambda)}$ は 4-ベクトル (16.21) である．このとき β は 4-ベクトルの指数について完全な単位行列である．すなわち，$\beta_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}$. また $s=\dfrac{1}{2}$ に対して (次章で見るように) $u^{(\lambda)}$ は双スピノールである．このとき位相因子 $\eta=i$ で，β はディラック行列 γ^0 である ((21.10) 参照)．

子のベクトル関数 $\boldsymbol{e}$ に対する作用は，公式

$$(\mathrm{s}_i \boldsymbol{e})_k = -i e_{ikl} e_l \tag{16.19}$$

で与えられる（III，§58，問題2）．したがって方程式（16.1）は

$$i[\boldsymbol{n}\boldsymbol{e}^{(\lambda)}] = \lambda \boldsymbol{e}^{(\lambda)} \tag{16.20}$$

の形をとる．（$\boldsymbol{n}$ 方向の ζ 軸を持つ $\xi\eta\zeta$ 座標系での）これの解は球面基底（7.14）[1] と一致する．すなわち

$$\boldsymbol{e}^{(0)} = i(0,0,1), \quad \boldsymbol{e}^{(\pm 1)} = \mp \frac{i}{\sqrt{2}}(1, \pm i, 0). \tag{16.21}$$

粒子が運動量 $\boldsymbol{p}$ を持つ基準系で，スピン状態の振幅は，つぎのような4-ベクトルである．

$$u^{(0)\mu} = \left(\frac{|\boldsymbol{p}|}{m}, \frac{\varepsilon}{m}\boldsymbol{e}^{(0)}\right), \quad u^{(\pm 1)\mu} = (0, \boldsymbol{e}^{(\pm 1)}). \tag{16.22}$$

もし $\boldsymbol{e}$ が極性ベクトルであれば，$\eta = -1$ である．このとき関数（16.17）（$s=1$ のときは3次元ベクトル）はつぎの偶奇性を持つ．

$$\psi^{(+)}_{jm|\lambda|} : P = (-1)^j,$$

$$\psi^{(-)}_{jm|\lambda|} : P = (-1)^{j+1},$$

$$\psi_{jm0} \ : P = (-1)^j.$$

球面ベクトルの定義（7.4）とくらべて，これらの関数は（位相因子を除いて），それぞれ $\boldsymbol{Y}^{(\text{電})}_{jm}$，$\boldsymbol{Y}^{(\text{磁})}_{jm}$，$\boldsymbol{Y}^{(\text{縦})}_{jm}$ と同一であることがわかる．位相因子を決めて（たとえば $\theta=0$ のときの値の比較により），つぎの等式を得る．

$$\boldsymbol{Y}^{(\text{電})}_{jm} = i^{j-1}\sqrt{\frac{2j+1}{8\pi}}(\boldsymbol{e}^{(1)} D^{(j)}_{1m} + \boldsymbol{e}^{(-1)} D^{(j)}_{-1m}),$$

$$\boldsymbol{Y}^{(\text{磁})}_{jm} = i^{j-1}\sqrt{\frac{2j+1}{8\pi}}(\boldsymbol{e}^{(1)\prime} D^{(j)}_{1m} + \boldsymbol{e}^{(-1)\prime} D^{(j)}_{-1m}), \tag{16.23}$$

$$\boldsymbol{Y}^{(\text{縦})}_{jm} = i^{j-1}\sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}}\ \boldsymbol{e}^{(0)} D^{(j)}_{0m}.$$

j は整数で，$\boldsymbol{e}^{(\lambda)\prime} = [\boldsymbol{n}\boldsymbol{e}^{(\lambda)}]$ は ζ 軸のまわりを 90° 回転させた $\xi'\eta'\zeta$-軸の球面基底である！

1）位相因子の選択は，固有関数（16.21）を使って計算されたスピンの行列要素が III §27．§107 の一般の定義に対応するという要求により決定される．

公式 (16.23) の最後の式は $d_{0m}^{(j)}(\theta)$ に対する式 (a.17) と同等である．公式の第1式（あるいは第2式）から関数 $d_{\pm 1m}^{(j)}$ に対する簡単な式を得ることができる．

$$i^{j-1}\sqrt{\frac{2j+1}{8\pi}}D_{\pm 1m}^{(j)}=Y_{jm}^{(電)}e^{(\pm 1)*}=\frac{1}{\sqrt{j(j+1)}}e^{(\pm 1)*}\Delta Y_{jm}.$$

この等式の右辺のスカラー乗積は $\xi\eta\zeta$- 系で展開する．このときは

$$\left(\frac{\partial}{\partial\xi},\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\longrightarrow\left(\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right).$$

関数 Y_{jm} の定義 (7.2) と定義 (16.5) を使い，その結果は

$$d_{\pm 1m}^{(j)}(\theta)=(-1)^{m+1}\sqrt{\frac{(j-m)!}{(j+m)!\,j(j+1)}}\left(\pm\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{m}{\sin\theta}\right)P_j^m(\cos\theta)\quad(m\geqslant 0).\quad(16.24)$$

第3章　フェルミオン

§17.　4次元スピノール

非相対論的理論では，任意のスピン s を持つ粒子は $(2s+1)$ 成分の量，すなわち $2s$ 階の対称スピノールで記述された．数学的観点から，これは空間の回転群の既約表現として現われる量である．

相対論的理論では，この群はより大きい4次元回転群，すなわちローレンツ群の部分群でしかない．これに関連して4次元スピノール（4-スピノール），すなわちローレンツ群の既約表現である量の理論を組み立てる必要性が生じた．その記述には§17～§19 が当てられる．そして§17，§18では空間反転を含まない固有ローレンツ群だけが考察され，空間反転は§19で考察される．

4-スピノールの理論は3次元スピノールと同様に組み立てられる(B. L. van der Waerden. 1929；G. E. Uhlenbeck，O. Laporté, 1931)．

スピノール ξ^{α} は2-成分量 $(\alpha=1,2)$ であり，スピン1/2の粒子の波動関数のように，ξ^1 および ξ^2 は，それぞれスピンの z-投影の固有値 $+1/2$ および $-1/2$ に対応している．(固有) ローレンツ群のすべての変換に際して，二つの量 ξ^1,ξ^2 は互いに変換する．すなわち

$$\begin{aligned}\xi^{1\prime} &= \alpha\xi^1+\beta\xi^2,\\ \xi^{2\prime} &= \gamma\xi^1+\delta\xi^2.\end{aligned} \tag{17.1}$$

係数 $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ は4-座標系の回転角の関数で，条件

$$\alpha\delta-\beta\gamma=1 \tag{17.2}$$

にしたがう．すなわち，2元変換 (17.1) の判別式は1に等しい．これはローレンツ群の座標変換の判別式と同様である．

条件 (17.2) のために双1次形式 $\xi^1\Xi^2-\xi^2\Xi^1$ (ここで ξ^{α} と Ξ^{α} は二つのスピノールであ

る）は変換（17.1）に対して不変である（それはスピン1/2の2粒子から≪合成された≫スピン0の粒子に対応する）．このような不変式を自然に書き表わすために，スピノールの≪反変≫成分 ξ^α とともに，≪共変≫成分 ξ_α もまた導入される．一方から他方への移行は≪計量スピノール≫ $g_{\alpha\beta}$[1] を使って行なうことができる．

$$\xi_\alpha = g_{\alpha\beta}\xi^\beta. \tag{17.3}$$

ここで

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{17.4}$$

である．したがって

$$\xi_1 = \xi^2, \quad \xi_2 = -\xi^1 \tag{17.5}$$

である．このとき不変量 $\xi^1\Xi^2-\xi^2\Xi^1$ はスカラー乗積 $\xi^\alpha\Xi_\alpha$ の形に書かれる．この際 $\xi^\alpha\Xi_\alpha = -\xi_\alpha\Xi^\alpha$ である．

いままで列挙した性質は，形式的には3次元スピノールの性質と一致する．しかしながら，複素共役スピノールの考察の際には違いが生じる．

非相対論的理論では，和

$$\psi^1\psi^{1*}+\psi^2\psi^{2*} \tag{17.6}$$

は空間における粒子の局所化の確率密度を定義し，スカラーでなければならない．その成分 $\psi^{\alpha*}$ はスピノールの共変成分のように変換されなければならない．言いかえれば，変換(17.1) はユニタリーでなければならない（$\alpha=\delta^*$, $\beta=-\gamma^*$）．相対論的理論では粒子の密度はスカラーではなく，4-ベクトルの時間成分である．これに関連して上記の要求はなくなり，変換係数にはいまや（(17.2) のほかに）なんらの条件も課されない．ただ一つの条件（17.2）があるとき四つの複素量 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は $8-2=6$ 個の実パラメータと同等であり，4-座標系の回転（六つの座標面内での回転）を定義する角度の数に対応している．

このようにして，複素共役二元変換はまったく別ものであることが明らかとなり，相対論的理論ではスピノールの二つの型が存在する．この型を区別するために特別な記号が使われる．すなわち，（17.1）に複素共役な公式にしたがって変換されるスピノールの添字はその上に点をつけた文字（点のある添字）の形で書かれる．このようにして，定義から

---

1) ここではスピノールの添字を，ギリシア語のアルファベットの初めの文字で表わそう．

$$\eta^{\dot{\alpha}} \sim \xi^{\alpha *}. \tag{17.7}$$

ここで～の記号は≪のように変換される≫ということを意味する．言いかえれば，≪点のある≫スピノールの変換則は

$$\eta^{\dot{1}\prime} = \alpha^* \eta^{\dot{1}} + \beta^* \eta^{\dot{2}}, \quad \eta^{\dot{2}\prime} = \gamma^* \eta^{\dot{1}} + \delta^* \eta^{\dot{2}}. \tag{17.8}$$

点のある添字を上下する演算は，点のない添字に対するのとまったく同様に行なわれて

$$\eta_{\dot{1}} = \eta^{\dot{2}}, \quad \eta_{\dot{2}} = -\eta^{\dot{1}}. \tag{17.9}$$

空間回転に関して4-スピノールのふるまいは，3-スピノールのふるまいと一致する．したがって，定義（17.7）により，回転に対し4-スピノールは反変3-スピノールと同様にふるまう．したがってスピン1/2の粒子の波動関数の成分と同様に，スピンの投影の固有値 1/2 および $-1/2$ は共変成分 $\eta_{\dot{1}}$ および $\eta_{\dot{2}}$ に対応する．

高階のスピノールは，いくつかの1階のスピノールの成分の積のように変換する量の集まりとして定義される．この際，高階のスピノールの添字のなかには点のあるのも，点のないのも同様に存在しうる．したがって2階のスピノールには，つぎの三つの型がある．

$$\xi^{\alpha\beta} \sim \xi^{\alpha} \Xi^{\beta}, \quad \zeta^{\alpha\dot{\beta}} \sim \xi^{\alpha} \eta^{\dot{\beta}}, \quad \eta^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \sim \eta^{\dot{\alpha}} H^{\dot{\beta}}.$$

この意味でスピノールの全階数を示すことだけでは，この概念の一意的な定義には不十分である．したがって，われわれは階数を数の対 (k, l)，すなわち点のない添字の数と，点のある添字の数の対で示す必要がある．

変換（17.1）と（17.8）は代数的には独立であるから，点のある添字と点のない添字の順序を定める必要はない（この意味でスピノール $\zeta^{\alpha\dot{\beta}}$ と $\zeta^{\dot{\beta}\alpha}$ は同一である）．

不変性を保つためには，すべてのスピノールの等式の両辺は，同数の点のない添字と点のある添字を含まねばならない．そうでないと，一つの基準系から他へ移る際に，それは成立しなくなる．この際，複素共役は点のある添字を点のない添字で置き換えたもの，およびその逆と考えてよい．したがって，この二つのスピノールのあいだには不変の関係式 $\eta^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = (\xi^{\alpha\beta})^*$ が成り立つ．

スピノールの縮約あるいは積は同種の添字対，すなわち二つの点のある添字あるいは点のない添字についてのみ行ないうる．異種の添字についての和は不変な演算ではない．したがって，k 個の点のない添字全部，および l 個の点のない添字全部について対称なスピノール

$$\zeta^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2\ldots\dot{\beta}_l} \tag{17.10}$$

から低階のスピノールを作りえない（スピノールがそれに関して対称であるような添字対での縮約は，0の結果を与えることを思い起こそう）．これは量（17.10）からは，変換群のすべてに対し，互いに変換しあう少数の一次結合を作りえないことを意味している．言いかえれば，対称4-スピノールは真正ローレンツ群の既約表現になっている．各既約表現は数の対(k,l)で与えられる．

スピノール添字はどれも二つの値をとるので，（17.10）のなかの数 $\alpha_1\alpha_2\cdots\cdots\alpha_k$ の本質的に異なった$k+1$個の選択（これらはそれぞれ0，1，2，……，k個の1と，それぞれk，$k-1$，……，0個の2とを含んでいる）と数 $\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2\cdots\cdots\dot{\beta}_l$ の$l+1$個の選択が存在する．したがって，(k,l)階の対称スピノールには合計$(k+1)(l+1)$個の独立な成分がある．これはそれが作る既約表現の次数である．

§18.　スピノールと4-ベクトルとの関係

点のある添字1個と点のない添字1個を持つスピノール $\zeta^{\alpha\dot{\beta}}$ は$2\times2=4$個の独立成分を持つ．4-ベクトルの成分も同じだけである．したがって，どちらも真正ローレンツ群の同一の既約表現を作ることは明らかであり，したがってその成分のあいだには一定の対応が存在する必要がある．

この対応を確立するために，まず第一に3次元の場合でのこれに似た対応に注目しよう．このときに純空間的回転に関しては，3-および4-スピノールのふるまいが同一であることが考慮されよう．

3次元のスピノール $\psi^{\alpha\beta}$ に対しては対応則が存在し（III，§58参照），ここではこれを

$$a_x=\frac{1}{2}(\psi^{22}-\psi^{11})=\frac{1}{2}(\psi^2_1+\psi^1_2),$$

$$a_y=-\frac{i}{2}(\psi^{22}+\psi^{11})=\frac{i}{2}(\psi^1_2-\psi^2_1),$$

$$a_z=\frac{1}{2}(\psi^{12}+\psi^{21})=\frac{1}{2}(\psi^1_1-\psi^2_2)$$

の形に書こう．ここで a_x,a_y,a_z はある3次元ベクトル $\boldsymbol{a}$ の成分である．4次元の場合に移るには，成分 ψ^α_β を $\zeta^{\alpha\dot{\beta}}$ に変え，a_x,a_y,a_z は4-ベクトルの反変成分 a^1,a^2,a^3 と考える必要がある．ベクトルの第4成分 a^0 に対する式に関しては，その形はすでに§17で指摘しておいた事情から明らかである．すなわち，量（17.6）は a^0 のように変換されなければ

ならない．したがって，$a^0 \sim \zeta^{1\dot{1}}+\zeta^{2\dot{2}}$ である．比例係数はスカラー $\zeta_{\alpha\dot{\beta}}\zeta^{\alpha\dot{\beta}}$ がスカラー $a_\mu a^\mu \equiv a^2$ と一致するように決められる．

このようにして，つぎの対応則へ到達する．

$$a^1 = \frac{1}{2}(\zeta^{1\dot{2}}+\zeta^{2\dot{1}}), \quad a^2 = \frac{i}{2}(\zeta^{1\dot{2}}-\zeta^{2\dot{1}}), \qquad a^3 = \frac{1}{2}(\zeta^{1\dot{1}}-\zeta^{2\dot{2}}), \quad a^0 = \frac{1}{2}(\zeta^{1\dot{1}}+\zeta^{2\dot{2}}). \tag{18.1}$$

逆の公式は

$$\zeta^{1\dot{1}} = \zeta_{2\dot{2}} = a^3+a^0, \qquad \zeta^{2\dot{2}} = \zeta_{1\dot{1}} = a^0-a^3, \qquad \zeta^{1\dot{2}} = -\zeta_{2\dot{1}} = a^1-ia^2, \quad \zeta^{2\dot{1}} = -\zeta_{1\dot{2}} = a^1+ia^2. \tag{18.2}$$

ここで

$$\zeta_{\alpha\dot{\beta}}\zeta^{\alpha\dot{\beta}} = 2a^2, \tag{18.3}$$

または

$$\zeta_{\alpha\dot{\beta}}\zeta^{\gamma\dot{\beta}} = \delta^\gamma_\alpha a^2 \tag{18.4}$$

であることも強調しよう．この最後の等式は，2階のスピノール $\zeta_{\alpha\dot{\beta}}\zeta^{\dot{\beta}}_{\gamma}$ は添字 $\alpha\gamma$ について反対称であり，したがって，計量スピノールに比例することから導かれる．

スピノール $\zeta^{\alpha\dot{\beta}}$ と4-ベクトルの関係は，一般法則の特別な場合である．すなわち(k,k)階の対称スピノールは，すべて k 階の対称既約（すなわち任意の添字の対で縮約すると0になる）4-テンソルと同等である．

スピノールと4-ベクトルとのあいだの関係は，2行2列のパウリ行列[1]

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{18.5}$$

を使うことにより，まとまった形に書くことができる．もしも，上に添字のある（そこで第一の添字は点のないものとする）量 $\zeta^{\alpha\dot{\beta}}$ の行列を記号的に $\boldsymbol{\zeta}$ でもって表わすと，公式(18.2) は

$$\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{a\sigma} + a^0 \tag{18.6}$$

の形に書き表わされる（第2項は a^0 と単位ベクトルとの積と理解することにする）．逆の

1) IIIでわれわれは行列 $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma}/2$ を使った．

公式は

$$\boldsymbol{a} = \frac{1}{2}\mathrm{Sp}(\zeta\boldsymbol{\sigma}), \quad a^0 = \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\,\zeta. \tag{18.7}$$

公式 (18.6), (18.7) を使って4-ベクトルとスピノールの変換則を確立し，それにより4-座標系の回転のパラメータを使ってスピノールの変換則を表わすことができる.

スピノール ξ^α の変換を

$$\xi^{\alpha\prime} = (\mathrm{B}\xi)^\alpha, \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \tag{18.8}$$

の形に書こう．ここでBは2行2列の行列で，二元変換の係数からできている．このとき点のあるスピノールの変換は

$$\eta^{\dot\beta\prime} = (\mathrm{B}^*\eta)^{\dot\beta} = (\eta\mathrm{B}^+)^{\dot\beta}. \tag{18.9}$$

そして2階のスピノール $\zeta^{\alpha\dot\beta}\sim\xi^\alpha\eta^{\dot\beta}$ の変換は記号的に $\zeta' = \mathrm{B}\zeta\mathrm{B}^+$ [1]と書こう．λ が小さい行列のとき，無限小変換 $\mathrm{B} = 1+\lambda$ に際して，1次の微小量までの精度では

$$\zeta' = \zeta + (\lambda\zeta + \zeta\lambda^+). \tag{18.10}$$

最初に，(空間軸の方向を変えないで) 無限小の速度 $\delta\boldsymbol{V}$ で運動している基準系に対するローレンツ変換を考えよう．このとき4-ベクトル $a^\mu = (a^0, \boldsymbol{a})$ は

$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a} - a^0\delta\boldsymbol{V}, \quad a^{0\prime} = a^0 - \boldsymbol{a}\delta\boldsymbol{V} \tag{18.11}$$

にしたがって変換される．ここで公式 (18.7) を使おう．a^0 の変換は一面では

$$a^{0\prime} = a^0 - \boldsymbol{a}\delta\boldsymbol{V} = a^0 - \frac{1}{2}\mathrm{Sp}(\zeta\boldsymbol{\sigma}\delta\boldsymbol{V}).$$

他の一面では

$$a^{0\prime} = \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\,\zeta' = a^0 + \frac{1}{2}\mathrm{Sp}(\lambda\zeta + \zeta\lambda^+) = a^0 + \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\,\zeta(\lambda + \lambda^+).$$

この2式はまったく (すなわち任意の ζ に対して)一致しなければならない．したがって，つぎの等式が見いだされる.

$$\lambda + \lambda^+ = -\boldsymbol{\sigma}\delta\boldsymbol{V}.$$

同様な方法で $\boldsymbol{a}$ の変換を考慮し

---

1) 共変成分に対しては

$$\xi'_\alpha = (\tilde{\mathrm{B}}^{-1}\xi)_\alpha = (\xi\mathrm{B}^{-1})_\alpha, \quad \eta'_{\dot\alpha} = (\eta\mathrm{B}^{*-1})_{\dot\alpha} \tag{18.8a}$$

となる (これは2個のスピノールの積 $\xi_\alpha\Xi^\alpha$ が不変になるようになっている).

$$\boldsymbol{\sigma}\lambda+\lambda^{+}\boldsymbol{\sigma} = -\delta\boldsymbol{V}.$$

これらの等式はλに対する方程式としてつぎの解を持つ.

$$\lambda = \lambda^{+} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\delta\boldsymbol{V}.$$

このようにしてスピノール ξ^{α} の無限小ローレンツ変換は，行列

$$\mathrm{B} = 1-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma n})\delta V \tag{18.12}$$

となる．ここで $\boldsymbol{n}$ は，速度 $\delta\boldsymbol{V}$ 方向の単位ベクトルである．これから有限の速度の変換を容易に見いだすことができる．このためには，ローレンツ変換が（幾何学的には）4座標系の平面 $\boldsymbol{t},\boldsymbol{n}$ 内での角度 φ の回転を意味することを思い起こそう． ここで角度 φ は等式 $\tanh\varphi = V$[1] で V と結びついている． 無限小変換は角度 $\delta\varphi = \delta V$ に対応し， 有限角 φ の回転は角 $\delta\varphi$ の回転の $\varphi/\delta\varphi$ 回の繰り返しで実現される．演算子 (18.12) を $\varphi/\delta\varphi$ 乗して $\delta\varphi\to 0$ の極限に移ると

$$\mathrm{B} = e^{-\frac{\varphi}{2}\boldsymbol{n\sigma}} \tag{18.13}$$

を得る．パウリ行列の性質にしたがって，$\boldsymbol{n\sigma}$ の偶数冪はすべて1に等しく，奇数冪がすべて $\boldsymbol{n\sigma}$ に等しいことに注意すると，この演算子の作用の数学的意味は明らかになる．cosh が引数の偶数冪，sinh が奇数冪に展開されることを考えると，最終的に

$$\mathrm{B} = \cosh\frac{\varphi}{2}-\boldsymbol{n\sigma}\sinh\frac{\varphi}{2},\quad \tanh\varphi = V \tag{18.14}$$

を得る．ローレンツ変換の行列Bがエルミートであること，すなわち $\mathrm{B} = \mathrm{B}^{+}$ を強調しておこう．

今度は空間座標系の無限小回転を考察しよう．このとき3次元ベクトル $\boldsymbol{a}$ は

$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a}-[\delta\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{a}] \tag{18.15}$$

にしたがって変換される．ここで $\delta\boldsymbol{\theta}$ は無限小回転角のベクトルである．スピノールのこれに対応する変換も同様にして見いだしうるはずである．しかしながらその必要はない．それは，空間回転に関して4-スピノールのふるまいは，3-スピノールのふるまいと一致し，後者の変換に対してはすでに，スピン演算子と無限小回転の演算子の一般的関係式

$$\mathrm{B} = 1+\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}\delta\boldsymbol{\theta} \tag{18.16}$$

---

1) 時間軸を含む平面内では，計量は擬ユークリッドであることを思い出そう．

が知られているからである．有限角 θ の回転への移行は，(18.12) から (18.14) への移行と同様に行なわれ

$$B=\exp\left(\frac{i\theta}{2}\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma}\right)=\cos\frac{\theta}{2}+i\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma}\,\sin\frac{\theta}{2} \tag{18.17}$$

になる．ここで $\boldsymbol{n}$ は回転軸の基底である．空間回転として当然のことながら，この行列はユニタリー ($B^{+}=B^{-1}$) である．

§19. スピノールの反転

スピノールの3次元理論（III参照）の記述において，われわれは空間反転の演算に対する性質は考えなかった．それは非相対論的理論では，なんらの新しい物理的結果を導かなかったからである．しかし今度は，4-スピノールの反転の性質の以下の考察を一層解明するために，この問題をさらに詳しく述べよう．

反転の演算は軸性ベクトルの符号を変えない．またスピン・ベクトルも同様である．したがって，その投影 s_z の値も変えない．これから反転に際してスピノールの各成分 ψ^α は自分自身だけに変換されること，すなわち P を定数として

$$\psi^\alpha \longrightarrow P\psi^\alpha \tag{19.1}$$

でなければならないことが導かれる．反転を2回行なうと，始めの座標系にもどる．しかしながらスピノールの場合には，始めの姿勢にもどることは二つの異なった意味に理解することができる．すなわち系の0°あるいは360°の回転としてである．スピノールに対してこれら二つの定義は同等ではない．なぜかというと，ψ^α は360°の回転に際し符号を変えるからである．このようにして，二つの二者択一の反転の概念が可能である．一つの場合には

$$P^2=1,\quad P=\pm 1 \tag{19.2}$$

であり，他の場合には

$$P^2=-1,\quad P=\pm i. \tag{19.3}$$

この際，だいじなことはすべてのスピノールに対して反転の概念が同じに定義される必要があることである．異なるスピノールが反転に際し（(19.2) あるいは (19.3) にしたがって）別々の方式で自分自身にもどることは許されない．なぜかというと，そのときにはどの二つのスピノールからもスカラー（あるいは擬スカラー）を作ることができないから

である．すなわち，もしもスピノールψ^αが(19.2)にしたがって変換され，φ^αが(19.3)にしたがうとすると，$\psi^\alpha\varphi_\alpha$という量は反転に際して，不変のままでいる（または符号だけを変える）代りに，$\pm i$が掛かるからである．

また，つぎのことも強調しておかねばならない．すなわち，（任意の反転の定義に際し）一定の偶奇性Pをスピノールに与えることは絶対的な意味を持たない．それはスピノールは2πの回転で符号を変え，その回転はいつも反転と同時に行なうことができるからである．しかしながら，2個のスピノールの《相対的偶奇性》は，それから作ったスカラー$\psi^\alpha\varphi_\alpha$の偶奇性から定義され，絶対的な性質を持っている．$2\pi$の回転に際してすべてのスピノールは符号を変えるので，それに伴う不定性は上記のスカラーの偶奇性には反映しない．

今度は4次元のスピノールに目を移そう．

反転は四つの座標(t, x, y, z)のなかの(x, y, z)だけの符号を変えるので，それは空間回転と可換であるが，t軸を回すような変換とは可換でない．Lを，速度$\boldsymbol{V}$で動いている基準系に対するローレンツ変換とすると，$\mathrm{PL}=\mathrm{L'P}$である．ここで$\mathrm{L'}$は，$-\boldsymbol{V}$で動いている系に対する変換である．

これから，4-スピノールの成分ξ^αは反転に際して自分自身には変換されないことが導かれる．もしもスピノールξ^αの反転があらかじめ変換(19.1)（すなわち単位行列に比例する行列で表わされるはずだが）のなかに含まれれば，それは一般のローレンツ変換のすべてと交換するだろう．しかしもちろんそうなってはならない（なぜならば，演算Lおよび$\mathrm{L'}$は，ξ^αに適用すると，もちろん一致しないからである）．

このようにして，反転はスピノール成分ξ^αを別の量に変換するはずである．その変換性がξ^αとは一致しない他のスピノール成分$\eta^{\dot\alpha}$だけがこのようなものでありうる．反転は（前に強調したように）スピンのz-投影を変えないので，成分ξ^1およびξ^2は反転に際し成分$\eta_{\dot 1}$および$\eta_{\dot 2}$にのみ移りうる．これらは$s_z=1/2$および$s_z=-1/2$に対応している．反転を，2度繰り返すと1を与える演算子と考えて，その作用を公式

$$\xi^\alpha \longrightarrow \eta_{\dot\alpha}, \quad \eta_{\dot\alpha} \longrightarrow \xi^\alpha \tag{19.4}$$

で定義することができる（共変成分ξ_αおよび反変成分$\eta^{\dot\alpha}$に対して，この変換は逆符号を持つ．すなわち

$$\xi_\alpha \longrightarrow -\eta^{\dot\alpha}, \quad \eta^{\dot\alpha} \longrightarrow -\xi_\alpha. \tag{19.4a}$$

同じ添字の上げ下げが，異なった符号を伴って行なわれるようになっている．(17.5)および (17.9) 参照)[1]．もしも反転を $P^2=-1$ の意味に理解すれば，その作用は公式

$$\xi^\alpha \longrightarrow i\eta_{\dot\alpha}, \quad \eta_{\dot\alpha} \longrightarrow i\xi^\alpha \tag{19.5}$$

あるいは，同じことだが

$$\xi_\alpha \longrightarrow -i\eta^{\dot\alpha}, \quad \eta^{\dot\alpha} \longrightarrow -i\xi_\alpha \tag{19.5a}$$

によって定義される．

二つの反転の定義の性質のいくつかの相違はつぎの点にある．すなわち第二の定義では複素共役スピノールは同じように変換することである．もしも $\Xi_\alpha=\eta^*_{\dot\alpha}$, $H^{\dot\alpha}=\xi^{\alpha *}$ であれば，(19.5) から $\Xi_\alpha \to -iH^{\dot\alpha}$, $H^{\dot\alpha} \to -i\Xi_\alpha$, すなわち ξ_α, $\eta^{\dot\alpha}$ に対するのと同じ法則である．(19.4) の定義では，スピノール ξ_α, $\eta^{\dot\alpha}$ の変換と符号が逆の変換 $\Xi_\alpha \to H^{\dot\alpha}$, $H^{\dot\alpha} \to \Xi_\alpha$ を得る．この相違の物理的な様相にわれわれは §27 でたちもどるであろう．

以下明確を期するために，われわれはいつも定義 (19.5) を考えることにしよう．

回転の部分群に関して，われわれもよく知っているように，ξ^α と $\eta_{\dot\alpha}$ は同じ変換をする．その成分から結合

$$\xi^\alpha \pm \eta_{\dot\alpha} \tag{19.6}$$

を作って，反転に際し $P=\pm i$ を使った (19.1) にしたがって変換する量が得られる．しかしながら，この結合はローレンツ群のすべての変換に関して，スピノールのようにはふるまわない．

このようにして対称群に反転を含めることは，同時にスピノールの対 $(\xi^\alpha, \eta_{\dot\alpha})$ を考察することを要求している．このような対を（1階の）**双スピノール**と呼ぶ．双スピノールの四つの成分は拡大ローレンツ群の既約表現になっている．

二つの双スピノール $(\xi^\alpha, \eta_{\dot\alpha})$ および $(\Xi^\alpha, H_{\dot\alpha})$ のスカラー積は二つの方法で作ることができる．量

$$\xi^\alpha \Xi_\alpha + \eta_{\dot\alpha} H^{\dot\alpha} \tag{19.7}$$

---

1) 結局，定義 (19.4) はある意味で制限つきである．それは ξ^α および $\eta_{\dot\alpha}$ という量が独立であることと結びついている．なぜなら，$\eta_{\dot\alpha}$ の代りに新しいスピノール $\eta'_{\dot\alpha} = e^{i\delta}\eta_{\dot\alpha}$ を導入して，(19.4)の代りに同等な定義

$$\xi^\alpha \to e^{-i\delta}\eta'_{\dot\alpha}, \quad \eta'_{\dot\alpha} \to e^{i\delta}\xi^\alpha$$

を得る．

は反転に際し変わらない．すなわち真正スカラーである．いっぽう，量

$$\xi^{\alpha}\Xi_{\alpha}-\eta_{\dot{\alpha}}H^{\dot{\alpha}} \tag{19.8}$$

は4-座標系の回転に関しても不変であるが，反転に際して符号を変える．言いかえれば擬スカラーである．

2階のスピノールもまた二つの方法で定義することができる．変換則

$$\zeta^{\alpha\dot{\beta}}\sim\xi^{\alpha}H^{\dot{\beta}}+\Xi^{\alpha}\eta^{\dot{\beta}} \tag{19.9}$$

によってそれを定義すると，反転に際し

$$\zeta^{\alpha\dot{\beta}}\longrightarrow\zeta_{\dot{\alpha}\beta} \tag{19.10}$$

にしたがって変換する量を得る．この際このようなスピノールと同等な4-ベクトル a^{μ} は(公式 (18.1) に対応して)，$(a^0, \boldsymbol{a})\longrightarrow(a^0, -\boldsymbol{a})$ にしたがって変換される．すなわち真正4-ベクトルである（そして3次元ベクトル $\boldsymbol{a}$ は極性ベクトルである）．

しかしながら，$\zeta^{\alpha\dot{\beta}}$ はまた

$$\zeta^{\alpha\dot{\beta}}\sim\xi^{\alpha}H^{\dot{\beta}}-\Xi^{\alpha}\eta^{\dot{\beta}} \tag{19.11}$$

にしたがって定義することもできる．このとき[1)]

$$\zeta^{\alpha\dot{\beta}}\longrightarrow-\zeta_{\dot{\alpha}\beta}. \tag{19.12}$$

このようなスピノールは，反転が変換 $(a^0, \boldsymbol{a})\longrightarrow(-a^0, \boldsymbol{a})$ に対応するような4-ベクトル，すなわち4-擬ベクトル（3次元ベクトル $\boldsymbol{a}$ が軸性である）に対応する．

同じ形の添字を持った2階の対称スピノールは変換則

$$\xi^{\alpha\beta}\sim\xi^{\alpha}\Xi^{\beta}+\xi^{\beta}\Xi^{\alpha},\quad \eta_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\sim\eta_{\dot{\alpha}}H_{\dot{\beta}}+\eta_{\dot{\beta}}H_{\dot{\alpha}} \tag{19.13}$$

により定義される．反転に際して，これらは互いに移りあう．すなわち

$$\xi^{\alpha\beta}\longrightarrow-\eta_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}. \tag{19.14}$$

$(\xi^{\alpha\beta}, \eta_{\dot{\alpha}\dot{\beta}})$ の対は2階の双スピノールを形成している．その独立成分の数は $3+3=6$ に等しい．2階の反対称4-テンソル $a^{\mu\nu}$ もそれと同じだけの独立成分を持っている．したがって，これらのあいだにある一定の対応がなければならない（二つとも拡大ローレン

---

1) つぎのことを強調しておこう．右辺の符号が異なっている変換則 (19.10) および (19.12) はけっして同等でない．なぜかというと，その両辺は同じスピノールの成分からなっているからである (80頁，脚注参照)．

ツ群の同値な既約表現になっている).

真正ローレンツ群に関してスピノール $\xi^{\alpha\beta}$ と $\eta_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ は独立に変換されるので，4-テンソル $a^{\mu\nu}$ の成分からは，すべての4-座標系の回転に際し相互間にのみ変換される量の組を二つ作ることができる．この分割はつぎのようにして行なわれる．

4-テンソルの成分 $a^{\mu\nu}$ と

$$a^{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & p_x & p_y & p_z \\ -p_x & 0 & -a_z & a_y \\ -p_y & a_z & 0 & -a_x \\ -p_z & -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix}\equiv(\boldsymbol{p},\boldsymbol{a}) \tag{19.15}$$

にしたがって結びつけられる，3次元の極性ベクトル $\boldsymbol{p}$ と3次元の軸性ベクトル $\boldsymbol{a}$ を導入しよう（$(\boldsymbol{p},\boldsymbol{a})$ は略号で，われわれはこのようなテンソル成分を列挙するのに使うことにしよう）．この際 $a_{\mu\nu}=(-\boldsymbol{p},\boldsymbol{a})$ であり，この二つの量から

$$\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{p}^2=\frac{1}{2}a_{\mu\nu}a^{\mu\nu},\quad \boldsymbol{a}\boldsymbol{p}=\frac{1}{8}e_{\mu\nu\rho\sigma}a^{\mu\nu}a^{\rho\sigma}.$$

1番目はスカラーで，2番目は擬スカラーである．固有ローレンツ群に関してどちらも不変である．これらとともに3次元ベクトル $\boldsymbol{f}^{\pm}=\boldsymbol{p}\pm i\boldsymbol{a}$ の平方もまた不変である．これはつぎのような意味を持つ．4-空間のすべての回転はベクトル $\boldsymbol{f}^{\pm}$ に対して，3次元空間の≪回転≫，一般には複素数の角度だけの回転（3次元座標系の三つの複素≪回転角≫は4-空間の六つの回転角に対応する）と同等である．$\boldsymbol{p}$ の符号を変える（$\boldsymbol{a}$ は変えない）空間反転の演算は，ベクトル $\boldsymbol{f}^{+}$ と $-\boldsymbol{f}^{-}$ を互いに移しあう．これらのベクトルの成分はテンソル成分 $a^{\mu\nu}$ から作られた，求める2組の量から成り立っている．

これにより，4-テンソルの成分 $a^{\mu\nu}$ と，スピノール成分 $\xi^{\alpha\beta},\eta_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ とのあいだの対応もまた明らかになる．ローレンツ群には空間回転が部分群として含まれるので，スピノール成分と3次元ベクトルの成分のあいだの関係は，3次元スピノールに対するものとまったく同じでなければならない．すなわち

$$\begin{gathered} f_x^+=\frac{1}{2}(\xi^{22}-\xi^{11}),\quad f_y^+=-\frac{i}{2}(\xi^{22}+\xi^{11}),\quad f_z^+=\xi^{12}; \\ f_x^-=\frac{1}{2}(\eta_{\dot{2}\dot{2}}-\eta_{\dot{1}\dot{1}}),\quad f_y^-=-\frac{i}{2}(\eta_{\dot{2}\dot{2}}+\eta_{\dot{1}\dot{1}}),\quad f_z^-=\eta_{\dot{1}\dot{2}}. \end{gathered} \tag{19.16}$$

問　　題

偶数階のスピノールと4-テンソルのあいだの一般的関係を確立せよ．

解　$k+l$ が偶であるスピノールは拡大ローレンツ群の一意的な既約表現になっている．したがって，同様な既約表現になっている 4-テンソルと同値である．[1]

反転に対して (k, k) 階のスピノールは　つぎの式にしたがって変換する．

$$\zeta^{\alpha\beta\ldots\dot{\gamma}\dot{\delta}\ldots} \longrightarrow \pm\, \zeta_{\dot{\alpha}\dot{\beta}\ldots\gamma\delta\ldots}\,. \tag{1}$$

このようなスピノールは，(1) の符号依存性で k 階の――真正あるいは擬――対称既約 4-テンソルと同等である．

双スピノールを形成する (k, l) および (l, k) 階のスピノールは，反転に際し

$$\zeta^{\overbrace{\alpha\beta\ldots}^{k}\overbrace{\dot{\gamma}\dot{\delta}\ldots}^{l}} \longrightarrow (-1)^{\frac{k-l}{2}}\chi_{\underbrace{\dot{\alpha}\dot{\beta}\ldots}_{k}\underbrace{\gamma\delta\ldots}_{l}} \tag{2}$$

にしたがって変換される．$l=k+2$ のときには添字 $[\mu\nu]$ について反対称で，他の残りの添字のすべてに対して対称な $k+2$ 階の既約 4-テンソル $a_{[\mu\nu]\rho\sigma\ldots}$ と同等である．このテンソルが既約であるということは，これが添字の任意の対に関して縮約すると 0 を与えること，および任意の三つの添字に関する対偶変換に対して 0 になる（すなわち，$e^{\lambda\mu\nu\rho}a_{[\mu\nu]\rho\sigma\ldots}=0$）であることを意味する．後の条件は三つの添字―― $\mu\nu$ および残りの内の任意一つ ―― についての循環和をとると，このテンソルが 0 になることを意味する．

$l=k+4$ のときには双スピノールはつぎの性質を有する．$k+4$ 階の既約 4-テンソル $a_{[\lambda\mu][\nu\rho]\sigma\tau\ldots}$ と同等である．すなわち，これは添字の対 $[\lambda\mu]$ および $[\nu\rho]$ に関して反対称，残りのすべてに関して対称，添字対 $[\lambda\mu]$ と添字対 $[\nu\rho]$ の交換に関して対称，任意の添字対の縮約に際して 0，任意の 3 個の添字の対偶変換に際して 0 になるようなものである．

一般に $l=k+2n$ のときに双スピノールは，n 個の添字対に関して反対称で，残りの k 個の添字[2] に関して対称であるような $k+2n$ 階の既約 4-テンソルと同等である．

---

1)　奇数階のスピノールは，群の 2 価表現で現われる．つまり360°の空間回転はスピノールの符号を変える．したがって，群の各要素は反対符号の二つの行列に対応する．

2)　多数（3 個，4 個，その他）の添字に関して反対称な 4-テンソルは，はっきりした理由があってこの分類では現われてこない．すなわち 3 階の反対称テンソルは擬ベクトルと同等（対偶）であり，4 階の反対称テンソルはスカラー（単位擬テンソル $e^{\lambda\mu\nu\rho}$ に比例する）に帰する．4-空間でさらに多数の添字に関して反対称ということは一般に不可能である．

§ 20. スピノール表示でのディラック方程式

スピン1/2を持つ粒子は，その静止系で2成分の波動関数，すなわち3次元スピノールで記述される．その《4次元的起源》にしたがって，それは点のない4-スピノールであっても，点のある4-スピノールであってもよい．任意の基準系での粒子の記述には，このような二つの4-スピノールがある．これを ξ^{α} および $\eta_{\dot{\alpha}}$ で表わそう[1]．

自由粒子に対して，波動方程式に現われる唯一の演算子は4-運動量演算子 $p_{\mu}=i\partial_{\mu}$ である（これはすでに § 10 で示されている）．スピノール記法ではこの4-ベクトルはスピノール演算子 $p_{\alpha\dot{\beta}}$ に対応する．ここで

$$\begin{aligned} p^{1\dot{1}} &= p_{2\dot{2}} = p_z+p_0, & p^{2\dot{2}} &= p_{1\dot{1}} = p_0-p_z, \\ p^{1\dot{2}} &= -p_{2\dot{1}} = p_x-ip_y, & p^{2\dot{1}} &= -p_{1\dot{2}} = p_x+ip_y. \end{aligned} \tag{20.1}$$

波動方程式は，演算子 $p_{\alpha\dot{\beta}}$ を使って作られるスピノール成分のあいだの線型微分関係式である．相対論的不変性の要求はつぎの連立方程式を決定する．

$$\begin{aligned} p^{\alpha\dot{\beta}}\eta_{\dot{\beta}} &= m\xi^{\alpha}, \\ p_{\dot{\beta}\alpha}\xi^{\alpha} &= m\eta_{\dot{\beta}}. \end{aligned} \tag{20.2}$$

ここで m は大きさの定数である．これら二つの方程式に異なる定数 m_1 および m_2 を導入する（あるいは m の前の符号を変える）ことは意味がない．なんとなれば，ξ^{α} あるいは $\eta_{\dot{\alpha}}$ の適当な定義のやり直しにより，方程式はすべて等しく前記の形に導くことができるはずだからである．

第2式の $\eta_{\dot{\beta}}$ を第1式に代入して，方程式 (20.2) から2個のスピノールのなかの1個を消去しよう．すなわち

$$p^{\alpha\dot{\beta}}\eta_{\dot{\beta}} = \frac{1}{m}p^{\alpha\dot{\beta}}p_{\gamma\dot{\beta}}\xi^{\gamma} = m\xi^{\alpha}.$$

ところが (18.4) により $p^{\alpha\dot{\beta}}p_{\gamma\dot{\beta}} = p^2\delta^{\alpha}_{\gamma}$ である．したがって

$$(p^2-m^2)\xi^{\gamma} = 0 \tag{20.3}$$

を得る．ここから m が質量であることがわかる．

質量を波動方程式に導入する必要性は2個のスピノール（ξ^{α} と $\eta_{\dot{\alpha}}$）の同時考察を要求

---

1) 1階の3次元スピノールはまた，その静止系で1個あるいは何個かの添字対に関して反対称な，より高い奇数階の4-スピノールから《生じる》ことができる．しかしながらこのような変形はより高次の方程式へ導くだろう（41頁の脚注参照）．

することに注意を向けよう．すなわち，これらの内のただ一つだけを使ったのでは，なんらかの大きさのパラメータを含むような相対論的に不変な方程式を作ることができない．もしも波動関数の変換を

$$\mathrm{P}:\ \xi^{\alpha} \longrightarrow i\eta_{\dot{\alpha}},\quad \eta_{\dot{\alpha}} \longrightarrow i\xi^{\alpha} \tag{20.4}$$

のように定義すると，波動方程式自身が自動的に空間反転に関して不変であることがわかる．このような置き換え（および (20.1) の公式から明らかなように，$\mathrm{p}^{\alpha\dot{\beta}} \rightarrow \mathrm{p}_{\alpha\dot{\beta}}$ の置き換え）に際して，(20.2) の二つの方程式は互いに移りあう．反転に際し互いに移りあう 2 個のスピノールは 4 成分量，すなわち双スピノールを形成する．

(20.2) の系で記述される相対論的波動方程式は**ディラック方程式**と呼ばれる（これはディラックにより 1928 年に確立された）．この方程式の将来の研究および応用のために，この方程式を表わす種々の形を考察しよう．

公式 (18.6) を使って方程式 (20.2) を

$$\begin{aligned}(\mathrm{p}_0 + \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma})\eta &= m\xi,\\ (\mathrm{p}_0 - \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma})\xi &= m\eta\end{aligned} \tag{20.5}$$

の形に書き直そう．ここで ξ および η は 2 成分量，すなわちスピノール

$$\xi = \begin{pmatrix}\xi^1\\ \xi^2\end{pmatrix},\quad \eta = \begin{pmatrix}\eta_{\dot{1}}\\ \eta_{\dot{2}}\end{pmatrix} \tag{20.6}$$

である（一番目のは上の添字，二番目のは下の添字を持つ）．これ以後は，任意の 2 成分量 f に行列 σ を掛けるとき，普通のマトリックスの法則にしたがった乗算

$$(\sigma f)_{\alpha} = \sigma_{\alpha\beta} f_{\beta} \tag{20.7}$$

と考えるものとする．ここで縦の列 $\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\end{pmatrix}$ の形に f を書くのは σ の各行が f の列に掛けあわされることに対応している．

将来の引用を便利にするために，ここでいま一度パウリ行列

$$\sigma_x = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad \sigma_y = \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix},\quad \sigma_z = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \tag{20.8}$$

を書き出し，その基本的性質

$$\begin{aligned}\sigma_i\sigma_k + \sigma_k\sigma_i &= 2\delta_{ik},\\ \sigma_i\sigma_k &= ie_{ikl}\sigma_l + \delta_{ik}\end{aligned} \tag{20.9}$$

を思い起こそう (III, §55参照).

スピノール

$$\xi^* = (\xi^{1*}, \xi^{2*}), \quad \eta^* = (\eta_{\dot 1}^*, \eta_{\dot 2}^*) \tag{20.10}$$

から成り立っている複素共役波動関数が満足すべき波動方程式もまた書いておこう．すべての演算子 p_μ は因子 i を含んでいるので $p_\mu^* = -p_\mu$ である．方程式 (20.5) の両辺の複素共役をとるときには，行列 σ のエルミート性 ($\sigma^* = \tilde{\sigma}$) のために

$$(\sigma f)_\alpha^* = \sigma_{\alpha\beta}^* f_\beta^* = f_\beta^* \sigma_{\beta\alpha} = (f^* \sigma)_\alpha$$

であることも考慮する必要がある．そしてわれわれは

$$\begin{aligned} \eta^*(p_0 + \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma}) &= -m\xi^*, \\ \xi^*(p_0 - \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma}) &= -m\eta^* \end{aligned} \tag{20.11}$$

の形の方程式を得る．この書き方では，演算子 p^μ はその左にある関数に作用するものと了解される約束になっている．ξ^* および η^* を横の列に書くのは，この方程式での行列の乗算に対応している．すなわち

$$(f^* \sigma)_\alpha = f_\beta^* \sigma_{\beta\alpha}. \tag{20.12}$$

ξ^*, η^* に対する反転変換は変換 (20.4) の複素共役として定義される．すなわち

$$\mathrm{P} : \xi^{\alpha *} \longrightarrow -i\eta_{\dot\alpha}^*, \quad \eta_{\dot\alpha}^* \longrightarrow -i\xi^{\alpha *}. \tag{20.13}$$

§21.　ディラック方程式の対称形

ディラック方程式のスピノール型の書き方は，それが直接相対論的不変性を持つ意味では非常に自然である．しかしながら応用にあたっては，波動関数の四つの独立成分の他の選び方で得られる，波動方程式の別の表わし方がさらにつごうがよいことを示せる．

4成分波動関数を (ψ_i; $i = 1, 2, 3, 4$ を持った) ψ で表わすことにしよう．スピノール表示でこれは双スピノール

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \tag{21.1}$$

である．しかしまったく同等に，ψ の独立成分としてスピノール ξ および η[1] の成分の任

1) 簡単のために4成分量 ψ というときには，双スピノールとしていうときも，またスピノールでない表示でいうときもある．

意の一次独立な結合を選ぶこともできる．この際，許しうる1次変換をただユニタリー性の要求だけで制限すると約束しよう．このような変換は ψ と ψ^* から成り立っている双1次形式 (§28) を変えない．

ψ の成分を任意に選んだ一般の場合，ディラック方程式は

$$\mathrm{p}_\mu \gamma^\mu_{ik} \psi_k = m\psi_i$$

の形に表わすことができる．ここで $\gamma^\mu (\mu = 0, 1, 2, 3)$ は4行4列の行列（ディラック行列）である．われわれは普通，行列の添字を落としてこの方程式を記号的に書く．すなわち

$$(\gamma \mathrm{p} - m)\psi = 0. \tag{21.2}$$

ここで

$$\gamma \mathrm{p} \equiv \gamma^\mu \mathrm{p}_\mu = \mathrm{p}_0 \gamma^0 - \mathbf{p}\boldsymbol{\gamma} = i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\boldsymbol{\gamma}\nabla, \quad \boldsymbol{\gamma} = (\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3).$$

したがって，(21.1) の ψ の成分のスピノール型の方程式は，行列[1]

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \tag{21.3}$$

に対応する．これは方程式 (20.5) を

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{p}_0 + \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma} \\ \mathrm{p}_0 - \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

の形に書いて，(21.2) とくらべれば容易にわかる．

一般の場合に，行列 γ は等式 $\mathrm{p}^2 = m^2$ を保証するような条件だけを満足しなければならない．この条件を明らかにするため，方程式 (21.2) の左から $\gamma\mathrm{p}$ を掛ける．

$$(\gamma^\mu \mathrm{p}_\mu)(\gamma^\nu \mathrm{p}_\nu)\psi = m(\gamma^\mu \mathrm{p}_\mu)\psi = m^2\psi.$$

$\mathrm{p}_\mu \mathrm{p}_\nu$ は対称テンソル（すべての p_μ は可換）であるから，この等式を

$$\frac{1}{2}\mathrm{p}_\mu \mathrm{p}_\nu (\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu)\psi = m^2\psi$$

の形に書き直すことができる．ここから

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}. \tag{21.4}$$

このようにして，異なる γ^μ のすべての対は反可換であり，そのおのおのの2乗は

---

1) これ以後われわれは4行4列の行列の2行2列による簡単な書き方を用いよう．すなわち，各式 (21.3) の各記号はそれ自身2行2列の行列である．

$$(\gamma^1)^2 = (\gamma^2)^2 = (\gamma^3)^2 = -1, \quad (\gamma^0)^2 = 1. \tag{21.5}$$

ψ の成分のユニタリー変換 ($\psi' = \mathrm{U}\psi$, ここで U は 4 行 4 列の行列) に際し行列 γ は

$$\gamma' = \mathrm{U}\gamma\mathrm{U}^{-1} = \mathrm{U}\gamma\mathrm{U}^{+} \tag{21.6}$$

にしたがって変換される (これは方程式 $(\gamma \mathrm{p} - m)\psi = 0$ が $(\gamma' \mathrm{p} - m)\psi' = 0$ になるようになっている). 交換関係 (21.4) はもちろんこの際不変である.

(21.3) から行列 γ^0 はエルミートであり, $\boldsymbol{\gamma}$ は反エルミートである. これらの性質はすべてのユニタリー変換 (21.6) に際し保存され, われわれはいつも

$$\boldsymbol{\gamma}^{+} = -\boldsymbol{\gamma}, \quad \gamma^{0+} = \gamma^0 \tag{21.7}$$

を得る[1].

また複素共役関数 ψ^* に対する方程式も書くことにしよう. 方程式 (21.2) の複素共役をとり, その際 (21.7) の性質を考慮して

$$(-\mathrm{p}_0 \tilde{\gamma}_0 - \mathbf{p}\tilde{\boldsymbol{\gamma}} - m)\psi^* = 0$$

を得る. $\tilde{\gamma}^\mu \psi^* = \psi^* \gamma^\mu$ にしたがって ψ^* を並べ換え, その後すべての方程式の右から γ^0 を掛けよう. $\boldsymbol{\gamma}\gamma^0 = -\gamma^0\boldsymbol{\gamma}$ であることに注意し, 新しい双スピノール

$$\bar{\psi} = \psi^* \gamma^0, \quad \psi^* = \bar{\psi}\gamma^0 \tag{21.8}$$

を導入し

$$\bar{\psi}(\gamma \mathrm{p} + m) = 0 \tag{21.9}$$

を得る. (20.11) と同様に, 演算子 p はここではその左にある関数に作用すると仮定される. 関数 $\bar{\psi}$ は関数 ψ の**ディラック共役** (あるいは相対論的共役) と呼ばれる. この定義のなかの因子 γ^0 の意味はつぎのようにまとめられる. すなわち (スピノール表示で) それがスピノール ξ^* および η^* を並べ換えて, その結果 $\bar{\psi} = (\eta^*, \xi^*)$ のなかで (ψ における と同様に) 第1項が点のないスピノールで, 第2項が点のあるスピノールになるようにしている. すなわち, このようなわけで $\bar{\psi}$ のほうが (ψ^* よりも) 自然な ψ の ≪随伴者≫ である. たとえば, それらはいろいろな双1次結合のなかにいっしょに現われる場合などそうである (§ 28 参照).

---

1)　この等式は

$$\gamma^{\lambda +} = \gamma^0 \gamma^\lambda \gamma^0 \tag{21.7a}$$

の形でまとめて書くこともできる.

波動関数に対する反転変換は

$$\mathrm{P}:\ \psi \longrightarrow i\gamma^0\psi, \quad \bar{\psi} \longrightarrow -i\bar{\psi}\gamma^0 \tag{21.10}$$

の形に表わされる．ψ のスピノール表示では γ^0 は反転にあたって，当然のことではあるが，成分 ξ と η を置き換える．変換(21.10)に対するディラック方程式の不変性は一般には明らかであり，直接的である．すなわち，方程式 (21.2) のなかで $\mathbf{p}\to-\mathbf{p}$ と同時に $\psi\to i\gamma^0\psi$ で置き換えて

$$(\mathrm{p}_0\gamma^0+\mathbf{p}\boldsymbol{\gamma}-m)\gamma^0\psi=0.$$

この方程式に左から γ^0 を掛け，γ^0 と $\boldsymbol{\gamma}$ の反可換性を考慮すると，元の方程式にもどる．

方程式 $(\gamma\mathrm{p}-m)\psi=0$ に左から $\bar{\psi}$ を掛け，また方程式 $\bar{\psi}(\gamma\mathrm{p}+m)=0$ に右から ψ を掛け，それらを加えあわせると

$$\bar{\psi}\gamma^\mu(\mathrm{p}_\mu\psi)+(\mathrm{p}_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi=\mathrm{p}_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)=0.$$

ここで括弧は，どの関数に演算子 p の作用がおよぶかを示す．得られた方程式は連続方程式 $\partial_\mu j^\mu=0$ の形を持っている．したがって

$$j^\mu=\bar{\psi}\gamma^\mu\psi=(\psi^*\psi,\ \psi^*\gamma^0\boldsymbol{\gamma}\psi) \tag{21.11}$$

は粒子の流れの密度の 4-ベクトルになっている．その時間成分 $j^0=\psi^*\psi$ が正に定まった量であることに注目しよう．

ディラック方程式は時間微分を分離した形

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}=\mathrm{H}\psi \tag{21.12}$$

に表わすことができる．ここで H は粒子のハミルトニアンである[1]．このためには方程式 (21.2) の左から γ^0 を掛ければよい．ハミルトニアンに対しては表式

$$\mathrm{H}=\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}+\beta m \tag{21.13}$$

を得る．ここで，いままで用いられている行列に対する一般に使われる記号を導入した．すなわち

$$\boldsymbol{\alpha}=\gamma^0\boldsymbol{\gamma}, \quad \beta=\gamma^0. \tag{21.14}$$

---

1) スピン 0 の粒子に対して，波動方程式はこのような形に書くことができない．すなわち，スカラー ψ に対する方程式 (10.5) は，時間に関して 2 次であり，5 成分量 (ψ, ψ_μ) に対する連立一次方程式 (10.4) は，すべての成分の時間微分を含まない．

つぎのことを指摘しておこう.

$$\alpha_i\alpha_k+\alpha_k\alpha_i=2\delta_{ik},\quad \beta\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\alpha}\beta=0,\quad \beta^2=1. \tag{21.15}$$

すなわちすべての行列 $\boldsymbol{\alpha}$, β は互いに反可換であり，その2乗は1に等しい．これらはすべてエルミートである．スピノール表示では

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\sigma} & 0\\ 0 & -\boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix},\quad \beta=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}. \tag{21.16}$$

粒子の速度が小さい極限では，非相対論的理論におけるように，合計一つの2成分スピノールで記述される必要がある．実際に方程式 (20.5) から $\mathbf{p}\to 0$，$\varepsilon\to m$ の極限に移ると $\xi=\eta$ が得られる．すなわち双スピノールを形成する二つのスピノールが互いに一致する．しかしながら，ここでディラック方程式のスピノール形式の記述の欠陥が現われる．すなわち極限移行に際し，ψ の四つの成分が，実際にはそのなかの二つだけが独立であるのだが，すべて 0 にならないで残ってしまう．極限でその成分中の二つが 0 になるような，波動関数 ψ の表示のほうが好つごうである．

これに対応して ξ および η の代りに，その一次結合 φ および χ を導入しよう．すなわち

$$\psi=\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix},\quad \varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi+\eta),\quad \chi=\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi-\eta). \tag{21.17}$$

ここで静止系では $\chi=0$ である．ψ のこのような表わし方を**標準表示**と呼ぶ．反転に際し φ および χ は

$$\mathrm{P}:\ \varphi\longrightarrow i\varphi,\quad \chi\longrightarrow -i\chi \tag{21.18}$$

にしたがって，自分自身に変換される．

φ および χ に対する方程式は，方程式 (20.5) を加えたり，引いたりして求める．つまり

$$\begin{aligned}p_0\varphi-\mathbf{p}\boldsymbol{\sigma}\chi&=m\varphi,\\ -p_0\chi+\mathbf{p}\boldsymbol{\sigma}\varphi&=m\chi.\end{aligned} \tag{21.19}$$

これから，標準表示は行列

$$\gamma^0\equiv\beta=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix}0 & \boldsymbol{\sigma}\\ -\boldsymbol{\sigma} & 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}0 & \boldsymbol{\sigma}\\ \boldsymbol{\sigma} & 0\end{pmatrix} \tag{21.20}$$

に対応することがわかる．

(21.17) で第1および第2成分，ξ および η を個々に重ね合わせるので，標準表示で

はスピノールの場合と同様に成分 ψ_1 および ψ_3 はスピンの投影の固有値 $+1/2$ に，また ψ_2 および ψ_4 は投影の固有値が $-1/2$ に対応する．したがって，これら両方の表示で，行列 $1/2\,\boldsymbol{\Sigma}$ は3次元のスピン演算子である．ここで

$$\boldsymbol{\Sigma}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\sigma} & 0\\ 0 & \boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix}. \tag{21.21}$$

すなわち，成分 ψ_1 および ψ_3 だけ，あるいは ψ_2 および ψ_4 だけを含む双スピノールに対する $1/2\,\Sigma_z$ の作用は，$+1/2$ あるいは $-1/2$ を掛けることになる．任意の表示で，この行列は

$$\boldsymbol{\Sigma}=-\boldsymbol{\alpha}\gamma^5=-\frac{i}{2}[\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}] \tag{21.22}$$

の形に書くことができる（γ^5 の定義は95頁の (22.14) 参照)．

問　　題

1. 無限小ローレンツ変換，および無限小空間回転に対する波動関数の変換公式を見いだせ．

解 ψ のスピノール表示では無限小ローレンツ変換に際し

$$\xi'=\left(1-\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\delta\boldsymbol{V}\right)\xi,\quad \eta'=\left(1+\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\delta\boldsymbol{V}\right)\eta$$

である（(18.8)，(18.8a)，(18.10) 参照)．両方の公式はひとまとめにして

$$\psi'=\left(1-\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}\delta\boldsymbol{V}\right)\psi \tag{1}$$

の形に書くことができる．同様に無限小空間回転のときの変換則は

$$\psi'=\left(1+\frac{i}{2}\boldsymbol{\Sigma}\delta\boldsymbol{\theta}\right)\psi \tag{2}$$

である．このような形にすると，もしも $\boldsymbol{\alpha}$ および $\boldsymbol{\Sigma}$ をその同じ表示での行列と考えれば，ψ の任意の表示でこの公式が成り立つ．

行列 $\boldsymbol{\alpha}$ および $\boldsymbol{\Sigma}$ は反対称の《行列の4-テンソル》

$$\sigma^{\mu\nu}=\frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu-\gamma^\nu\gamma^\mu)=(\boldsymbol{\alpha},i\boldsymbol{\Sigma})$$

を形成していることが容易に確かめられる（成分の配列は (19.15) の規則で与えられる)．また無限小反対称テンソル $\varepsilon^{\mu\nu}=(\delta\boldsymbol{V},\delta\boldsymbol{\theta})$ を導入しよう．そうすれば

$$\sigma^{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu} = 2i\sum\delta\boldsymbol{\theta} - 2\boldsymbol{\alpha}\delta\boldsymbol{V}$$

となり，二つの式（1），（2）は一つの形

$$\psi' = \left(1+\frac{1}{4}\sigma^{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu}\right)\psi \tag{3}$$

に書くことができる．

2. ディラック方程式を虚係数を含まないような表示で書き表わせ（E. Majorana, 1937）．

解 標準表示で方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha_x\frac{\partial}{\partial x} + \alpha_y\frac{\partial}{\partial y} + \alpha_z\frac{\partial}{\partial z} + im\beta\right)\psi = 0$$

のなかで虚数は行列 α_y と $i\beta$ にのみ現われる．結果として虚行列 α_y が実行列 β に変えられるような変換 $\psi' = U\psi$ を行なって，このような虚数は取り去ることができる．このためには

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_y + \beta) = U^{-1}$$

と置かねばならない．このとき

$$\alpha_x' = U\alpha_x U = -\alpha_x, \quad \alpha_y' = \beta, \quad \alpha_z' = -\alpha_z, \quad \beta' = \alpha_y$$

で，ディラック方程式は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \alpha_x\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y} - \alpha_z\frac{\partial}{\partial z} + im\,\alpha_y\right)\psi' = 0$$

の形をとり，そのすべての係数は実数である．

§22. ディラック行列の代数

ディラック方程式に関連した計算の際には，種々の表示における具体的な形を使わずに，行列 γ を広く使うと好つごうである．これらの行列の演算則はすべて交換関係

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3) \tag{22.1}$$

で定義され，これはそのすべての一般的性質を決定する．

この節では，いろいろな計算に有効な，行列 γ の代数のいくつかの公式や法則を導こう．

行列 γ の自分自身との《スカラー乗積》，すなわち $g_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu$ は4 である．簡単に書くために，4-ベクトルの共変成分と同様に $\gamma_\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\nu$ という記号を導入しよう．このとき

$$\gamma_\mu\gamma^\mu = 4. \tag{22.2}$$

もしも行列 γ_μ と γ^μ が，1個あるいは数個の γ の因子でへだてられていると，1回あるいは数回の因子の交換（法則 (22.1) を使って）により，γ_μ と γ^μ を隣りあった位置に持ってくることができる．その後（μ に関する）和が (22.2) にしたがって行なわれる．この方法によって，つぎのような公式が得られる．

$$\begin{aligned}
\gamma_\mu\gamma^\nu\gamma^\mu &= -2\gamma^\nu, \\
\gamma_\mu\gamma^\lambda\gamma^\nu\gamma^\mu &= 4g^{\lambda\nu}, \\
\gamma_\mu\gamma^\lambda\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\mu &= -2\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\lambda, \\
\gamma_\mu\gamma^\lambda\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\mu &= 2(\gamma^\sigma\gamma^\lambda\gamma^\nu\gamma^\rho + \gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\sigma).
\end{aligned} \tag{22.3}$$

普通，因子 $\gamma^\mu, \cdots\cdots$ は，いろいろな 4-ベクトルと《スカラー乗積》の形の結合を作る．われわれは記号

$$\hat{a} = \gamma a \equiv \gamma^\mu a_\mu \tag{22.4}$$

としてひろく使うことにしよう．このような積に対して公式 (22.1) は

$$\hat{a}\hat{b} + \hat{b}\hat{a} = 2(ab), \quad \hat{a}\hat{a} = a^2 \tag{22.5}$$

の形をとり，公式 (22.3) は

$$\begin{aligned}
\gamma_\mu\hat{a}\gamma^\mu &= -2\hat{a}, \\
\gamma_\mu\hat{a}\hat{b}\gamma^\mu &= 4(ab), \\
\gamma_\mu\hat{a}\hat{b}\hat{c}\gamma^\mu &= -2\hat{c}\hat{b}\hat{a}, \\
\gamma_\mu\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}\gamma^\mu &= 2(\hat{d}\hat{a}\hat{b}\hat{c} + \hat{c}\hat{b}\hat{a}\hat{d}).
\end{aligned} \tag{22.6}$$

いくつかの行列 γ の積の跡をとることも広く用いられる演算である．量

$$T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} \equiv \frac{1}{4}\mathrm{Sp}(\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\cdots\gamma^{\mu_n}) \tag{22.7}$$

を考えよう．行列の積の跡のよく知られた性質のために，このテンソルは添字 $\mu_1\mu_2\cdots\cdots\mu_n$ の循環置換に対して対称である．

行列 γ は任意の基準系で同じ形を持つから，量 T もまた系の選択にはよらない．したがってそれは，この性質を持つ計量テンソル $g_{\mu\nu}$ だけを使って表わすことができる．

しかし2階のテンソル $g_{\mu\nu}$ からは，偶数階のテンソルだけを組み立てることができる．このことからすでに，任意の奇数個の γ 因子の積の跡は 0 になることが導かれる．特にどの γ の跡も 0 に等しい[1)]．

$$\mathrm{Sp}\,\gamma^{\mu}=0\,. \tag{22.8}$$

単位4行4列行列（これは交換関係（22.1）の右辺がそう考えられるが）の跡は4に等しい．したがって(22.1)から，等式の両辺の跡をとり

$$T^{\mu\nu}=g^{\mu\nu}\,. \tag{22.9}$$

四つの行列の積の跡は

$$T^{\lambda\mu\nu\rho}=g^{\lambda\mu}g^{\nu\rho}-g^{\lambda\nu}g^{\mu\rho}+g^{\lambda\rho}g^{\mu\nu}\,. \tag{22.10}$$

この公式は，たとえば $\mathrm{Sp}\,\gamma^{\lambda}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}$ のなかの因子 γ^{λ} を，交換関係 (22.1) を使って，右へ≪持って≫くることによって求めることができる．交換ごとに (22.10) のなかに現われている項の一つが現われる．すなわち

$$T^{\lambda\mu\nu\rho}=2g^{\lambda\mu}T^{\nu\rho}-T^{\mu\lambda\nu\rho}=2g^{\lambda\mu}g^{\nu\rho}-T^{\mu\lambda\nu\rho}$$

となり，以下同様である．すべての交換のあとで右辺に $-T^{\mu\nu\rho\lambda}=-T^{\lambda\mu\nu\rho}$ が残り，これを左辺に移す．この方法で六つの γ の積の跡の計算は，四つの因子の積の跡に帰する．以下は4個の場合と同様である．なんとなれば

$$T^{\lambda\mu\nu\rho\sigma\tau}=g^{\lambda\mu}T^{\nu\rho\sigma\tau}-g^{\lambda\nu}T^{\mu\rho\sigma\tau}+g^{\lambda\rho}T^{\mu\nu\sigma\tau}-g^{\lambda\sigma}T^{\mu\nu\rho\tau}+g^{\lambda\tau}T^{\mu\nu\rho\sigma} \tag{22.11}$$

であるからである．

跡 $T^{\lambda\mu\cdots}$ はすべて実数であること，また行列 $\gamma^{0},\gamma^{1}\cdots\cdots$ がどれも偶数回の積の形で現われるときにだけ0と異なることを強調しよう．これらはいずれも求められた公式から明らかである．ここから今度は，すべての因子の順序を逆にしても跡は変わらないことが出てくる[2)]．

---

1)　行列の跡はつぎの変換に関して不変である．

$$\gamma'=\mathrm{U}\gamma\mathrm{U}^{-1}.$$

したがって (22.8) は行列 (21.3) の具体的な式から明らかである．

2)　実際に（任意の行列 M に対し）$\mathrm{Sp\,M}=\mathrm{Sp}\,\tilde{\mathrm{M}}$ であるから，（跡が実数であることも考慮して）$\mathrm{Sp}(\gamma^{\lambda}\cdots\cdots\gamma^{\nu})=\mathrm{Sp}(\gamma^{\lambda}\cdots\cdots\gamma^{\nu})^{+}=\mathrm{Sp}(\gamma^{\nu+}\cdots\cdots\gamma^{\lambda+})$ となる．どの行列もエルミートか反エルミートであり ($\gamma^{\mu+}=\pm\gamma^{\mu}$)，偶数回の積として現われるので，(22.12) は明らかである．

$$T^{\lambda\mu\cdots\rho\sigma} = T^{\sigma\rho\cdots\mu\lambda}. \tag{22.12}$$

すでに述べたように，因子γは普通いろいろな4-ベクトルとの《スカラー》乗積の形で現われる．このような場合には，たとえば公式 (22.9) および (22.10) は

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4}\mathrm{Sp}\,\hat{a}\hat{b} = ab, \\ &\frac{1}{4}\mathrm{Sp}\,\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d} = (ab)(cd) - (ac)(bd) + (ad)(bc) \end{aligned} \tag{22.13}$$

を意味する．

積 $\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ は特別の役割を果たす．そのためにつぎの特別な記号を採用しよう．

$$\gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3. \tag{22.14}$$

容易につぎのことがわかる．

$$\gamma^5\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^5 = 0, \quad (\gamma^5)^2 = 1. \tag{22.15}$$

すなわち，γ^5 はすべての γ^μ と反可換である．行列$\boldsymbol{\alpha}$ と β に関しては，つぎの規則がある

$$\boldsymbol{\alpha}\gamma^5 - \gamma^5\boldsymbol{\alpha} = 0, \quad \beta\gamma^5 + \gamma^5\beta = 0 \tag{22.16}$$

($\boldsymbol{\alpha}$ との可換性は，$\boldsymbol{\alpha} = \gamma^0\boldsymbol{\gamma}$ が二つの行列 γ^μ の積であることから出てくる)．

行列 γ^5 はエルミートである．実際に

$$\gamma^{5+} = i\gamma^{3+}\gamma^{2+}\gamma^{1+}\gamma^{0+} = -i\gamma^3\gamma^2\gamma^1\gamma^0.$$

3 2 1 0の順列は偶数回の置換で順列0 1 2 3になる．したがって

$$\gamma^{5+} = \gamma^5. \tag{22.17}$$

二つの具体的な表示でこの行列の形を示そう．すなわち

$$\begin{aligned} &\text{スピノール表示}:\gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ &\text{標　準　表　示}:\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{22.18}$$

行列γ^5 の跡は 0 に等しい

$$\mathrm{Sp}\,\gamma^5 = 0 \tag{22.19}$$

(これは (22.18) から直接にわかる)．積 $\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu$ の跡もまた0に等しい．γ^5 と四つの因子 γ^μ との積に対しては

$$\frac{1}{4}\mathrm{Sp}\,\gamma^5\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho = ie^{\lambda\mu\nu\rho}. \tag{22.20}$$

さらにつぎの公式に注目しよう

$$\hat{N} = i\gamma^5\hat{a}\hat{b}\hat{c}, \quad N^\lambda = e^{\lambda\mu\nu\rho}a_\mu b_\nu c_\rho. \tag{22.21}$$

これは

$$e^{\lambda\mu\nu\rho}\gamma_\lambda = i\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho$$

の形に書いた定義 (22.14) から導かれる.

問　題

$\frac{1}{4}\mathrm{Sp}\,\gamma^5\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\tau \equiv A^{\lambda\mu\nu\rho\sigma\tau}$ を求めよ.

解　交換則 (22.1) と公式 (22.20) とを使って，求める跡をつぎの形にしよう.

$$A^{\lambda\mu\nu\rho\sigma\tau} = -2iB^{\lambda\mu\nu\rho\sigma\tau} + A^{\nu\mu\lambda\tau\sigma\rho}.$$

ここで

$$B^{\lambda\mu\nu\rho\sigma\tau} = e^{\lambda\mu\nu\rho}g^{\sigma\tau} - e^{\lambda\mu\nu\sigma}g^{\rho\tau} + e^{\lambda\mu\nu\tau}g^{\rho\sigma} - e^{\nu\tau\sigma\rho}g^{\lambda\mu} + e^{\mu\tau\sigma\rho}g^{\lambda\nu} - e^{\lambda\tau\sigma\rho}g^{\mu\nu}.$$

循環性および (22.12) から，$A^{\nu\mu\lambda\tau\sigma\rho} = A^{\lambda\mu\nu\rho\sigma\tau}$ である．このようにして

$$A^{\lambda\mu\nu\rho\sigma\tau} = -iB^{\lambda\mu\nu\rho\sigma\tau}.$$

§23. 平　面　波

運動量とエネルギーの一定値を持つ自由粒子の状態は平面波で記述される．これをわれわれは

$$\psi_p = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}u_p e^{-ipx} \tag{23.1}$$

の形に書き表わそう．添字 p は 4-運動量の値を示す．波の振幅 u_p は一定の方法で規格化された双スピノールである.

第二量子化をさらに遂行するためには，波動関数 (23.1) と並んで《負の振動数》の関数もまた必要になる．これは §11 で明らかにされているように，根 $\pm\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}$ が2価であることと関連して，相対論的理論で現われてくるものである．§11 と同様に ε を正の量 $\varepsilon = +\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}$ といつも考えることにしよう．そうすると《負の振動数》は $-\varepsilon$ である．$\mathbf{p}$ の符号も変えてつぎの関数が得られ，これを ψ_{-p} と置くのが自然である.

$$\psi_{-p} = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} u_{-p} e^{ipx}. \tag{23.2}$$

この関数の意味は§26で明らかにされる．以下われわれは ψ_p および ψ_{-p} に対する公式を並べて書くことにしよう．

双スピノールの成分 u_p および u_{-p} は代数方程式

$$(\hat{p}-m)u_p = 0, \quad (\hat{p}+m)u_{-p} = 0 \tag{23.3}$$

を満足する．これらはディラック方程式に (23.1)，(23.2) を代入することにより得られる（そうすると方程式中の演算子 p を $\pm p$ に置き換えることになる)[1]．ここで関係式 $p^2 = m^2$ はこれらの連立方程式のおのおのが成立する条件である．われわれはいつも，不変な条件

$$\bar{u}_p u_p = 2m, \quad \bar{u}_{-p} u_{-p} = -2m \tag{23.4}$$

によって双スピノール振幅を規格化しよう（ここで文字の上の横線は他の場所と同様にディラック共役 $\bar{u} = u^*\gamma^0$ を意味している)．方程式 (23.3) に左から $\bar{u}_{\pm p}$ を掛けて $(\bar{u}_{\pm p}\gamma u_{\pm p})p = 2m^2 = 2p^2$ を得る．ここから

$$\bar{u}_p \gamma u_p = \bar{u}_{-p} \gamma u_{-p} = 2p \tag{23.5}$$

であることがわかる．u_p に対する公式から u_{-p} に対する公式への移行は m の符号を変えることによって行なわれる．

電流密度の4-ベクトルは

$$j = \bar{\psi}_{\pm p}\gamma\psi_{\pm p} = \frac{1}{2\varepsilon}\bar{u}_{\pm p}\gamma u_{\pm p} = \frac{p}{\varepsilon} \tag{23.6}$$

である．すなわち，$j^\mu = (1, \boldsymbol{v})$ であり $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{p}/\varepsilon$ は粒子の速度である．ここから関数 ψ_p は≪体積 $V=1$ につき粒子1個≫で規格化されていることがわかる．

方程式 (23.3) により波の振幅の成分は互いにある関係で結ばれている．その具体的な形は結局 γ の具体的な形に依存する．標準表示に対してそれを求めよう．

---

1) また複素共役関数に対するディラック方程式から得られる，類似の系を指摘しよう．

$$\bar{u}_p(\hat{p}-m) = 0, \quad \bar{u}_{-p}(\hat{p}+m) = 0. \tag{23.3a}$$

平面波に対して方程式 (21.19) から

$$(\varepsilon-m)\varphi-\boldsymbol{p\sigma}\chi=0,$$
$$(\varepsilon+m)\chi-\boldsymbol{p\sigma}\varphi=0 \tag{23.7}$$

を得る．これらの等式から φ と χ のあいだに二つの同等な形の関係式が見いだされる．すなわち

$$\varphi=\frac{\boldsymbol{p\sigma}}{\varepsilon-m}\chi,\quad \chi=\frac{\boldsymbol{p\sigma}}{\varepsilon+m}\varphi \tag{23.8}$$

である（これらの式が同等であることは明らかである．これらのなかの1番目に左から $\frac{\boldsymbol{p\sigma}}{\varepsilon+m}$ を掛け，$(\boldsymbol{p\sigma})^2=\boldsymbol{p}^2$ と $\varepsilon^2-m^2=\boldsymbol{p}^2$ を考慮すると2番目を得る）．φ および χ の共通因子は規格化条件(23.4)を満足するように選ぶ．その結果 u_p に対し（同様に u_{-p} に対し）次式が得られる．

$$u_p=\begin{pmatrix}\sqrt{\varepsilon+m}\,w\\ \sqrt{\varepsilon-m}\,(\boldsymbol{n\sigma})w\end{pmatrix},\quad u_{-p}=\begin{pmatrix}\sqrt{\varepsilon-m}(\boldsymbol{n}\ \boldsymbol{\sigma})w'\\ \sqrt{\varepsilon+m}\,w'\end{pmatrix}. \tag{23.9}$$

（第2式は第1式から m の前の符号を変え，$w\to(\boldsymbol{n\sigma})\,w'$ を行なうと得られる）．ここで $\boldsymbol{n}$ はベクトル $\boldsymbol{p}$ の基底であり，w は規格化条件

$$w^*w=1 \tag{23.10}$$

だけを満足する任意の2成分量である．

$\bar{u}=u^*\gamma^0$（γ^0 は (21.20) からとる）に対しては

$$\bar{u}_p=(\sqrt{\varepsilon+m}\,w^*,\quad -\sqrt{\varepsilon-m}\,w^*(\boldsymbol{n\sigma})),$$
$$\bar{u}_{-p}=(\sqrt{\varepsilon-m}\,w'^*(\boldsymbol{n\sigma}),\quad -\sqrt{\varepsilon+m}\,w'^*) \tag{23.11}$$

であり，乗算によって実際に $\bar{u}_{\pm p}u_{\pm p}=\pm 2m$ であることが確かめられる．

静止系では，すなわち $\varepsilon=m$ のときは

$$u_p=\sqrt{2m}\begin{pmatrix}w\\0\end{pmatrix},\quad u_{-p}=\sqrt{2m}\begin{pmatrix}0\\w'\end{pmatrix}. \tag{23.12}$$

すなわち w は，非相対論的極限で波の各振幅が帰一する，3次元スピノールそのものである．静止系では双スピノール u_{-p} の二つの成分中の1番目は0になり，2番目は0にならない．ディラック方程式の≪負の振動数≫を持つ解の性質はすでに明らかになっている．

すなわち，(23.7) で $\boldsymbol{p}=0$ と置き，ε を $-m$ で置き換えて $\varphi=0$ を得る[1]．

平面波の振幅は任意の2成分量を含んでいる．言いかえれば，運動量が与えられたときスピンの投影の二つの可能な値に対応して，二つの独立な異なる状態が存在する．しかしながら，この際任意の z 軸へのスピンの投影は一定値を持ちえない．これは一定の $\boldsymbol{p}$ を持つ粒子のハミルトニアン（すなわち $\mathrm{H}=\boldsymbol{\alpha p}+\beta m$）は行列 $\Sigma_z=-i\alpha_x\alpha_y$ と非可換であることから明らかである．しかしながら，§16で行なった一般的主張に対応して，螺線度 λ，すなわちスピンの $\boldsymbol{p}$ 方向への投影は保存する．すなわちハミルトニアンは行列 $\boldsymbol{n}\Sigma$ と可換である．

螺線状態は，3次元スピノール $w=w^{(\lambda)}(\boldsymbol{n})$ が演算子 $\boldsymbol{n\sigma}$ の固有関数である．すなわち

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{n\sigma})w^{(\lambda)}=\lambda w^{(\lambda)} \tag{23.13}$$

であるような平面波に対応している．

あらわな形でこれらのスピノールはつぎのようになる．

$$w^{(\lambda=1/2)}=\begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2}\cos\dfrac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi/2}\ \sin\dfrac{\theta}{2}\end{pmatrix},\quad w^{(\lambda=-1/2)}=\begin{pmatrix} -e^{-i\varphi/2}\sin\dfrac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi/2}\ \cos\dfrac{\theta}{2}\end{pmatrix}. \tag{23.14}$$

ここで θ および φ は，固定した xyz 軸[2]に対する $\boldsymbol{n}$ 方向の天頂角および方位角である．

与えられた $\boldsymbol{p}$ を持つ自由粒子の二つの独立な状態の他の選び方は（あまり明瞭ではないがいっそう簡単である），静止系においてスピンの z-投影の二つの値に対応する．これを σ で表わそう．これに対応するスピノールは

$$w^{(\sigma=1/2)}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad w^{(\sigma=-1/2)}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \tag{23.15}$$

である．≪負の振動数≫を持つ二つの一次独立な解として，われわれは3次元スピノールが

---

1) スピノール表示では $\xi=\eta$ の代りに $\xi=-\eta$ である．$\xi=\eta$ は静止系で≪正の振動数≫を持つ解に対してのみ成り立つ．

2) 方程式 (23.13) の解には任意の位相因子を掛けてもよい．これは $\boldsymbol{n}$ 方向のまわりの任意の回転が可能であることと関係している．この任意さには変換 (a.3) での角 γ の任意性が対応する（公式 (a.3) から (23.14) を得るため，スピノールの $'$ をつけた成分を $\binom{1}{0}$ あるいは $\binom{0}{1}$ に等しいと置く必要がある．これはスピンの ζ 軸への投影の一定値に対応し，そして角 α,β,γ は $\varphi,\theta,0$ に変える必要がある）．

$$w^{(\sigma)\prime} = -\sigma_y w^{(-\sigma)} = 2\sigma i w^{(\sigma)} \tag{23.16}$$

であるような平面波を選ぼう（この選択の意味は§26にある）．

問題

1. 静止系から直接のローレンツ変換により波動関数 (23.9) を求めよ．

解 基準系 K に対する基準系 K' の有限の速度 $\boldsymbol{V}$ に対する変換則は，(18.13) を (18.12) から求めたようにして，§21の問題1の (1) から求められる．すなわち

$$\psi' = e^{-\frac{\varphi}{2}\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\alpha}}\psi = \left(\cosh\frac{\varphi}{2} - \boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\alpha}\sinh\frac{\varphi}{2}\right)\psi.$$

ここで $\boldsymbol{\nu}$ はベクトル $\boldsymbol{V}$ の基底で，$\tanh\varphi = |\boldsymbol{V}|$ である．双スピノール u はこのような公式にしたがって変換される．K が粒子の静止系であり，K'-系ではその粒子が運動量 $\boldsymbol{p}$ を持つとすると，$\boldsymbol{V} = -\boldsymbol{p}/\varepsilon$ であり，ここから

$$\cosh\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{\varepsilon+m}{2m}}, \quad \sinh\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{\varepsilon-m}{2m}}.$$

(23.12) から u をとり標準表示の行列 $\boldsymbol{\alpha}$ を使って，u' として (23.9) を得る．

2. 静止系では自由粒子のスピンは保存され，その（標準表示での）波動関数は，与えられた z 軸上へのスピンの投影の値 $\pm 1/2$ に対応する，合計二つの成分を持つ．どのような基準系でも（平面波の）波動関数が，状態の物理的特質，すなわち静止系でのスピンの投影の一定値に対応する2成分を持つような表示を見いだせ (L. Foldy, S. A. Wouthuysen, 1950)．

解 標準表示の振幅 u_p から出発して，$\boldsymbol{n}$ をベクトル $\boldsymbol{p}$ の基底，W を実の量として，求めるユニタリー変換を $\mathrm{U} = \exp(W\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{n})$ の形にしよう（$\boldsymbol{\gamma}^+ = -\boldsymbol{\gamma}$ であるから自動的に $\mathrm{U}^+ = \mathrm{U}^{-1}$ である）．級数に展開し $(\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{n})^2 = -1$ であることを考慮して，U をつぎの形に表わそう．

$$\mathrm{U} = \cos W + \boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{n}\sin W.$$

振幅 $u_p' = \mathrm{U}u_p$ の変換で，二つのなかの2番目の成分が0になるための条件から

$$\tan W = \frac{|\boldsymbol{p}|}{m+\varepsilon},$$

あるいは

$$W = \operatorname{arc\,tan}\frac{|\boldsymbol{p}|}{m+\varepsilon} = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tan}\frac{|\boldsymbol{p}|}{m}$$

を見いだす．新しい表示では

$$u_p = \sqrt{2\varepsilon}\begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix}$$

である．新しい表示で粒子のハミルトニアンは

$$\mathrm{H}' = \mathrm{U}(\boldsymbol{\alpha p}+\beta m)\mathrm{U}^{-1} = \beta\varepsilon$$

の形となる（すべての行列 $\beta, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}$ は標準表示になっている）．このハミルトニアンは行列

$$\boldsymbol{\Sigma} = -\boldsymbol{\alpha}\gamma^5 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}$$

と可換であり，これは新しい表示では保存する物理量，すなわち静止系でのスピンの演算子になる．

§24. 球 面 波

角運動量が，ある定まった値 j を持つ（スピン 1/2 を持つ）自由粒子の状態の波動関数はスピノール球面波である．この形を決めよう．そのために，あらかじめ非相対論的理論の類似の公式を思い起こそう．

非相対論的波動関数は 3 次元スピノール $\phi = \begin{pmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \end{pmatrix}$ である．一定のエネルギー値 ε（とともに運動量の値 p[1]）を持ち，軌道角運動量 l，全角運動量 j，およびその投影 m を持つ状態に対し，波動関数は

$$\phi = R_{pl}(r)\Omega_{jlm}(\theta,\varphi) \tag{24.1}$$

の形を持つ．この角部分は 3 次元スピノールで（l が与えられたとき可能な二つの j の値 $j = l \pm 1/2$ に対して）その成分は公式

$$\Omega_{l+1/2,l,m} = \begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{j+m}{2j}}Y_{l,m-1/2} \\ \sqrt{\dfrac{j-m}{2j}}Y_{l,m+1/2} \end{pmatrix},$$

1）この節では p は $|\boldsymbol{p}|$ を表わす．

$$\Omega_{l-1/2,l,m}=\begin{pmatrix}-\sqrt{\dfrac{j-m+1}{2j+2}}Y_{l,m-1/2}\\ \sqrt{\dfrac{j+m+1}{2j+2}}Y_{l,m+1/2}\end{pmatrix}\tag{24.2}$$

で与えられる（III, §106, 問題[1] 参照). われわれは Ω_{jlm} を**球面スピノール**と呼ぼう. これは条件

$$\int\Omega^*_{jlm}\Omega_{j'l'm'}do=\delta_{jj'}\delta_{ll'}\delta_{mm'}\tag{24.3}$$

にしたがって規格化される. 動径関数 R_{pl} はスピノール ψ の両方の成分の共通因子であり, III (33.9) の公式により与えられる.

$$R_{pl}=\sqrt{\frac{p}{r}}J_{l+1/2}(pr).\tag{24.4}$$

これは条件

$$\int_0^\infty r^2R_{p'l}R_{pl}dr=\delta(p'-p)\tag{24.5}$$

で規格化される.

相対論の場合にもどって, まず第一に運動粒子に対しては, スピンおよび角運動量の別別の保存則が存在しないことを思い起こそう. すなわち演算子 $\mathbf{s}$ および $\mathbf{l}$ の, おのおのはハミルトニアンと交換しないからである. しかしながら, (自由粒子に対して)状態の偶奇性は前と同じように保存する. したがって, 量子数 l は軌道角運動量の一定値を示す意味はなくなり, それによって状態の偶奇性が与えられる（下記参照).

標準表示における求める波動関数（双スピノール), すなわち $\psi=\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}$ の考察に限ることにしよう. 回転に対して φ および χ は3次元スピノールのようにふるまう. したがって, その角依存性は球面スピノール Ω_{jlm} によって与えられる. $\varphi\propto\Omega_{jlm}$ とすれば, ここで l は二つの値の(定まった)一つである. すなわち, $j+1/2$ あるいは $j-1/2$ である. 反転に際し $\varphi(\boldsymbol{r})\longrightarrow i\varphi(-\boldsymbol{r})$ である ((21.18)参照). そして $\Omega_{jlm}(-\boldsymbol{n})=(-1)^l\Omega_{jlm}(\boldsymbol{n})$ であるから

$$\varphi(\boldsymbol{r})\longrightarrow i(-1)^l\varphi(\boldsymbol{r})$$

である. 成分 χ は反転に際して $\chi(\boldsymbol{r})\longrightarrow -i\chi(-\boldsymbol{r})$ のようにふるまう. 状態が一定の偶

---

1) III, §106 の問題の答のなかで, 関数 $\Psi_{l-1/2,m}$ の共通符号はまちがっており, 逆にしなければならない(邦訳では訂正してある).

奇性を持つ（反転に際してすべての成分に同じ因子を掛ける）ためには，したがって χ の角度依存性が，（二つの可能性のなかから）他の l の値の球面スピノール $\Omega_{jl'm}$ で与えられる必要がある．すなわち，これらの値は1だけ違っているので，$(-1)^{l'}=-(-1)^{l}$ である．

さらに，φ および χ の動径依存性は（球面関数 Ω_{jlm} のなかに現われる次数に対応した値 l および l' を持つ同じ関数 R_{pl} および $R_{pl'}$ で定義される．これは，ψ の成分はいずれも2次方程式 $(\mathrm{p}^2-m^2)\psi=0$ を満足することから明らかである．これは与えられた値が $|\boldsymbol{p}|$ のとき

$$(\Delta+\boldsymbol{p}^2)\psi=0$$

の形になる．これは形式的には自由粒子に対する非相対論的シュレーディンガー方程式と一致する．

このようにして

$$\varphi=AR_{pl}\Omega_{jlm},\quad \chi=BR_{pl'}\Omega_{jl'm}. \tag{24.6}$$

そして定数係数 A および B の決定が残る．このためには，球面波が平面波とみなされることができるような遠い部分を考察しよう．漸近公式 III (33.10) にしたがって

$$R_{pl}\approx\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{2ir}\left\{e^{i\left(pr-\frac{\pi l}{2}\right)}-e^{-i\left(pr-\frac{\pi l}{2}\right)}\right\} \tag{24.7}$$

であるから，φ は $\pm\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}=\boldsymbol{r}/r)$ の方向に伝播する二つの平面波の差になっている．そのおのおのに対して (23.8) にしたがって

$$\chi=\frac{p}{\varepsilon+m}(\pm\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma})\varphi$$

である．上記のこと（公式 (24.6)）から，a を定数として $(\boldsymbol{n\sigma})\Omega_{jlm}=a\Omega_{jl'm}$ であることは明らかである．$m=1/2$ で $\boldsymbol{n}$ 方向が z 軸のときに等式の両辺の値をくらべることによって，この定数は容易に定めることができる．(7.2a) を使って

$$(\boldsymbol{n\sigma})\Omega_{jlm}=i^{l'-l}\Omega_{jl'm}. \tag{24.8}$$

以上書き上げた式をまとめて，(24.6) とくらべて

$$B=-\frac{p}{\varepsilon+m}A.$$

最後に係数 A は ψ 全体としての規格化で決定される．ψ を条件

$$\int \psi^*_{p\,jlm}\psi_{p'j'l'm'}\,dV = \delta_{jj'}\delta_{ll'}\delta_{mm'}\delta(p-p') \tag{24.9}$$

で規格化して，最終的に

$$\psi_{pjlm} = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon+m}\,R_{pl}\,\Omega_{jlm} \\ -\sqrt{\varepsilon-m}\,R_{pl'}\,\Omega_{jl'm} \end{pmatrix}, \quad l' = 2j-l. \tag{24.10}$$

このようにして，j と m（およびエネルギー ε）の与えられた値に対して，その偶奇性の異なる二つの状態が存在する．偶奇性は $j\pm 1/2$ の値をとる数 l によって一意的に決定される．すなわち双スピノールは反転に際して $i(-1)^l$ を掛けられる．しかしながら，この双スピノールの成分は次数 l および l' の二つの球関数を含んでおり，それにより軌道角運動量の一定値が存在しないことが示される．

$r\to\infty$ のときに，空間のそう大きくない各部分では球面波 (24.7) は運動量 $\boldsymbol{p} = \pm p\boldsymbol{n}$ を持った平面波と考えることができる．したがって，動径因子がないことと，$\boldsymbol{n}$ に運動量の方向という意味を与えることから，運動量表示の波動関数は基本的に (24.10) と違っている．

運動量表示に直接移るためにフーリエ分解

$$\psi(\boldsymbol{p}') = \int \psi(\boldsymbol{r})\,e^{-i\boldsymbol{p}'\boldsymbol{r}}\,d^3x \tag{24.11}$$

をする必要がある．積分は平面波を球面波に展開する公式[1]

$$e^{i\boldsymbol{pr}} = \frac{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}{p}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} i^l R_{pl}(r)\,Y^*_{lm}\Big(\frac{\boldsymbol{p}}{p}\Big)Y_{lm}\Big(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\Big) \tag{24.12}$$

を使って計算される．(24.11) のなかの因子 $e^{-i\boldsymbol{p}'\boldsymbol{r}}$ をこのような展開で表わし，(24.5) を考慮して関数

$$\psi(\boldsymbol{r}) = R_{pl}(r)\,\Omega_{jlm}\Big(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\Big)$$

のフーリエ成分として

$$\psi(\boldsymbol{p}') = \frac{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}{p}\delta(p'-p)\,i^{-l}\,Y_{lm'}\Big(\frac{\boldsymbol{p}'}{p'}\Big)\int \Omega_{jlm}\Big(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\Big)Y^*_{lm'}\Big(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\Big)do$$

を得る．ここに出てくる積分は，球面スピノールの定義 (24.2) のなかの球関数の係数に

---

1) この公式は III (34.1) を，z 軸方向のある選択を仮定しないで一般化したものである．また (46.3)，(46.4) を参照．

等しい．そして因子 $Y_{lm'}(\boldsymbol{p}'/p')$ とともにふたたび同じ球面スピノールを形成する．ただし引数 $\boldsymbol{p}'/p'$ の関数である．すなわち

$$\psi(\boldsymbol{p}') = \frac{(2\pi)^{3/2}}{p}\delta(p'-p)\,i^{-l}\Omega_{jlm}\left(\frac{\boldsymbol{p}'}{p'}\right).$$

この結果を双スピノール波動関数 (24.10) に適用して，その運動量表示を得る．

$$\psi_{pjlm}(\boldsymbol{p}') = \delta(p'-p)\frac{(2\pi)^{3/2}}{p\sqrt{2\varepsilon}}\begin{pmatrix}\sqrt{\varepsilon+m}\,i^{-l}\Omega_{jlm}(\boldsymbol{p}'/p') \\ -\sqrt{\varepsilon-m}\,i^{-l'}\Omega_{jl'm}(\boldsymbol{p}'/p')\end{pmatrix}. \qquad (24.13)$$

状態 $|pjlm\rangle$ は§16 で考察された状態 $|pjm|\lambda|\rangle$ (ここで $|\lambda| = 1/2$) と一致する．なぜかというと，どちらも一定の pjm および一定の偶奇性を持っているからである．したがって，球面スピノール Ω_{jlm} は一定の方法で関数 $D^{(j)}_{\lambda m}$ と結びつく (どちらも引数は $\boldsymbol{p}/p$ である)．$p\to 0$ のとき波動関数 (24.13) は，偶奇性が $P=\eta(-1)^l$ であるような3次元スピノール Ω_{jlm} に帰する (ここで $\eta = i$ はスピノールの《内部偶奇性》である)．§16 の結果と比較してつぎのような式が導かれる ($l = j\mp 1/2$ のとき)．

$$\Omega_{jlm} = i^l\sqrt{\frac{2j+1}{8\pi}}\left(w^{(-1/2)}D^{(j)}_{-1/2\,m} \pm w^{(1/2)}D^{(j)}_{1/2\,m}\right). \qquad (24.14)$$

ここで $w^{(\lambda)}$ は3次元スピノール (23.14) である．

§25. スピンと統計の関係

スピン 1/2 の粒子の場 (スピノール場) の第二量子化は，§11 でスカラー場に対して行なわれたのと同様な方法で行なわれる．

すべての考察をふたたび繰り返すことはせずに，ただちに場の演算子に対する，(11.2) 式とまったく同様な式を書こう．すなわち

$$\begin{aligned}\psi &= \sum_{p\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\left(\mathrm{a}_{p\sigma}u_{p\sigma}e^{-ipx} + \mathrm{b}^+_{p\sigma}u_{-p-\sigma}e^{ipx}\right), \\ \bar{\psi} \equiv \psi^+\gamma^0 &= \sum_{p\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\left(\mathrm{a}^+_{p\sigma}\bar{u}_{p\sigma}e^{ipx} + \mathrm{b}_{p\sigma}\bar{u}_{-p-\sigma}e^{-ipx}\right).\end{aligned} \qquad (25.1)$$

和はすべての運動量 $\boldsymbol{p}$ および $\sigma = \pm 1/2$ について行なわれる．消滅演算子 $\mathrm{b}_{p\sigma}$ は (また消滅演算子 $\mathrm{a}_{p\sigma}$ も同様に)，座標依存性 $(e^{i\boldsymbol{pr}})$ から運動量 $\boldsymbol{p}$[1] の状態に対応する関数の係数

1) どちらの関数もまた静止系におけるスピンの投影の同じ値 σ に対応する．関数 $\bar{\psi}_{-p-\sigma}$ に対しては§26 で示される．

となっている.

スピノール場のハミルトニアンを計算するためには（スカラー場に対して行なってきたように），エネルギー運動量テンソルを計算する必要はない．なぜかというと，この場合には，波動方程式（ディラック方程式（21.12））を書くのに使われるハミルトニアンが存在するからである．波動関数 ψ を持つ状態の粒子の平均エネルギーは，積分

$$\int \psi^* \mathrm{H} \psi\, d^3x = i\int \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} d^3x = i\int \bar{\psi}\gamma^0 \frac{\partial \psi}{\partial t} d^3x \qquad (25.2)$$

である．ここでは≪エネルギー密度≫（被積分式）が正に定まった量でないことに注目しよう．

(25.2) で関数 ψ および $\bar{\psi}$ を ψ-演算子に置き換え，$\boldsymbol{p}$ あるいは σ の異なる波動関数が直交することと，波動振幅に対して $\bar{u}_{\pm p\sigma}\gamma^0 u_{\pm p\sigma} = 2\varepsilon$ であることを考えて

$$\mathrm{H} = \sum_{p\sigma} \varepsilon(\mathrm{a}^+_{p\sigma}\mathrm{a}_{p\sigma} - \mathrm{b}_{p\sigma}\mathrm{b}^+_{p\sigma}) \qquad (25.3)$$

の形のハミルトニアンを得る.

これから，今の場合の量子化は，フェルミにしたがって行なわなければならないことがわかる．すなわち

$$\{\mathrm{a}_{p\sigma}, \mathrm{a}^+_{p\sigma}\}_+ = 1\,, \quad \{\mathrm{b}_{p\sigma}, \mathrm{b}^+_{p\sigma}\}_+ = 1\,. \qquad (25.4)$$

そして他のすべての a, a⁺, b, b⁺ の組は反可換である（III, §65 参照）．実際に，ハミルトニアン (25.3) は

$$\mathrm{H} = \sum_{p\sigma} \varepsilon(\mathrm{a}^+_{p\sigma}\mathrm{a}_{p\sigma} + \mathrm{b}^+_{p\sigma}\mathrm{b}_{p\sigma} - 1)$$

の形に書き直すことができる．エネルギー固有値は（いつもと同様，無限大の付加定数を差し引いて）

$$E = \sum_{p\sigma} \varepsilon(N_{p\sigma} + \overline{N}_{p\sigma}) \qquad (25.5)$$

となる．すなわち当然のことながら，正に定まった量である．ボーズにしたがって量子化すると，(25.3)からは，無意味で正に定まらない固有値

$$\sum \varepsilon\,(N_{p\sigma} - \overline{N}_{p\sigma})$$

を得る．系の運動量に対しても (25.5) と類似の次式を得る.

$$\boldsymbol{P} = \sum_{p\sigma} \boldsymbol{p}(N_{p\sigma} + \overline{N}_{p\sigma}). \qquad (25.6)$$

これは演算子 $\int \phi^+ \mathbf{p} \phi d^3x$ の固有値である.

4-電流の演算子は

$$j^\mu = \overline{\phi}\gamma^\mu\phi \tag{25.7}$$

で，場の≪電荷≫の演算子に対しては

$$Q = \int \overline{\phi}\gamma^0\phi d^3x = \sum_{p\sigma}(a^+_{p\sigma}a_{p\sigma} + b_{p\sigma}b^+_{p\sigma}) = \sum_{p\sigma}(a^+_{p\sigma}a_{p\sigma} - b^+_{p\sigma}b_{p\sigma} + 1) \tag{25.8}$$

が得られ，その固有値は

$$Q = \sum_{p\sigma}(N_{p\sigma} - \overline{N}_{p\sigma}). \tag{25.9}$$

このようにして，ふたたび粒子および反粒子についての表わし方に到達した．これには§11でその理由についてすべて述べてある．

しかし乍ら，スピン0の粒子がボソンであるのと同時に，スピン1/2の粒子はフェルミオンであることも明らかにされた．この違いの考察を形式的に進めてゆくと，スカラー場およびスピノール場の≪エネルギー密度≫の式の性質の違いと関連していることがわかるだろう．第一の場合には，この式は正に定まっていて，その結果ハミルトニアン(11.3)のなかでは両方の項 (a^+a および bb^+) が正号をもって現われている．エネルギーの固有値が正になることを保証するためには，bb^+ が b^+b へ符号を変えることなしに変換されなければならない．すなわちボーズ交換則にしたがわねばならない．スピノール場の場合には≪エネルギー密度≫は正に定まった量ではない．その結果ハミルトニアン(25.3)のなかで bb^+ の項は負号を持つことがわかり，固有値が正であることを保証するために，bb^+ を b^+b への交換は符号の変化を伴わねばならない．すなわち，フェルミの交換則にしたがわねばならない．

他方エネルギー密度の形は，波動関数の変換性および相対論的不変性の要求に直接結びついている．この意味では，スピンと粒子がしたがうべき統計との関係は，これらの要求の直接の結果であるといってよい．

スピン1/2の粒子がフェルミオンであるという事実から，さらに一般的な主張がまた導かれる．すなわち，半奇数のスピンを持つ粒子はフェルミオンであり，整数のスピンを持つ粒子はボソンである（このなかには§11で証明されたスピン0の粒子に対する主張も含まれる)[1].

1) 粒子のスピンと粒子がしたがう統計のあいだの関係の由来は，パウリが最初に明らかにした(1940).

これは，スピン s の粒子をスピン 1/2 の粒子 $2s$ 個から≪組み立てられ≫ているとしてよいことに注目すれば，明らかである．s が半奇数のとき $2s$ は奇数であり，s が整数のとき $2s$ は偶数である．しかも，偶数個のフェルミオンを含む≪複合≫粒子はボソンであり，奇数個のフェルミオンを含むものはフェルミオンである[1)]．

もしも系がいろいろな種類の粒子からなっているとすると，おのおのの種類の粒子に対して生成および消滅の演算子が導入される．この際，異なるボソン，あるいはボソンおよびフェルミオンに関係する演算子は互いに可換である．異なるフェルミオンに関係する演算子はどうかというと，非相対論的理論の極限では，それは可換であるとも反可換であるとも考えうる（III，§65）．相対論的理論では，粒子の相互転換が許されるので，いろいろなフェルミオンの生成および消滅演算子は，同一のフェルミオンの異なる状態に関する演算子とまったく同様に反可換でなければならない．

問　　題

スピノール場のラグランジアンを求めよ．

解　ディラック方程式に対応するラグランジュ関数は，実のスカラー式

$$L = \frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \partial_\mu\bar{\psi}\cdot\gamma^\mu\psi) - m\bar{\psi}\psi \tag{1}$$

で与えられる．成分 ψ および $\bar{\psi}$ を≪一般化された座標≫ q と考えると，対応するラグランジュの方程式 (10.10) が，$\bar{\psi}$ および ψ に対するディラック方程式と一致することがわかる．この場合，ラグランジアンの共通の符号（すなわち，そのなかの共通の係数）に対し制限がつく．L は ψ および $\bar{\psi}$ の1次の微係数を含むので，作用 $S=\int L d^4x$ は極小も極大も持ちえない．この場合，条件 $\delta S=0$ は平衡点を与えるだけで積分の極値は与えない．

スピノール場のラグランジアンは，(1) のなかの ψ を演算子 $\boldsymbol{\psi}$ に置き換えることにより得られる．このラグランジアンの式を(12.12)に適用して，電流の演算子(25.7)を得る．

---

1)　これらの考察では，同じスピンを持つ粒子は（その≪組み立て≫の方法にはよらずに），同じ統計にしたがうものと理解される．実際にそうであることは類似の考察からわかる．すなわち，もしもスピン0を持ったフェルミオンが存在するとすれば，スピン0のフェルミオンとスピン1/2のフェルミオンとからスピン1/2の粒子が組み立てられ，それはボソンのはずである．そしてこれはスピン1/2に対して，一般的に証明された結果と矛盾する．

§26. 荷電共役とスピノールの時間反転

(25.1)で演算子 $\mathrm{a}_{p\sigma}$ に掛かっている因子 $\psi_{p\sigma}=u_{p\sigma}e^{-ipx}$ は，運動量 $\boldsymbol{p}$ と偏り σ を持つ自由粒子（たとえば電子）の波動関数である．すなわち

$$\psi_{p\sigma}^{(\text{電})}=\psi_{p\sigma}.$$

演算子 $\mathrm{b}_{p\sigma}$ に掛かっている因子 $\bar{\psi}_{-p-\sigma}$ は同じく $\boldsymbol{p}$ と σ を持った陽電子の波動関数とみなす必要がある．しかしながらこのとき，電子および陽電子の波動関数は別の双スピノール表示になっていることがわかる．ψ と $\bar{\psi}$ はその変換性を異にし，その成分は異なる方程式系を満足する．この欠点をなくするために $\bar{\psi}_{-p-\sigma}$ の成分にあるユニタリー変換をして，新しく4-成分関数が $\psi_{p\sigma}$ と同一の方程式を満足する必要がある[1]．このような関数をわれわれは（運動量 $\boldsymbol{p}$ と偏り σ を持った）陽電子の波動関数と呼ぼう．求めるユニタリー変換の行列を U_C として

$$\psi_{p\sigma}^{(\text{陽})}=\mathrm{U}_C\bar{\psi}_{-p-\sigma} \tag{26.1}$$

と書こう．

$\psi_{-p-\sigma}$ からこの関数を作る演算子Cを波動関数の**荷電共役**と呼ぶ．結局この概念は，平面波に適用する場合に限られるものではない．一般にすべての関数 ψ に対して≪荷電共役≫の関数

$$\mathrm{C}\psi(t,\boldsymbol{r})=\mathrm{U}_C\bar{\psi}(t,\boldsymbol{r}) \tag{26.2}$$

が存在し，これは ψ と同様の変換をし，ψ と同じ方程式を満足する．

行列 U_C の性質はその定義から導かれる．ψ がディラック方程式 $(\gamma\mathrm{p}-m)\psi=0$ の解であるとすると，$\bar{\psi}$ は方程式 $\bar{\psi}(\gamma\mathrm{p}+m)=0$ あるいは $(\tilde{\gamma}\mathrm{p}+m)\bar{\psi}=0$ を満足する．この方程式に左から U_C を掛けると

$$\mathrm{U}_C\tilde{\gamma}\mathrm{p}\bar{\psi}+m\mathrm{U}_C\bar{\psi}=0$$

となる．$\mathrm{U}_C\bar{\psi}$ が ψ とまったく同じ方程式を満足するように要求すると

$$(\gamma\mathrm{p}-m)\mathrm{U}_C\bar{\psi}=0$$

である．この二つの方程式をくらべて U_C と行列 γ^μ とのあいだのつぎのような≪交換関

---

1) スピン0の粒子に対しては，この問題は一般に起こらない．なぜかというと，スカラー関数 ψ と ψ^* は同じ方程式を満足し，ψ^*_{-p} は ψ_p と一致するからである．

係≫を得る[1].

$$U_C\tilde{\gamma}^\mu = -\gamma^\mu U_C. \tag{26.3}$$

さらに波動関数がスピノール表示あるいは標準表示（任意の表示の一般の場合には，われわれはこの節の末尾でたち帰ることにする）で与えられていると仮定しよう．これらの表示では

$$\begin{aligned} \gamma^{0,2} &= \tilde{\gamma}^{0,2}, \quad \gamma^{1,3} = -\tilde{\gamma}^{1,3}, \\ (\gamma^{0,1,3})^* &= \gamma^{0,1,3}, \quad \gamma^{2*} = -\gamma^2. \end{aligned} \tag{26.4}$$

ここで比例定数を η_C とした行列 $U_C = \eta_C\gamma^2\gamma^0$ が条件 (26.3) を満足している．$C^2 = 1$ の要求から $|\eta_C|^2 = 1$ が導かれ，したがって行列 U_C は位相因子を除いて正確に定義される．以後われわれは $\eta_C = 1$ を選ぼう．そうすれば

$$U_C = \gamma^2\gamma^0 = -\alpha_y. \tag{26.5}$$

$\bar{\psi} = \psi^*\gamma^0 = \tilde{\gamma}^0\psi^* = \gamma^0\psi^*$ であることに気がつくと，演算子 C の作用をつぎのように書くことができる．

$$C\psi = \gamma^2\gamma^0\bar{\psi} = \gamma^2\psi^*. \tag{26.6}$$

スピノール表示に対し変換 (26.6) は，あらわな形で

$$C: \ \xi^\alpha \longrightarrow -i\eta^{\dot{\alpha}*}, \quad \eta_{\dot{\alpha}} \longrightarrow -i\xi^*_\alpha. \tag{26.7a}$$

あるいは同じく

$$C: \ \xi_\alpha \longrightarrow -i\eta^*_{\dot{\alpha}}, \quad \eta^{\dot{\alpha}} \longrightarrow -i\xi^{\alpha*}. \tag{26.7b}$$

平面波 $\psi_{\pm p\sigma}$ に対する荷電共役変換は，標準表示におけるそのあらわな表式 (23.9) と

$$U_C = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_y \\ -\sigma_y & 0 \end{pmatrix} \tag{26.8}$$

を使って容易に行なうことができる．

(23.16) にしたがう $w^{(\sigma)\prime}$ の定義の際に

$$\sigma_y\boldsymbol{\sigma}^* = -\boldsymbol{\sigma}\sigma_y$$

---

1) またこれから出てくる等式

$$U_C\tilde{\gamma}^5 = \gamma^5 U_C \tag{26.3a}$$

も指摘しておこう．

であることに着目して

$$\mathrm{U}_C \bar{u}_{-p-\sigma} = u_{p\sigma}, \quad \mathrm{U}_C u_{-p-\sigma} = \bar{u}_{p\sigma}. \tag{26.9}$$

このようにして

$$\mathrm{C}\psi_{-p-\sigma} = \psi_{p\sigma}. \tag{26.10}$$

したがって ψ-演算子 (25.1) のなかに演算子 $\mathrm{b}_{p\sigma}$ とともに現われる関数 $\psi_{-p-\sigma}$ は，実際に運動量 $\boldsymbol{p}$ と偏り σ の粒子の状態に対応する．また，電子および陽電子の状態が同一の関数

$$\psi_{p\sigma}^{(\text{電})} = \psi_{p\sigma}^{(\text{陽})} = \psi_{p\sigma}$$

で表わされることがわかる．これは関数 $\psi_{p\sigma}$ が粒子の運動量および偏りだけをその性質として持つことから，まったく自然なことである．

時間反転の演算も同様に考察することができる．時間の符号の変化は波動関数の複素共役を伴わねばならない．≪時間反転≫の結果，はじめの ψ と同じ表示の波動関数 $(\mathrm{T}\psi)$ を得るためには，ψ^* (あるいは $\bar{\psi}$) の成分に対し，あるユニタリー変換を行なう必要がある．このようにして (26.2) と同様に，ψ に演算子 T を作用させて

$$\mathrm{T}\psi(t, \boldsymbol{r}) = \mathrm{U}_T \bar{\psi}(-t, \boldsymbol{r}). \tag{26.11}$$

ここで U_T はユニタリー行列である．

ふたたび ψ が満足するディラック方程式

$$\left(i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\boldsymbol{\gamma}\nabla - m\right)\psi(t, \boldsymbol{r}) = 0,$$

および $\bar{\psi}$ に対する方程式

$$\left(i\tilde{\gamma}^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\tilde{\boldsymbol{\gamma}}\nabla + m\right)\bar{\psi}(t, \boldsymbol{r}) = 0$$

を書こう．後の方程式で $t \to -t$ の置き換えをし，左から $-\mathrm{U}_T$ を掛けて

$$\left(i\mathrm{U}_T \tilde{\gamma}^0 \frac{\partial}{\partial t} - i\mathrm{U}_T \tilde{\boldsymbol{\gamma}}\nabla\right)\bar{\psi}(-t, \boldsymbol{r}) - m\mathrm{U}_T \bar{\psi}(-t, \boldsymbol{r}) = 0.$$

関数 $\mathrm{U}_T \bar{\psi}(-t, \boldsymbol{r})$ が $\psi(t, \boldsymbol{r})$ とまったく同じ方程式を満足することが要求される．すなわち

$$\left(i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\boldsymbol{\gamma}\nabla\right)\mathrm{U}_T \bar{\psi}(-t, \boldsymbol{r}) - m\mathrm{U}_T \bar{\psi}(-t, \boldsymbol{r}) = 0.$$

二つの方程式をくらべて，行列 U_T が条件

$$U_T\tilde{\gamma}^0 = \gamma^0 U_T, \quad U_T\tilde{\boldsymbol{\gamma}} = -\boldsymbol{\gamma} U_T \tag{26.12}$$

を満足することがわかる．スピノール表示および標準表示で行列[1]

$$U_T = i\gamma^3\gamma^1\gamma^0 \tag{26.13}$$

がこの条件を満足することがわかる．

このようにして演算子 T の作用は公式

$$T\psi(t, \boldsymbol{r}) = i\gamma^3\gamma^1\gamma^0\bar{\psi}(-t, \boldsymbol{r}) = i\gamma^3\gamma^1\psi^*(-t, \boldsymbol{r}) \tag{26.14}$$

で与えられる．スピノール表示でこの変換はあらわな形で

$$T: \ \xi^\alpha \longrightarrow -i\xi^*_\alpha, \quad \eta_{\dot{\alpha}} \longrightarrow i\eta^{\dot{\alpha}*}, \tag{26.15a}$$

あるいは

$$T: \ \xi_\alpha \longrightarrow i\xi^{\alpha*}, \quad \eta^{\dot{\alpha}} \longrightarrow -i\eta^*_{\dot{\alpha}}. \tag{26.15b}$$

標準表示では

$$U_T = \begin{pmatrix} \sigma_y & 0 \\ 0 & -\sigma_y \end{pmatrix}. \tag{26.16}$$

三つの演算 P，T および C のすべての ψ に対する作用の結果を見いだそう．これに対しては結局

$$\begin{aligned} T\psi(t, \boldsymbol{r}) &= -i\gamma^1\gamma^3\psi^*(-t, \boldsymbol{r}), \\ PT\psi(t, \boldsymbol{r}) &= i\gamma^0(T\psi) = \gamma^0\gamma^1\gamma^3\psi^*(-t, -\boldsymbol{r}), \\ CPT\psi(t, \boldsymbol{r}) &= \gamma^2(\gamma^0\gamma^1\gamma^3\psi^*)^* = \gamma^2\gamma^0\gamma^1\gamma^3\psi(-t, -\boldsymbol{r}), \\ \text{または} \quad CPT\psi(t, \boldsymbol{r}) &= i\gamma^5\psi(-t, -\boldsymbol{r}). \end{aligned} \tag{26.17}$$

スピノール表示では

$$CPT: \ \xi^\alpha \longrightarrow -i\xi^\alpha, \quad \eta_{\dot{\alpha}} \longrightarrow i\eta_{\dot{\alpha}} \tag{26.18}$$

（これは変換則 (20.4)，(26.7)，(26.15) から直接に確かめられる）[2]．

行列 U_C および U_T に対する上記の式は ψ のスピノール表示あるいは標準表示を仮定し

---

1) (26.13) の位相因子の選択は，先にいって 115 頁の脚注で示される考察により，(26.5) における選択に関連している．

2) CPT の書き方は演算子の作用が右から左への順序であると仮定している．(26.11)，(26.18) の共通符号はその順序に依存している．それは T が C および P と（その双スピノールに対する作用については）非可換であるためである．

ている．最後に，ψ の任意の表示に対して，これらの式の性質のなかの何が保存されるかを見よう．

ψ がユニタリー変換を受けたとする．すなわち

$$\psi' = U\psi, \quad \gamma' = U\gamma U^{-1}, \quad \bar{\psi}' = \psi'^{*}\gamma^{0\prime} = \bar{\psi}U^{+} = \bar{\psi}U^{-1}. \tag{26.19}$$

そうすると新しい表示では

$$(C\psi)' = U(C\psi) = UU_C\bar{\psi} = UU_C(\bar{\psi}'U) = UU_C\tilde{U}\bar{\psi}'$$

となる．新しい表示での行列 U'_C の定義 $((C\psi)' = U'_C\bar{\psi}')$ とくらべて

$$U'_C = UU_C\tilde{U}. \tag{26.20}$$

変換 (26.20) は実の U に対してのみ行列 γ の変換と一致する．したがって，スピノールあるいは標準表示から実変換によって得られる表示でのみ，(26.5) は成り立つ．

行列 (26.5) はユニタリーである，しかし転置をするとその符号が変わる．すなわち

$$U_CU_C^{+} = 1, \quad \tilde{U}_C = -U_C. \tag{26.21}$$

この性質は，変換 (26.20) に関して不変であり，したがって任意の表示で成り立つ．行列 (26.5) もまたエルミートである $(U_C = U_C^{+})$．しかしその性質は一般に変換 (26.20) によって壊される．

いままで述べたことはすべて ((26.21) も含めて) 行列 U_T の性質についても言える．

第二量子化の方法では，$\boldsymbol{\psi}$-演算子に対する変換 C, P, T はまた粒子の生成および消滅演算子の変換則として定式化される必要がある．これらの法則は (§13 でスピン 0 の粒子に対して行なわれたのと同様に)，つぎのようにして確立することができる．すなわち，$\boldsymbol{\psi}$-演算子の変換が

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\psi}^{C}(t, \boldsymbol{r}) &= U_C\bar{\boldsymbol{\psi}}(t, \boldsymbol{r}), \\ \boldsymbol{\psi}^{P}(t, \boldsymbol{r}) &= i\gamma^0\boldsymbol{\psi}(t, -\boldsymbol{r}), \\ \boldsymbol{\psi}^{T}(t, \boldsymbol{r}) &= U_T\bar{\boldsymbol{\psi}}(-t, \boldsymbol{r}) \end{aligned} \tag{26.22}$$

の形に表わせるはずであるという要求から出発する．得られた式を使った計算は，つぎのような変換が，これらの条件を満足することを示している．すなわち

$$\begin{aligned} a^{C}_{\boldsymbol{p}\sigma} &= b_{\boldsymbol{p}\sigma}, & b^{C}_{\boldsymbol{p}\sigma} &= a_{\boldsymbol{p}\sigma}; \\ a^{P}_{-\boldsymbol{p}\sigma} &= i\,a_{\boldsymbol{p}\sigma}, & b^{P}_{-\boldsymbol{p}\sigma} &= i\,b_{\boldsymbol{p}\sigma}; \\ a^{T}_{-\boldsymbol{p}-\sigma} &= 2\sigma i\,a^{+}_{\boldsymbol{p}\sigma}, & b^{T}_{-\boldsymbol{p}-\sigma} &= 2\sigma i\,b^{+}_{\boldsymbol{p}\sigma}. \end{aligned} \tag{26.23}$$

問　　題

マヨラナ表示（§21，問題2参照）での荷電共役の演算子を見いだせ．

解　マヨラナ表示の行列 U'_C は，標準表示の行列 $U_C=-\alpha_y$ から，$U=(\alpha_y+\beta)/\sqrt{2}$ の変換（26.20）によって求めることができ，$U'_C=\alpha_y$ に等しい（α_y および β は標準表示の行列を意味する）．$'$ をつけた量をマヨラナ表示の量とすると，$C\psi'=U'_C(\psi'^*\beta')$ である．$\beta'=\alpha_y$ であるから

$$C\psi'=\alpha_y(\psi'^*\alpha_y)=\alpha_y\alpha_y\psi'^*=\psi'^*$$

である．すなわち荷電共役は複素共役と同等である．

§27．粒子と反粒子の内部偶奇性

スピン1/2の粒子の静止系における波動関数は，一つの3次元スピノールに帰してしまう（これを Φ^α としよう）．この粒子の内部偶奇性の概念は，反転に対するこのスピノールのふるまいと関連している．しかしながら（§19ですでに示されているように），3次元スピノールの二つの可能な変換則（$\Phi^\alpha\longrightarrow\pm i\Phi^\alpha$）は互いに同等ではないけれども，スピノールに一定の偶奇性を与えることは絶対的な意味を持たない．したがって，スピン1/2の粒子自身の内部偶奇性について語ることは無意味である．しかしながら，二つのこのような粒子の相対的内部偶奇性について語ることはできる．

二つの（3次元）スピノール $\Phi^{(1)}$ および $\Phi^{(2)}$ からスカラー $\Phi^{(1)}_\alpha\Phi^{(2)\alpha}$ を作ることができる．もしもこれが真正スカラーならば，与えられたスピノールで記述される粒子は同じ偶奇性を持つという．もしもこれが擬スカラーならば，反対の内部偶奇性を持つという．

（スピン 1/2 の）粒子と反粒子の内部偶奇性が反対であることを示そう（В. Б. Берестецкий, 1948）．

このために，もしも（スピノール表示における）変換P（19.5）

$$\mathrm{P}:\ \xi^\alpha\longrightarrow i\eta_{\dot\alpha},\quad \eta_{\dot\alpha}\longrightarrow i\xi^\alpha \tag{27.1}$$

の両辺に演算 C（26.7）を行なう．

$$\eta^{c\dot\alpha *}\longrightarrow i\xi^{c *}_\alpha,\quad \xi^{c *}_\alpha\longrightarrow i\eta^{c\dot\alpha *}.$$

ここで添字 c は，双スピノール $\psi=\binom{\xi}{\eta}$ に荷電共役な双スピノール $\psi^c=\binom{\xi^c}{\eta^c}$ の成分を表わす．複素共役を行ない，添字を移すと

$$\mathrm{P}:\ \eta^c_{\dot\alpha}\longrightarrow i\xi^{c\alpha},\quad \xi^{c\alpha}\longrightarrow i\eta^c_{\dot\alpha}. \tag{27.2}$$

荷電共役な双スピノールは反転に際し同一の法則で変換されることがわかる.

$\psi^{(電)}$ を粒子（電子）の波動関数とし，$\psi^{(陽)}$ を反粒子（陽電子）の波動関数としよう．後者は，ディラック方程式の≪負振動数≫の解に荷電共役な双スピノールである.

静止系でこれらのおのおのは，ある3次元スピノールになる．すなわち

$$\xi^{(電)\alpha} = \eta^{(電)}_{\dot{\alpha}} = \Phi^{(電)\alpha}, \quad \xi^{(陽)\alpha} = \eta^{(陽)}_{\dot{\alpha}} = \Phi^{(陽)\alpha}.$$

(27.1)，(27.2) にしたがってこれらのスピノールは反転に際して，法則

$$\Phi^{\alpha} \longrightarrow i\Phi^{\alpha} \tag{27.3}$$

にしたがって変換される．これは $\Phi^{(電)}$ および $\Phi^{(陽)}$ に対して同じである．積 $\Phi^{(電)}\Phi^{(陽)}$ は符号が変わり，上の主張は証明されたことになる.

第二量子化の方法で，粒子と反粒子の相反する偶奇性は，反転に際して演算子の積が符号を変えること，すなわち $\mathrm{a}_{p\sigma}\mathrm{b}_{p\sigma} \longrightarrow -\mathrm{a}_{p\sigma}\mathrm{b}_{p\sigma}$ に現われる ((26.23) 参照).

自分の反粒子と≪合致する≫粒子を真正中性と呼ぶ (§12)．このような粒子の場の ψ-演算子は条件

$$\psi(t, \boldsymbol{r}) = \psi^{C}(t, \boldsymbol{r})$$

を満足する．スピン1/2の粒子に対して，これは（スピノール表示で）条件

$$\xi^{\alpha} = -i\eta^{\dot{\alpha}*}, \quad \eta_{\dot{\alpha}} = -i\xi^{*}_{\alpha} \tag{27.4}$$

を意味する．なんらかの物理的意味を表わすすべての関係式と同様，この条件は変換CPT[1] に対して不変である．事実これがCPTに対してだけでなく，三つの変換のおのおのに対してもまた不変であることを容易に確かめることができる.

§19でスピノールの反転を $P^2 = -1$ のようなものに限ったし，またいままでこの定義をしてきた．上で求められた粒子と反粒子の相対的偶奇性についての結果は，当然のことながら反転の定義の方法には依存しないことが容易にわかる.

もしも反転が $P^2 = 1$ の条件で定義されるとすれば，(27.1) の代りに

$$\mathrm{P}: \ \xi^{\alpha} \longrightarrow \eta_{\dot{\alpha}}, \quad \eta_{\dot{\alpha}} \longrightarrow \xi^{\alpha}. \tag{27.5}$$

荷電共役の関数は，このとき法則

---

1) 正確に言えば，この場合変換CPTは，(27.4)の形の関係式を不変に保つように定義される必要がある．これは行列 U_T の定義のなかの位相因子の適当な選択により可能である (112頁の脚注参照).

$$\xi^{C\alpha} \longrightarrow -\overset{c}{\eta}_{\dot{\alpha}}, \quad \overset{c}{\eta}_{\dot{\alpha}} \longrightarrow -\xi^{C\alpha}$$

にしたがって変換され，(27.5)と符号が異なる．これにしたがって3次元スピノールΦは

$$\Phi^{(電)\alpha} \longrightarrow \Phi^{(電)\alpha}, \quad \Phi^{(陽)\alpha} \longrightarrow -\Phi^{(陽)\alpha}$$

で変換され，積 $\Phi^{(電)}\Phi^{(陽)}$ は前と同じように擬スカラーである．

二つの反転の概念から導かれる物理的結果の，可能な唯一の相違は，場の真正中性の条件が(27.5)の定義ではこの変換（あるいは変換CP）に対して不変でないことにある．それは等式（27.4）の両辺の相対的符号を変えるはずだからである．スピン1/2の真正中性の粒子は知られていない．そして現在のところ，反転の二つの定義の上記の相違が物理的意味を持つように言ってはいけない[1]．

問　　題

ポジトロニウム（電子と陽電子から成る水素類似の系）の荷電偶奇性を求めよ．

解　2個のフェルミオンの波動系は，座標，スピンと荷電変数の同時交換に対して反対称でなければならない（§13 の問題参照）．第一の交換は関数に $(-1)^l$ を掛け，第二の交換は $(-1)^{1+S}$（ここで $S=0$ あるいは 1 は系の全スピンである），第三の交換は求める C を掛ける．条件 $(-1)^l(-1)^{1+S}C=-1$ から

$$C=(-1)^{l+S}.$$

電子と陽電子の内部偶奇性は逆であるから，系の空間的偶奇性は $P=(-1)^{l+1}$ である．結合した偶奇性は $CP=(-1)^{S+1}$ である．

§28.　双1次形式

関数 ψ および ψ^* の成分から組み立てることのできる，種々の双1次形式の変換性を考察しよう．このような形式は量子力学では一般に重要な役割を果たしている．電流密度の4-ベクトル(21.11)もそのなかに含まれる．

ψ および ψ^* は4成分を持っているので，これらから $4\times4=16$ 個の独立な双1次成分を作ることができる．これらの量の変換性による分類は，すでに §19 であげた，任意の二つの双スピノール（この場合には ψ および ψ^*）を掛けあわす方法から明らかである．

---

1)　反転の二つの定義の同等性が完全でないことはラカーにより指摘された (G. Racah, 1937)．

すなわちスカラー（これをSで表わす），擬スカラー(P)，真正4-ベクトルV^μと同等な2階の混合スピノール（四つの独立な量），4-擬ベクトルA^μと同等な2階の混合スピノール（四つの量），反対称4-テンソル$T^{\mu\nu}$と同等な2階の双スピノール（六つの量）を作ることができる．

(ψの任意の表示に対して)対称な形ではこの結合をつぎの形に書くことができる．

$$S=\bar{\psi}\psi,\quad P=i\bar{\psi}\gamma^5\psi,$$
$$V^\mu=\bar{\psi}\gamma^\mu\psi,\quad A^\mu=\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi,\quad T^{\mu\nu}=i\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi. \tag{28.1}$$

ここで

$$\sigma^{\mu\nu}=\frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu-\gamma^\nu\gamma^\mu)=(\boldsymbol{\alpha},i\boldsymbol{\Sigma}) \tag{28.2}$$

((28.2)の成分の計算は(19.15)[1]にしたがう)．上記の量はすべて実数である．

SおよびPという量がスカラーおよび擬スカラーであることは，そのスピノール表示

$$S=\xi^*\eta+\eta^*\xi,\quad P=i(\xi^*\eta-\eta^*\xi)$$

から明らかである．これはちょうど(19.7)および(19.8)式と対応している．つぎに量V^μのベクトルの性質は，ディラック方程式から明らかである．すなわち，等式$\mathrm{p}_\mu\gamma^\mu\psi=m\psi$に左から$\bar{\psi}$を掛けて

$$(\bar{\psi}\mathrm{p}_\mu\gamma^\mu\psi)=m\bar{\psi}\psi$$

を得る．右辺はスカラーであるから，左辺の式もスカラーでなければならない．

(28.1)の作り方は明らかである．すなわち，これらはつぎのように構成されている．もしも行列γ^μがベクトルを構成すれば，γ^5は擬スカラーであり，両側にある$\bar{\psi}$とψはいっしょになってスカラーを構成するようになっている[2]．対称4-テンソルの性質を持つような双1次形式がないことは，スピノール表示では明らかであるが，この規則からも明らかである．なぜならば，行列の対称的な結合$\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu=2g^{\mu\nu}$であるから，このような形式はスカラーになるはずである．

双1次形式の第二量子化は(28.1)でψ-関数をψ-演算子で置き換えることによって得

---

1) ψのユニタリー変換（表示の変更）で，$\psi\longrightarrow\mathrm{U}\psi$，$\gamma\longrightarrow\mathrm{U}\gamma\mathrm{U}^{-1}$，$\bar{\psi}\longrightarrow\bar{\psi}\mathrm{U}^{-1}$となる．そしてこのような変換に際して双1次形式が不変なことは明らかである．

2) γ^5が≪擬スカラーであること≫自身がこの規則に対応している．なぜかというと

$$\gamma^5=\frac{i}{24}e_{\lambda\mu\nu\rho}\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho$$

であるからである．

られる．一般性を拡大するために，二つの ψ-演算子が異なる粒子の場に関するものとし，これらを添字 a および b で区別しよう．荷電共役に対してこのような演算子の双1次形式がどのように変換するかを明らかにしよう．

$$\psi^C = U_C \bar{\psi}, \quad \bar{\psi}^C = U_C^+ \psi \tag{28.3}$$

に注目し[1]，(26.3) および (26.21) を使って

$$\bar{\psi}_a^C \psi_b^C = (U_C^+ \psi_a)(U_C \bar{\psi}_b) = \psi_a U_C^* U_C \bar{\psi}_b = -\psi_a U_C^+ U_C \bar{\psi}_b = -\psi_a \bar{\psi}_b,$$

$$\bar{\psi}_a^C \gamma^\mu \psi_b^C = \psi_a U_C^* \gamma^\mu U_C \bar{\psi}_b = -\psi_a U_C^+ \gamma^\mu U_C \bar{\psi}_b = \psi_a \tilde{\gamma}^\mu \bar{\psi}_b$$

を得る．フェルミの交換則を使って演算子を交換してもとの順序（$\bar{\psi}$ を ψ の左）にする際に積の符号が変わる（その他に場の状態に依存しない項が現われるが，これは § 13 の類似の出導の際のように落とすことができる）．このようにして

$$\bar{\psi}_a^C \psi_b^C = \bar{\psi}_b \psi_a, \quad \bar{\psi}_a^C \gamma^\mu \psi_b^C = -\bar{\psi}_b \gamma^\mu \psi_a.$$

同様に残りの形式を変換して，荷電共役の際に[2]

$$C: S_{ab} \to S_{ba}, \quad P_{ab} \to P_{ba}, \quad V_{ab}^\mu \to -V_{ba}^\mu, \quad A_{ab}^\mu \to A_{ba}^\mu, \quad T_{ab}^{\mu\nu} \to -T_{ba}^{\mu\nu} \tag{28.4}$$

同様にして，時間反転の際のこれらの形式のふるまいも明らかにすることができる．この際，これらの演算が演算子の順序を変えることを知る必要がある（§ 13 参照）．したがって，たとえば

$$(\bar{\psi}_a \psi_b)^T = \psi_b^T \bar{\psi}_a^T.$$

ここで

$$\psi^T = U_T \bar{\psi}, \quad \bar{\psi}^T = -U_T^+ \psi \tag{28.5}$$

を代入して

---

1) 第二の等式を第一の等式から求めるために（(26.3) と (26.21) および γ^0 のエルミート性を使い）

$$\bar{\psi}^C = [U_C^*(\psi \gamma^{0*})]\gamma^0 = \tilde{\gamma}^0 U_C^* \gamma^0 \psi = -\tilde{\gamma}^0 U_C^+ \gamma^0 \psi = \tilde{\gamma}^0 \gamma^{0*} U_C^+ \psi = U_C^+ \psi.$$

2) ψ-関数（ψ-演算子でなく）から組み立てられた，双1次形式に対して，変換 (28.4) は逆符号を持つことに着目しよう．なぜかというと，因子 $\bar{\psi}$ と ψ の元の順序にもどしても符号の変化を伴わないからである．

$$(\overline{\psi}_a\psi_b)^T = -(U_T\overline{\psi}_b)(U_T^+\psi_a) = -\overline{\psi}_b\widetilde{U}_T U_T^+\psi_a = \overline{\psi}_b U_T U_T^+\psi_a = \overline{\psi}_b\psi_a.$$

残りの双1次形式をこのように考察して

$$\mathrm{T}:\quad \begin{array}{l} S_{ab}\longrightarrow S_{ba},\quad P_{ab}\longrightarrow -P_{ba},\quad (V^0,\mathbf{V})_{ab}\longrightarrow (V^0,-\mathbf{V})_{ba},\\ (A^0,\mathbf{A})_{ab}\longrightarrow (A^0,-\mathbf{A})_{ba},\quad T^{\mu\nu}_{ab}=(\mathbf{p},\mathbf{a})_{ab}\longrightarrow(\mathbf{p},-\mathbf{a})_{ba}\end{array} \tag{28.6}$$

((19.15) にしたがって，$\mathbf{p}$, $\mathbf{a}$ は $T^{\mu\nu}$ の成分と同等な3次元ベクトルである).

空間反転に際し，これらの量のテンソルの性質に対応して

$$\mathrm{P}:\quad \begin{array}{l} S_{ab}\longrightarrow S_{ab},\quad P_{ab}\longrightarrow -P_{ab},\quad (V^0,\mathbf{V})_{ab}\longrightarrow (V^0,-\mathbf{V})_{ab},\\ (A^0,\mathbf{A})_{ab}\longrightarrow (-A^0,\mathbf{A})_{ab},\quad T^{\mu\nu}_{ab}=(\mathbf{p},\mathbf{a})_{ab}\longrightarrow(-\mathbf{p},\mathbf{a})_{ab}.\end{array} \tag{28.7}$$

最後に，三つの演算を同時に行なうと[1)]

$$\mathrm{CPT}:\quad \begin{array}{l} S_{ab}\longrightarrow S_{ab},\quad P_{ab}\longrightarrow P_{ab},\quad V^\mu_{ab}\longrightarrow -V^\mu_{ab},\\ A^\mu_{ab}\longrightarrow -A^\mu_{ab},\quad T^{\mu\nu}_{ab}\longrightarrow T^{\mu\nu}_{ab}\end{array} \tag{28.8}$$

を与える．そしてこれはちょうど4-反転の変換の意味に対応している．4-反転は4-座標系の回転と同等なので，それに対しては任意の階数の真正および擬テンソルのあいだになにも差はないからである．

四つの異なる関数 ψ^a, ψ^b, ψ^c, ψ^d からできている双1次形式の対の積を考えよう．どのような対になってこれらが掛けあわされるかによって異なる結果が得られる．しかしながら，このようなすべての積を，対ごとに定まった因子を持つ双1次形式の積に導きうることがわかっている (W. Pauli, M. Fierz, 1936)．このような導出の基礎にある関係式を導こう．

4行4列の行列の全体

$$1,\ \gamma^5,\ \gamma^\mu,\ i\gamma^\mu\gamma^5,\ i\sigma^{\mu\nu} \tag{28.9}$$

(1は単位行列) を考えよう．これら16 (1＋1＋4＋4＋6) 個の行列を，なんらかの定まった順に番号づけて，これらを $\gamma^A (A=1,\cdots\cdots,16)$ で表わそう．そして同じ行列で4-テンソル添字 $(\mu\nu)$ を下げられたものを γ_A で表わそう．これらはつぎの性質を持って

1) 誤解を避けるために，変換 T および P はまた関数の引数の変化も要求していることを思い起こそう．もしも左辺が $x=(t,\mathbf{r})$ の関数ならば，(22.6)～(22.8) の右辺 (変換された形式の) はそれぞれ $x^T=(-t,\mathbf{r})$, $x^P=(t,-\mathbf{r})$, $x^{CPT}=(-t,-\mathbf{r})$ の関数である．

いる.

$$\mathrm{Sp}\,\gamma^A = 0 \quad (\gamma^A \neq 1),$$
$$\gamma^A \gamma_A = 1, \quad \frac{1}{4}\mathrm{Sp}\,\gamma^A \gamma_B = \delta^A_B. \tag{28.10}$$

最後の式のために行列 γ^A は1次独立である. これらの数が, 4行4列の行列要素の数 (4×4) に等しいので, γ^A は完全系をなし, 任意の4行4列の行列 Γ はこれによって展開できる. すなわち

$$\Gamma = \sum_A c_A \gamma^A, \quad c_A = \frac{1}{4}\mathrm{Sp}\,\gamma_A \Gamma, \tag{28.11}$$

あるいは行列の添字 $(i, k = 1, 2, 3, 4)$ を使って展開した形で

$$\Gamma_{ik} = \frac{1}{4}\sum_A \Gamma_{lm} \gamma^A_{ml} \gamma_{Aik}$$

となる. 特に行列 Γ が 0 と異なるただ一つの要素 (Γ_{lm}) だけを持つとき, 求める関係式（≪完全性の条件≫）を得る.

$$\delta_{il}\delta_{km} = \frac{1}{4}\sum_A \gamma_{Aik} \gamma^A_{ml}. \tag{28.12}$$

この等式の両辺に $\bar{\psi}^a_i \psi^b_k \bar{\psi}^c_m \psi^d_l$ を掛けて

$$(\bar{\psi}^a \psi^d)(\bar{\psi}^c \psi^b) = \frac{1}{4}\sum_A (\bar{\psi}^a \gamma_A \psi^b)(\bar{\psi}^c \gamma^A \psi^d). \tag{28.13}$$

これは上で示された形の等式の一つである. すなわち, これは二つのスカラー双1次形式を, 他の対の因子から成る形式の積に帰しているからである.

この形の別の等式は

$$\psi^d \longrightarrow \gamma^B \psi^d, \quad \psi^b \longrightarrow \gamma^C \psi^b$$

の置き換えを行ない, 展開

$$\gamma^A \gamma^B = \sum_R c_R \gamma^R, \quad c_R = \frac{1}{4}\mathrm{Sp}\,\gamma^A \gamma^B \gamma_R$$

を使って求められる (問題参照).

ここで将来の引用のために, 2行2列の行列に対する (28.12) に類似の関係式もまた示しておこう. 線型独立な2行2列の行列の完全系 $\sigma^A (A = 1, \cdots\cdots, 4)$ は

$$1, \ \sigma_x, \ \sigma_y, \ \sigma_z \tag{28.14}$$

から成る．これらに対しては

$$\mathrm{Sp}\,\sigma^A = 0 \quad (\sigma^A \neq 1),$$
$$\frac{1}{2}\mathrm{Sp}\,\sigma^A\sigma^B = \delta_{AB} \tag{28.15}$$

が成り立つ．完全性の条件は

$$\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} = \frac{1}{2}\sum_A \sigma^A_{\alpha\beta}\sigma^A_{\delta\gamma} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_{\alpha\beta}\boldsymbol{\sigma}_{\delta\gamma} + \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\delta_{\delta\gamma} \tag{28.16}$$

$(\alpha, \beta \cdots\cdots = 1, 2)$，あるいは

$$\boldsymbol{\sigma}_{\alpha\beta}\boldsymbol{\sigma}_{\delta\gamma} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_{\alpha\gamma}\boldsymbol{\sigma}_{\delta\beta} + \frac{3}{2}\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\delta\beta}. \tag{28.17}$$

問　　題

1.　双1次形式 S, P, V, A, T の2個のスカラー積に対し，(28.13) と似た公式を導け．

解

$$J_S = (\bar{\psi}^a\psi^b)(\bar{\psi}^c\psi^d), \quad J_P = (\bar{\psi}^a\gamma^5\psi^b)(\bar{\psi}^c\gamma^5\psi^d),$$
$$J_V = (\bar{\psi}^a\gamma^\mu\psi^b)(\bar{\psi}^c\gamma_\mu\psi^d), \quad J_A = (\bar{\psi}^a i\gamma^\mu\gamma^5\psi^b)(\bar{\psi}^c i\gamma_\mu\gamma^5\psi^d),$$
$$J_T = (\bar{\psi}^a i\sigma^{\mu\nu}\psi^b)(\bar{\psi}^c i\sigma_{\mu\nu}\psi^d)$$

と置こう．そして同じ記号で ′ のついたものは，ψ^b と ψ^d を取り替えたものとしよう．本文に示された方法で

$$\begin{aligned}
4J'_S &= J_S + J_V + J_T + J_A + J_P,\\
4J'_V &= 4J_S - 2J_V + 2J_A - 4J_P,\\
4J'_T &= 6J_S - 2J_T + 6J_P,\\
4J'_A &= 4J_S + 2J_V - 2J_A - 4J_P,\\
4J'_P &= J_S - J_V + J_T - J_A + J_P
\end{aligned}$$

を得る（1行目は (28.13) による）．

2.

$$J^{ab,cd} = -J^{ad,cb}$$

であることを示せ．ここで

$$J^{ab,cd} = (\bar{\psi}^a\gamma^\mu(1+\gamma^5)\psi^b)(\bar{\psi}^c\gamma_\mu(1+\gamma^5)\psi^d)$$

である．

解　いま考えている量は4-回転に対してスカラーであるが，反転に関して一定の偶奇

性は持たない．求める等式はスピノール表示の場合一番簡単に求められる．

$$\gamma^\mu(1+\gamma^5) = \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\gamma^\mu(1+\gamma^5)$$

および

$$\frac{1}{2}(1+\gamma^5)\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_{\dot\alpha} \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2}\psi(1-\gamma^5) = \begin{pmatrix} \eta^*_{\dot\alpha} \\ 0 \end{pmatrix}$$

に注意すると，われわれは≪スカラー≫ $J^{ab,cd}$ は2階のスピノール

$$\zeta^{(ab)}_{\alpha\dot\beta} = \eta^{a*}_{\dot\alpha}\eta^b_{\dot\beta}, \quad \zeta^{(cd)}_{\alpha\dot\beta} = \eta^{c*}_{\dot\alpha}\eta^d_{\dot\beta}$$

を使って表わされることがわかる．したがって

$$J^{ab,cd} \backsim \zeta^{(ab)}_{\alpha\dot\beta}\zeta^{(cd)\alpha\dot\beta} = \eta^{a*}_{\dot\alpha}\eta^{c\dot\alpha *}\eta^b_{\dot\beta}\eta^{d\dot\beta}$$

になるはずであることがわかる．

添字 b と d を取り替え

$$\eta^b_{\dot\beta}\eta^{d\dot\beta} = -\eta^{b\dot\beta}\eta^d_{\dot\beta}$$

に注意すると，求める結果が得られる．

§29. 偏りの密度行列

運動量 $\boldsymbol{p}$ の自由運動を記述する波動関数（平面波）の座標依存性は因子 $e^{i\boldsymbol{pr}}$ に帰し，振幅 u_p はスピン波動関数の役割を演じる．このような（純粋）状態では粒子は完全に偏っている（Ⅲ,§59 参照）．非相対論的理論でこれは，粒子のスピンが空間の一定の方向を持つこと，（詳しく言えば，スピンの投影が一定の値 1/2 になるような方向が存在すること）を意味する．相対論的理論では，（§23 で強調されているように）スピン・ベクトルの非保存のために，任意の基準系で，状態のこのような性質は不可能である．状態の純粋性は，静止系でスピンが一定の方向を持つことだけを意味している．

部分的に偏った状態では一定の振幅が存在しない．ただ**偏りの密度行列** $\rho_{ik}(i,k=1,2,3,4$ は双スピノールの添字である）だけが存在する．われわれは，純粋状態でそれが積

$$\rho_{ik} = u_{pi}\bar u_{pk} \tag{29.1}$$

に帰するようにこの行列を決めよう．これにしたがって行列 ρ は条件

$$\mathrm{Sp}\,\rho = 2m \tag{29.2}$$

により規格化される((23.4)参照).

純粋状態では，スピンの平均値は

$$\bar{\mathbf{s}} = \frac{1}{2}\int \psi^* \Sigma \psi d^3 x = \frac{1}{4\varepsilon} u_p^* \Sigma u_p = \frac{1}{4\varepsilon} \bar{u}_p \gamma^0 \Sigma u_p \tag{29.3}$$

という量で定義される．部分的な偏りの状態に対応する式は

$$\bar{\mathbf{s}} = \frac{1}{4\varepsilon} \mathrm{Sp}(\rho \gamma^0 \Sigma) = \frac{1}{4\varepsilon} \mathrm{Sp}\,(\rho \gamma^5 \boldsymbol{\gamma}). \tag{29.4}$$

振幅 $u_p, \bar{u}_p$ は連立代数方程式 $(\hat{p}-m)u_p = 0, \bar{u}_p(\hat{p}-m) = 0$ を満足する．したがって，行列 (29.1) は方程式

$$(\hat{p}-m)\rho = \rho(\hat{p}-m) = 0 \tag{29.5}$$

を満足する．一般に（スピンに関し）混合状態の密度行列は，このような連立一次方程式にしたがう必要がある（III，§14 の類似の結果参照).

自由粒子をその静止系で考察すると，非相対論的理論が適用できる．しかしこの理論で部分的に偏った状態は三つのパラメータ，すなわちスピンの平均値のベクトル $\bar{\mathbf{s}}$ の成分で定義される（III，§59 参照)．したがって，この同じパラメータが任意のローレンツ変換ののちに，すなわち運動粒子に対して偏りの状態を定義する．

静止系でのスピン・ベクトルの平均値の2倍を $\boldsymbol{\zeta}$ で表わそう（純粋状態では $|\boldsymbol{\zeta}| = 1$ で，混合状態では $|\boldsymbol{\zeta}| < 1$ である)．偏った状態の4次元的記述のためには，静止系で3次元ベクトル $\boldsymbol{\zeta}$ と一致する4-ベクトル a^μ を導入するとつごうがよい．$\boldsymbol{\zeta}$ は軸性ベクトルなので a^μ は4-擬ベクトルである．この4-ベクトルは静止系で4-運動量と直交する（ここで $a^\mu = (0, \boldsymbol{\zeta})$，$p^\mu = (m, 0)$)．したがって，任意の基準系では

$$a^\mu p_\mu = 0. \tag{29.6}$$

任意の基準系では，また

$$a_\mu a^\mu = -\boldsymbol{\zeta}^2. \tag{29.7}$$

粒子が速度 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{p}/\varepsilon$ で動いている基準系での4-ベクトルの成分 a^μ は，静止系からローレンツ変換によって見いだされ

$$a^0 = \frac{|\boldsymbol{p}|}{m}\zeta_\parallel, \quad \boldsymbol{a}_\perp = \boldsymbol{\zeta}_\perp, \quad a_\parallel = \frac{\varepsilon}{m}\zeta_\parallel \tag{29.8}$$

に等しい．ここで添字 ‖ および ⊥ はベクトル $\boldsymbol{\zeta}$ および $\boldsymbol{a}$ の方向 $\boldsymbol{p}$[1] に平行および垂直な成分を表わす．これらの公式はベクトルの形でつぎのように書くことができる．

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\zeta}+\frac{\boldsymbol{p}(\boldsymbol{\zeta p})}{m(\varepsilon+m)}, \quad a^0 = \frac{\boldsymbol{ap}}{\varepsilon} = \frac{\boldsymbol{p\zeta}}{m}, \qquad a^2 = \boldsymbol{\zeta}^2+\frac{(\boldsymbol{p\zeta})^2}{m^2}. \tag{29.9}$$

まず最初に偏らない状態 ($\boldsymbol{\zeta}=0$) を考察しよう．この場合密度行列はパラメータとしてただ 4-運動量 p だけを含んでいる．方程式 (29.5) を満足するこのような行列の唯一の形は

$$\rho = \frac{1}{2}(\hat{p}+m) \tag{29.10}$$

である (И. Е. Тамм, 1930; H. B. C. Casimir, 1933)．定係数は規格化条件 (29.2) と対応するように選ばれた．

部分的な偏りの一般の場合に ($\boldsymbol{\zeta} \neq 0$)，密度行列は

$$\rho = \frac{1}{4m}(\hat{p}+m)\rho'(\hat{p}+m) \tag{29.11}$$

の形になる．これは自動的に方程式 (29.5) を満足する．$\boldsymbol{\zeta}=0$ のとき補助的行列 ρ' は単位行列になる必要がある．$(\hat{p}+m)^2 = 2m(\hat{p}+m)$ であるから，(29.11) はそこでは (29.10) 式に一致する．さらにそれは 4-ベクトル a をパラメータとして線型に含む必要がある．すなわち

$$\rho' = 1-A\gamma^5\hat{a} \tag{29.12}$$

の形をしている．この第2項は擬ベクトル a と≪行列 4-擬ベクトル≫ $\gamma^5\gamma$ とのスカラー乗積となっている．係数 A を決めるために，静止系での密度行列を書く．

---

1) その変換性から，スピンの平均ベクトル $\bar{\boldsymbol{s}}$ の成分は，(すべての角運動量と同様に) 相対論的力学では反対称テンソル $S^{\lambda\mu}$ の空間成分である．4-ベクトル a^λ はこのテンソルと

$$S^{\lambda\mu} = \frac{1}{2m}e^{\lambda\mu\nu\rho}a_\nu p_\rho, \quad a^\lambda = -\frac{2}{m}e^{\lambda\mu\nu\rho}S_{\mu\nu}p_\rho$$

によって結ばれている．任意の基準系では 4-ベクトル a^λ の空間部分 $\boldsymbol{a}$ はベクトル $2\bar{\boldsymbol{s}}$ と一致しない．

$$2\bar{s}_\parallel = \frac{1}{m}(a_\parallel\varepsilon - a^0|\boldsymbol{p}|) = \zeta_\parallel, \quad 2\boldsymbol{s}_\perp = \frac{\varepsilon}{m}\boldsymbol{a}_\perp = \frac{\varepsilon}{m}\boldsymbol{\zeta}_\perp$$

であることは容易にわかる．

$$\rho = \frac{m}{4}(1+\gamma^0)(1+A\gamma^5\boldsymbol{\gamma\zeta})(1+\gamma^0) = \frac{m}{2}(1+\gamma^0)(1+A\gamma^5\boldsymbol{\gamma\zeta}).$$

そして (29.4) にしたがってスピンの平均値を計算しよう．§22 であげた規則を使って，求める跡のなかで 0 と異なる唯一の項は

$$2\bar{\mathbf{s}} = \frac{1}{2m}\mathrm{Sp}\,(\rho\gamma^5\boldsymbol{\gamma}) = -\frac{A}{4}\mathrm{Sp}((\boldsymbol{\gamma\zeta})\boldsymbol{\gamma}) = A\boldsymbol{\zeta}$$

であることが容易にわかる．この式で $\boldsymbol{\zeta}$ をくらべて $A=1$ を得る．ρ に対する最終的な式は (29.12) を (29.11) に代入し，因子 ρ' と $(\hat{p}+m)$ を入れ換えて求めよう．a と p との直交性から γp は γa と反可換である．すなわち

$$\hat{a}\hat{p} = 2ap - \hat{p}\hat{a} = -\hat{p}\hat{a}$$

である．したがって，$\gamma^5\hat{a}$ と可換である．

このようにして，部分的に偏った電子の密度行列は式

$$\rho = \frac{1}{2}(\hat{p}+m)(1-\gamma^5\hat{a}) \tag{29.13}$$

で与えられる (L. Michel, A. S. Wightman, 1955)．もしも行列 ρ が知られていると，状態を特徴づける 4-ベクトル a (およびそれとともにベクトル $\boldsymbol{\zeta}$) は公式

$$a^\mu = \frac{1}{2m}\mathrm{Sp}(\rho\gamma^5\gamma^\mu) \tag{29.14}$$

によって見いだすことができる．

陽電子の密度行列に対する公式は，電子に対するものとまったく類似している．もしも (4-運動量 p の) 陽電子を，陽電子の振幅 $u_p^{(陽)}$ と，そのような振幅に対応して定義された陽電子の密度行列 $\rho^{(陽)}$ で記述すると，電子の場合との相違はないはずであり，行列 $\rho^{(陽)}$ は公式(29.13) とまったく同一になる．しかしながら，陽電子が関与する散乱過程の断面積の実際の計算の際 (先へいって見るように)，$u_p^{(陽)}$ ではなく≪負の振動数の≫振幅を扱った方がよい．これに応じて偏りの密度行列 (これを $\rho^{(-)}$ で表わそう) は，純粋状態で $u_{-pi}\bar{u}_{-pk}$ になるように定義する必要がある．

(26.1) にしたがって陽電子の振幅は $u_p^{(陽)} = \mathrm{U}_C\bar{u}_{-p}$ である．また逆に

$$u_{-p} = \mathrm{U}_C\bar{u}_p^{(陽)}, \quad \bar{u}_{-p} = \mathrm{U}_C^+u_p^{(陽)} = u_p^{(陽)}\mathrm{U}_C^*$$

である ((28.3) 参照)．もしも

$$\rho_{ik}^{(-)} = u_{-pi}\bar{u}_{-pk}, \quad \rho_{ik}^{(陽)} = u_{pi}^{(陽)}\bar{u}_{pk}^{(陽)}$$

とすれば，これらの公式から

$$\rho^{(-)} = \mathrm{U}_C \tilde{\rho}^{(陽)} \mathrm{U}_C^*. \tag{29.15}$$

ここで $\rho^{(陽)}$ に対して (29.13) を代入し，((26.3)，(26.21) を使って) 簡単な変換を行なって

$$\rho^{(-)} = \frac{1}{2}(\hat{p} - m)(1 - \gamma^5 \hat{a}). \tag{29.16}$$

特に，偏りのない状態では

$$\rho^{(-)} = \frac{1}{2}(\hat{p} - m). \tag{29.17}$$

将来，陽電子の密度行列というときは行列 $\rho^{(-)}$ のことを考えて，その添字 (−) は落とすことにしよう (行列 $\rho^{(陽)}$ は実際には使用に適さない)．

種々の計算でわれわれはしばしば $\bar{u}\mathrm{F}u (\equiv \bar{u}_i F_{ik} u_k)$ の形の式をスピン状態について平均することになる．ここで F は (4行4列の) ある行列であり，u は一定の4-運動量 p を持った状態の双スピノール振幅である．このような平均は，積 $u_k \bar{u}_i$ を部分的に偏った状態の密度行列 ρ_{ki} で置き換えることと同等である．

特に二つの独立なスピン状態による完全な平均は，偏りのない状態への移行と同等になる．この際，(29.10) にしたがって

$$\frac{1}{2}\sum_{偏り} \bar{u}_p \mathrm{F} u_p = \frac{1}{2}\mathrm{Sp}(\hat{p} + m)\mathrm{F}. \tag{29.18}$$

同様にして，負振動数の波動関数に対しては

$$\frac{1}{2}\sum_{偏り} \bar{u}_{-p} \mathrm{F} u_{-p} = \frac{1}{2}\mathrm{Sp}(\hat{p} - m)\mathrm{F}. \tag{29.19}$$

もしも平均でなくスピン状態に対する対称化について言うならば，結果は2倍になる．

このようにしていくと，密度行列 (29.13) は極限では非相対論的表式になってしまう．このために電子の静止系に移ろう．標準表示では，この系では波動関数の振幅 u_p は2成分である．これとともに密度行列も2行2列である必要がある．実際に，静止系では

$$\rho = \frac{m}{2}(\gamma^0 + 1)(1 + \gamma^5 \boldsymbol{\gamma\zeta})$$

であり，行列 γ の式 (21.20) および (22.18) を使って

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{非相} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_{非相} = m(1 + \boldsymbol{\sigma\zeta}) \tag{29.20}$$

である（0は2行2列の0行列を意味する）．もしも，$2m$での規格化の代りに，非相対論的理論では普通の密度行列の1での規格化を使えば，この式は$2m$で割る必要があり，III (59.4)，(59.5) に一致する

$$\frac{1}{2}(1+\boldsymbol{\sigma\zeta})$$

が得られる．

同様にして陽電子の密度行列の非相対論的極限では

$$\rho=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \rho_{\text{非相}}\end{pmatrix},\quad \rho_{\text{非相}}=-m(1+\boldsymbol{\sigma\zeta}).$$

最後に，超相対論的極限で密度行列を簡単化した式を書こう．(29.8) に $|\boldsymbol{p}|\approx\varepsilon$ と置いて（ここで他にくらべて $(m/\varepsilon)^2$ の大きさの量を省略した），この式を (29.13) あるいは (29.16) に代入し，$\boldsymbol{p}$ の方向を x 軸に選び

$$\rho=\frac{1}{2}[\varepsilon(\gamma^0-\gamma^1)\pm m]\left[1-\gamma^5\left(\frac{\varepsilon}{m}(\gamma^0-\gamma^1)\zeta_{\|}+\boldsymbol{\zeta}_\perp\boldsymbol{\gamma}_\perp\right)\right]$$

と書こう．ここで上の符号は電子の場合で，下の符号は陽電子の場合である．この積を開くと主要項は落ち，つぎの項は

$$\rho=\frac{1}{2}\varepsilon(\gamma^0-\gamma^1)[1-\gamma^5(\pm\zeta_{\|}+\boldsymbol{\zeta}_\perp\boldsymbol{\gamma}_\perp)]$$

あるいは，$\varepsilon(\gamma^0-\gamma^1)$ を $\hat{p}$ の形の書き方にもどり

$$\rho=\frac{1}{2}\hat{p}\,[1-\gamma^5(\pm\zeta_{\|}+\boldsymbol{\zeta}_\perp\boldsymbol{\gamma}_\perp)]. \tag{29.21}$$

これは，求める超相対論的場合の密度行列の式である．このなかに偏りのベクトル$\boldsymbol{\zeta}$のすべての成分が同等に，同じ次数の量の項として現われていることに注目しよう．$\zeta_{\|}$ はそのベクトルの，($\zeta_{\|}>0$ のとき) 粒子の運動量に平行，あるいは ($\zeta_{\|}<0$ のとき) 反平行な成分であることを思い起こそう．特に粒子の螺線状態では $\zeta_{\|}=2\lambda=\pm1$ である．この際，密度行列は特に簡単な形を取る[1]．すなわち

$$\rho=\frac{1}{2}\hat{p}\,(1\mp2\lambda\gamma^5). \tag{29.22}$$

---

1) 当然のことながら，質量が0で一定の螺線度を持つ粒子——ニュートリノあるいは反ニュートリノ——の密度行列は一致しなければならない（つぎの§30参照）．

§30. ニュートリノ

§20 でスピン1/2の粒子の二つのスピノール（ξ および η）を使う記述法は，粒子の質量と関連があることを見てきた．もしも質量が0に等しければこの理由はなくなる．このような粒子を記述する波動方程式は，ただ一つのスピノール，たとえば点のついたスピノール η を使って作ることができる．すなわち

$$\mathrm{p}^{\alpha\dot\beta}\eta_{\dot\beta}=0, \tag{30.1}$$

あるいは同じことだが

$$(\mathrm{p}_0+\mathbf{p}\boldsymbol{\sigma})\eta=0. \tag{30.2}$$

§20ではまた，質量 m を含む波動方程式は反転（変換 $\xi\leftrightarrow\eta$）に関して自動的に対称であることを強調されていた．一つのスピノールによる粒子の記述に際しては，この対称性は失われる．しかしながら，反転に関する対称性は自然の普遍的な性質ではないから，それは必ずしも必要でない．

質量 $m=0$ の粒子のエネルギーと運動量は関係式 $\varepsilon=|\boldsymbol{p}|$ で結びつけられる．したがって，平面波（$\eta_p\sim e^{-ipx}$）に対して方程式 (30.2) は

$$(\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma})\eta_p=-\eta_p \tag{30.3}$$

を与える．ここで $\boldsymbol{n}$ は $\boldsymbol{p}$ の基底である．≪負の振動数≫の波（$\eta_{-p}\sim e^{ipx}$）に対してもこのような方程式が成り立つ．

$$(\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma})\eta_{-p}=-\eta_{-p}. \tag{30.4}$$

第二量子化をした ψ-演算子は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\eta}&=\sum_p(\eta_p\mathrm{a}_{\boldsymbol{p}}+\eta_{-p}\mathrm{b}_{\boldsymbol{p}}^+),\\ \boldsymbol{\eta}^+&=\sum_p(\eta_p^*\mathrm{a}_{\boldsymbol{p}}^++\eta_{-p}^*\mathrm{b}_{\boldsymbol{p}})\end{aligned} \tag{30.5}$$

ここから η_{-p}^* は反粒子の波動関数であることが導かれる．

演算子 $\mathrm{p}^{\alpha\dot\beta}$ の定義 (20.1) から，$\mathrm{p}^{\alpha\dot\beta *}=-\mathrm{p}^{\dot\alpha\beta}$ がわかる．したがって，複素共役スピノール η^* は方程式 $\mathrm{p}^{\dot\alpha\beta}\eta_{\dot\beta}^*=0$ あるいは同じことだが

$$\mathrm{p}_{\dot\alpha\beta}\eta^{\dot\beta *}=0$$

を満足する．$\eta^{\dot\beta *}=\xi^\beta$ と置こう．これは複素共役をとると，点のあるスピノールを点のないスピノールに変える事実を表わしている．このようにして反粒子の波動関数は方程式

$$\mathrm{p}_{\dot{\alpha}\beta}\xi^{\beta} = 0, \tag{30.6}$$

あるいは

$$(\mathrm{p}^0 - \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma})\xi = 0 \tag{30.7}$$

を満足する．これから平面波に対しては

$$(\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma})\xi_p = \xi_p. \tag{30.8}$$

1/2 $\boldsymbol{n\sigma}$ はスピンの運動方向への投影の演算子である．したがって方程式 (30.3) および (30.8) は，一定の運動量を持つ粒子の状態は螺線状態であること，すなわちスピンの運動方向への投影が一定値を持つことを意味している．この際，もしも粒子のスピンが運動量と逆向き（螺線度 $-1/2$）ならば，反粒子のスピンは運動量の方向に向いている（螺線度 $+1/2$）．

このような性質の粒子は，たぶん自然界に存在する**ニュートリノ**であろう．この際，螺線度 $-1/2$ の粒子はニュートリノと呼ばれ，螺線度 $+1/2$ の粒子は反ニュートリノと呼ばれるならわしである[1]．

ニュートリノの状態にスピンの方向に関する縮退がないことに関連して，質量 0 の粒子は本来運動量方向に対してのみ軸対称であるという，§8 の注意を思い出そう．真正中性粒子——光子——の場合には軸のまわりの回転と，軸を含む平面に対する鏡映がこの対称性に含まれる．ニュートリノの場合には鏡映に対する対称性は存在しない．角運動量の軸への投影を保存し，その符号を変えないような軸のまわりの回転群だけがある．鏡映に関する対称性は，同時に粒子を反粒子に変えるときにのみ存在する．

つぎのことも注意しておこう．縦方向に拘束された偏りは，ニュートリノではスピンが一般に軌道角運動量から分離されていないこと（光子の場合に横に拘束された偏りと同様である．§6 参照）を意味している．

一つのスピノール η（あるいは ξ）を使って合計四つの双1次結合を作ることができる．これらはいっしょになって4-ベクトル

$$j^{\mu} = (\eta^*\eta,\ \eta^*\boldsymbol{\sigma}\eta) \tag{30.9}$$

---

1) ニュートリノの存在は，β-崩壊の性質を説明するために，理論的にパウリにより予言された (1931)．方程式 (30.1) は最初にワイルにより考察された (H. Weyl, 1929)．これらの方程式に基づいたニュートリノ理論はエリ・デ・ランダウ，T.D. リーおよび C.N. ヤン，A. サラムにより定式化された (1957)．

を形成する．方程式

$$(\mathrm{p}_0+\mathbf{p}\boldsymbol{\sigma})\eta=0\,,\quad \eta^*(\mathrm{p}_0-\mathbf{p}\boldsymbol{\sigma})=0$$

を使って，連続方程式 $\partial_\mu j^\mu=0$ が得られる．すなわち，j^μ は粒子の流れの密度の4-ベクトルの役割を果たしていることが容易にわかる．

ニュートリノの平面波は，§24 で質量のある粒子に対して行なったのと同様の方法で，規格化するのが好つごうである．すなわち

$$\eta_p=\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}u_p e^{-ipx},\quad \eta_{-p}=\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}u_{-p}e^{ipx} \tag{30.10}$$

である．ここでスピノール振幅は不変の条件

$$u^*_{\pm p}(1,\boldsymbol{\sigma})u_{\pm p}=2(\varepsilon,\boldsymbol{p}) \tag{30.11}$$

により規格化される．この際，粒子の密度とその流れは $j^0=1$，$\boldsymbol{j}=\boldsymbol{p}/\varepsilon=\boldsymbol{n}$ である．

与えられた運動量を持つ自由ニュートリノはつねに完全に偏っているから，この場合には（スピンについての）混合状態は存在しない．それにもかかわらず，2階のスピノール

$$\rho_{\dot{\alpha}\beta}=u_{\dot{\alpha}}u^*_{\dot{\beta}} \tag{30.12}$$

（このとき $\mathrm{Sp}\,\rho=2\varepsilon$）として簡単に定義される2行2列の偏りの《密度行列》を導入した方が便利であることを示しうる．これが方程式

$$(\varepsilon+\boldsymbol{p}\boldsymbol{\sigma})\rho=\rho(\varepsilon+\boldsymbol{p}\boldsymbol{\sigma})=0$$

を満足する必要があることに注意して，この行列を書き直すことができる．これから

$$\rho=\varepsilon-\boldsymbol{p}\boldsymbol{\sigma} \tag{30.13}$$

であることがわかる．

種々の相互作用の過程を考察する際，ニュートリノは，質量を持ちしたがって4成分の波動関数で記述される（スピン1/2の）他の粒子と一緒に現われてもよい．このような場合には，ニュートリノに対し形式的に《双スピノールの》波動関数——しかしながら，その成分中の二つは0に等しい．すなわち $\psi=\begin{pmatrix}0\\ \eta\end{pmatrix}$——を導入し，単一の記法を守った方が便利である．しかし一般的に言って，このような ψ は（スピノール表示でない）他の表示に移ったときに壊れてしまう．この困難はスピノール表示で等式

$$\frac{1+\gamma^5}{2}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \eta\end{pmatrix},\quad (\eta^*\xi^*)\frac{1-\gamma^5}{2}=(\eta^*\,0)$$

が成り立つことに注意すれば避けることができる．ここでξは答からは消えてしまう，任意の≪調節用の≫スピノールである（行列 γ^5 は (22.18) からとった)．したがって，ニュートリノが真正≪2成分≫である条件は，任意の表示での ψ の4成分記述の際に，ψ が $m=0$ のディラック方程式の解と考えれば守ることができる．すなわち

$$\hat{p}\psi = 0, \tag{30.14}$$

および付加条件

$$\frac{1}{2}(1+\gamma^5)\psi = \psi,$$

あるいは

$$\gamma^5\psi = \psi \tag{30.15}$$

にしたがうとすればよい．

ψ と $\overline{\psi}$ が現われるときいつも

$$\psi \longrightarrow \frac{1+\gamma^5}{2}\psi, \quad \bar{\psi} \longrightarrow \bar{\psi}\frac{1-\gamma^5}{2} \tag{30.16}$$

のように置き換えることにすれば，この条件は落とすことができる．このようにして，流れの密度の4-ベクトルは（(30.16) を $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ に置き換えて)

$$j^\mu = \frac{1}{4}\bar{\psi}(1-\gamma^5)\gamma^\mu(1+\gamma^5)\psi = \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu(1+\gamma^5)\psi \tag{30.17}$$

の形に書くことができる．この規則に対応して，ニュートリノの密度行列は

$$\rho = \frac{1}{4}(1+\gamma^5)\,\hat{p}\,(1-\gamma^5) = \frac{1}{2}(1+\gamma^5)\hat{p} \tag{30.18}$$

のように書ける．スピノール表示では，当然のことながら，これは2行2列の行列(30.13)に帰一して，

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \varepsilon - \boldsymbol{\sigma p} & 0 \end{pmatrix}.$$

反ニュートリノに対する同様な公式は，γ^5の前の符号の変化が付け加わる点が異なっている．

ニュートリノは電気的に中性の粒子である．しかしながら，上記の性質を持つニュートリノは真正中性粒子ではない．これに関連して，2成分スピノールで記述された≪ニュートリノ場≫は，粒子の可能な状態数について（しかしもちろん，他の物理的性質について

ではない）は，4成分の双スピノールで記述される真正中性場と同等であることに注目しよう．一定の螺線度を持つ粒子と反粒子の代りにここでは，螺線度の二つの可能な値を持つ一個の粒子だけを扱うはずであるし，そして反転に関する対称性も自動的に満足されるはずである．しかしながら，≪4成分の≫ニュートリノの質量が0に等しいことは，いわば≪偶然の≫性質のものである．なぜかというと，それを記述している（0と異なる質量の場合も許される）波動関数の性質とは関係がないからである．したがって，このような粒子の種々の相互作用を考慮すると，たとえ小さくとも厳密には0に等しくない静止質量の出現へと自動的に導かれるであろう．

§31.　スピン3/2の粒子の波動方程式

スピン3/2の粒子はその静止系では，3階の（$2s+1=4$ 個の独立成分を持った）3次元対称スピノールで記述される．したがって，任意の基準系ではその記述に4-スピノール $\xi^{\alpha\dot{\beta}\dot{\gamma}}$, $\eta_{\dot{\alpha}\beta\gamma}$ および $\zeta^{\alpha\beta\gamma}$, $\chi_{\dot{\alpha}\dot{\beta}\dot{\gamma}}$ が加わり，そのおのおのは同じ（点のある，あるいは点のない）添字については対称である．また反転に際して第1および第2の対のなかのスピノールは互いに移りあう．

静止系で4-スピノール $\xi^{\alpha\dot{\beta}\dot{\gamma}}$ と $\eta_{\dot{\alpha}\beta\gamma}$ が合計三つの添字に対して対称な3-スピノールになるために，これらは方程式

$$p^{\dot{\alpha}\beta}\eta_{\dot{\alpha}\beta\gamma}=0,\quad p_{\alpha\dot{\beta}}\xi^{\alpha\dot{\beta}\dot{\gamma}}=0 \tag{31.1}$$

を満足しなければならない．実際に静止系では（(20.1) からわかるように）

$$p^{\dot{\alpha}\beta}\longrightarrow p_0\delta_\alpha^\beta=m\delta_\alpha^\beta.$$

したがって条件 (31.1) はつぎの等式になる．

$$\delta_\alpha^\beta\eta'^{\alpha}{}_{\beta\gamma}=0,\quad \delta_\alpha^\beta\xi'^{\alpha}{}_{\beta\gamma}=0.$$

ここで，′を付けた文字は3次元スピノールに対応する．言いかえれば，これらのスピノールは添字 $\alpha\beta$ で縮約すると0になり，これはこの添字について対称であり，したがって合計三つの添字について対称であることを意味する．

スピノール ξ と η のあいだの微分関係式は

$$\begin{aligned} p^{\delta\dot{\gamma}}\eta^{\dot{\beta}}_{\alpha\delta}&=m\xi^{\dot{\beta}\dot{\gamma}}_{\alpha},\\ p_{\delta\dot{\gamma}}\xi^{\dot{\beta}\dot{\gamma}}_{\alpha}&=m\eta^{\dot{\beta}}_{\alpha\delta} \end{aligned} \tag{31.2}$$

で定められる．これらの方程式の左辺の対称性（添字 $\dot\beta, \dot\gamma$ あるいは α, δ について）は条件(31.1)で保障される．これにより，これらはすべての添字について縮約すると 0 になる．静止系で 3 次元スピノール ξ' および η' は，方程式 (31.2) のために当然のことながら一致してしまう．方程式 (31.2) から η あるいは ξ を消去して，スピノール ξ および η の各成分は 2 次方程式

$$(\mathrm{p}^2-m^2)\xi^{\alpha\dot\beta\dot\gamma}=0 \tag{31.3}$$

を満足する．

連立方程式 (31.1)，(31.2) はスピン 3/2 を持つ粒子に対する波動方程式の完全系を構成する[1]．スピノール ζ, χ を付け加えても何も新しいことへ導かない．それは

$$m\zeta^{\alpha\beta\gamma}=\mathrm{p}^{\alpha\dot\delta}\eta^{\beta\gamma}_{\dot\delta},$$

$$m\chi_{\dot\alpha\dot\beta\dot\gamma}=\mathrm{p}_{\dot\alpha\delta}\xi^{\delta}_{\dot\beta\dot\gamma}$$

にしたがって作られる．

スピン 3/2 を持つ粒子の方程式は，別の形でも定式化することができる．それはスピノールの性質のベクトル的な面を利用するやり方である (W. Rarita, J. Schwinger, 1941; A. C. Давыдов, И. Е. Тамм, 1942)．スピノール添字の対 $\alpha\dot\beta$ は一つの 4 次元ベクトルの添字 μ と対応させられる．したがって，3 階のスピノールの成分 $\xi^{\alpha\dot\beta\dot\gamma}$ は，一つのベクトル添字および一つのスピノール添字を持った《混合した》量 $\psi^{\dot\gamma}_{\mu}$に対応させられる．同様にスピノール $\eta^{\beta\dot\alpha\gamma}$ は量 ψ^{γ}_{μ} に対応させられ，これら二つのスピノールの全体は《ベクトル型》双スピノール ψ_μ（双スピノール添字は書いていない）である．ここで波動方程式が，各ベクトル成分 ψ_μ に対する《ディラック方程式》の形に書かれる．すなわち

$$(\hat{\mathrm{p}}-m)\psi_\mu=0, \tag{31.4}$$

およびその付加条件

$$\gamma^\mu\psi_\mu=0 \tag{31.5}$$

である．スピノール表示での行列 γ^μ に対する式，およびスピノールおよびベクトル成分のあいだの関係式を利用して，方程式 (31.2) は (31.4) に含まれ，条件 (31.5) はスピノ

1) これらの方程式のラグランジュの定式化については，63頁のフィアツおよびパウリの論文参照．

ール $\xi^{\alpha\dot{\beta}\dot{\gamma}}$ および $\eta^{\dot{\alpha}\beta\gamma}$ が添字 $\dot{\beta}\dot{\gamma}$ あるいは $\beta\gamma$ について対称であるという条件と同等であることが容易に確かめられる．方程式 (31.4) に γ^{μ} を掛け，(31.5) によって

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\mathrm{p}_{\nu}\psi_{\mu}=0,$$

あるいは行列 γ^{μ} の交換則を利用して

$$2g^{\mu\nu}\mathrm{p}_{\nu}\psi_{\mu}-\gamma^{\nu}\mathrm{p}_{\nu}\gamma^{\mu}\psi_{\mu}=0 \tag{31.6}$$

を得る．第2項は (31.5) のためにふたたび 0 になり，第1項は

$$\mathrm{p}^{\mu}\psi_{\mu}=0 \tag{31.7}$$

を与える．(31.4)，(31.5) から自動的に出てくるこの条件は，条件 (31.1) と同等であることが容易にわかる．

最後に，波動方程式の定式化のいま一つの方法は，三つの双スピノール添字を持ち，それらについて対称な量 ψ_{ikl} $(i,k,l=1,2,3,4)$ を導入するやり方である (V. Bargman, E. P. Wigner, 1948)．これらの量の全体は，四つのスピノール ξ,η,ζ,χ すべての成分の全体と同等である．波動方程式は≪ディラック方程式≫

$$\mathrm{p}_{\mu}\gamma^{\mu}_{im}\psi_{mkl}=m\psi_{ikl} \tag{31.8}$$

の形に書かれる．

これらの方程式がすでに必要な数の (4個の) 独立な成分 ψ_{ikl} へと導いていることが容易にわかる．事実，静止系では (31.8) は等式

$$\gamma^{0}_{im}\psi_{mkl}=\psi_{ikl}$$

に帰し，これを使うと $i,k,l=3,4$ のすべての成分が (標準表示で) 0 になる．すなわち ψ_{ikl} は3階の3次元スピノールに帰する．

ここに記述された結果は明らかに，任意の半奇数のスピン s を持つ粒子に対して一般化される．(31.4)，(31.5) の形の方程式の記述に際しては，波動関数は一つの双スピノール添字を持つ $(2s-1)/2$ 階の対称4-テンソルになるであろう．(31.8) の形に方程式を書くときには，波動関数は $2s$ 個の双スピノール添字を持ち，それに対して対称であろう．

第 4 章　外場内の粒子

§ 32.　外場内の電子に対するディラック方程式

自由粒子の波動方程式は本質的には，時空対称性の一般的要求と結びついた性質だけを表わしている．粒子とともに起こる物理過程はその相互作用の性質に依存している．

相対論的理論では，波動方程式のなんらかの簡単な一般化に基づいた，強い相互作用にも使える粒子の記述，すなわち自由粒子の方程式に含まれる知識の枠を超えるような記述が不可能であることがわかっている．

しかしながら，波動方程式の方法は強い相互作用には適さないが，粒子の電磁相互作用には適している．電子（および陽電子）がこれである．このようにして電子の量子電磁力学の大部分の領域で，現存する理論が許されることがわかる．しかし，強い相互作用や不安定な粒子，たとえばミューオンには使えない．後者は（弱い相互作用に関係のある）寿命にくらべて短い時間に起こる現象の分野の量子電磁力学で記述される．

この章では，1粒子理論の枠内に限られた一連の量子電磁力学の問題を考察しよう．これらは，粒子数は不変で，相互作用は外部電磁場の考え方で導入することができるような問題である．外場を与えられたものと考えることを許す条件のほかに，このような理論の適用可能の限界が，いわゆる輻射場の補正（これはこの本の第二部で考察されよう）に関連のある条件によって制限されている．

与えられた外場内の電子の波動方程式は，非相対論的理論（III，§ 110）で行なわれたのとまったく同様に求めることができる．$A^{\mu}=(\Phi, \boldsymbol{A})$ を外部電磁場の 4-ポテンシャルとする（$\boldsymbol{A}$ はベクトル，Φ はスカラー・ポテンシャルである）．ディラック方程式中の 4-運動量の演算子 p を，$\mathrm{p}-eA$ で置き換えることによって，求める方程式を得る．ここで e は粒子の電荷である[1]．すなわち

1)　電荷はその符号と一緒になっているものと考えることになっている．したがって，電子に対しては $e=-|e|$ である．

$$[\gamma(\mathrm{p}-eA)-m]\psi = 0. \tag{32.1}$$

この方程式に対応して，同様な置き換えで (21.13) からハミルトニアンが得られる．

$$\mathrm{H} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{p}-e\boldsymbol{A})+\beta m+e\Phi. \tag{32.2}$$

電磁場のポテンシャルのゲージ変換に対するディラック方程式の不変性は，変換 $A \longrightarrow A+\mathrm{p}\chi$（ここで χ は任意関数）と同時に波動関数も

$$\psi \longrightarrow \psi e^{e\chi} \tag{32.3}$$

にしたがって変換されるとすれば，方程式の形は不変であるということで示される（シュレーディンガー方程式に対する類似の変換は III, § 110 参照）．

波動関数を使って表わされた電流密度は外場のないときの式 (21.11) と同じ

$$j = \bar{\psi}\gamma\psi$$

で与えられる．(21.11) を導くときに行なったと同じ計算を方程式 (32.1)（および下記の方程式 (32.4)）について繰り返すと，外場は落ちて前の電流の式に対する連続方程式が得られる．

方程式 (32.1) に対し荷電共役の演算を行なおう．そのために，かつて方程式 (21.9) が求められたのとまったく同様に (32.1) の複素共役から得られる方程式

$$\bar{\psi}[\gamma(\mathrm{p}+eA)+m] = 0 \tag{32.4}$$

を書こう（この際4-ベクトル A は実数であることを思い起こす必要がある）．この方程式を

$$[\tilde{\gamma}(\mathrm{p}+eA)+m]\bar{\psi} = 0$$

の形に書き，左から行列 U_C を掛け関係式 (26.3) を利用して次式を得る．

$$[\gamma(\mathrm{p}+eA)-m](\mathrm{C}\psi) = 0. \tag{32.5}$$

このようにして，荷電共役波動関数は，始めの方程式と電荷の符号が変わる点だけが異なっている方程式を満足する．他方，荷電共役の演算は粒子から反粒子への移行を意味する．つまり，もしも粒子が電荷を持てば，電磁場との相互作用を決定する量としての電子および陽電子の電荷の符号は自動的に逆になることがわかる．

演算子 $\gamma(\mathrm{p}-eA)+m$ を (32.1) に作用させることにより，1次方程式 (32.1) は，2次の方程式に変換される．すなわち

$$[\gamma^\mu \gamma^\nu (\mathrm{p}_\mu - eA_\mu)(\mathrm{p}_\nu - eA_\nu) - m^2]\psi = 0.$$

積 $\gamma^\mu \gamma^\nu$ をつぎのように変えよう.

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = \frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) + \frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) = g^{\mu\nu} + \sigma^{\mu\nu}.$$

ここで $\sigma^{\mu\nu}$ は反対称《行列の 4-テンソル》(28.2) である. $\sigma^{\mu\nu}$ の乗算は反対称化を行なうこと, すなわちつぎのような置換をすることにより実現される. すなわち

$$(\mathrm{p}_\mu - eA_\mu)(\mathrm{p}_\nu - eA_\nu) \longrightarrow \frac{1}{2}\{(\mathrm{p}_\mu - eA_\mu)(\mathrm{p}_\nu - eA_\nu)\}_-$$

$$= \frac{1}{2}e(-A_\mu \mathrm{p}_\nu + \mathrm{p}_\nu A_\mu - \mathrm{p}_\mu A_\nu + A_\nu \mathrm{p}_\mu) = \frac{1}{2}ie(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu) = -\frac{ie}{2}F_{\mu\nu}$$

($F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ は電磁場のテンソルである). この結果

$$\left[(\mathrm{p} - eA)^2 - m^2 - \frac{i}{2}eF_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right]\psi = 0 \tag{32.6}$$

の形の 2 次方程式を得る.

積 $F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}$ は, それを成分

$$\sigma^{\mu\nu} = (\boldsymbol{\alpha}, i\boldsymbol{\Sigma}), \quad F^{\mu\nu} = (-\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H})$$

を使って 3 次元の形に書くことができる. このとき

$$[(\mathrm{p} - eA)^2 - m^2 + e\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{H} - ie\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{E}]\psi = 0, \tag{32.7}$$

あるいは普通の単位を使って

$$\left[\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \frac{e}{c}\Phi\right)^2 - \left(i\hbar\nabla + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 - m^2c^2 + \frac{e\hbar}{c}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{H} - i\frac{e\hbar}{c}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{E}\right]\psi = 0 \tag{32.7a}$$

となる. これらの方程式中の $\boldsymbol{E}$ および $\boldsymbol{H}$ を含む項は, 粒子のスピンの存在と関係があり, これについては次節の末尾でたちもどることにしよう.

2 次方程式の解のなかには結局, もとの 1 次方程式 (32.1) を満足しない《余分の》解も現われる (これは m の前の符号を変えた方程式 $[\gamma(\mathrm{p} - eA) + m]\psi = 0$ を満足する). しかし具体的な問題で, 必要な解の選択は普通はっきりしていて, 困難はない. 正規の選び方は, φ を 2 次方程式の任意解とすると, 1 次の方程式の任意解は

$$\psi = [\gamma(\mathrm{p} - eA) + m]\varphi \tag{32.8}$$

である. 実際に, この等式に $\gamma(\mathrm{p} - eA) - m$ を掛けると, φ が方程式 (32.6) を満足すれば, 右辺は 0 になる.

p を p$-eA$ で置き換えることにより，相対論的波動方程式に外場を導入する方法は自明のことではないことを強調する必要がある．この遂行に当たり，われわれはもともと付加的原理を使っている．すなわち，上記の置き換えは1次方程式で行なわなければならない．そのために方程式（32.6）には，置き換えが直接2次方程式で行なわれたときに出てこない付加項が現われた[1]．

外場内のディラック方程式の定常解のなかには，連続スペクトルを持つ状態も離散スペクトルを持つ状態も可能である．非相対論的理論におけるように，連続スペクトルは無限運動に対応する．このとき粒子は無限遠においても見いだされ，そこでは自由粒子とみなされる．自由粒子のハミルトニアンの固有値は $\pm\sqrt{p^2+m^2}$ に等しいので，エネルギー固有値の連続スペクトルは $\varepsilon \geqslant m$ と $\varepsilon \leqslant -m$ に存在する．もしも $-m<\varepsilon<m$ とすると，粒子は無限遠に存在することができない．したがって運動は有界で状態は離散スペクトルに属する．

自由粒子と同様に，第二量子化の図式には《正の振動数》（$\varepsilon>0$）の波動関数も《負の振動数》（$\varepsilon<0$）の波動関数も必ず現われる．外場内の粒子に対してこの図式はつぎのようにして自然に一般化される．それは公式（25.1）のなかの平面波を，正（$\varepsilon_n^{(+)}$）および負（$-\varepsilon_n^{(-)}$）の振動数に対する，ディラック方程式の適当に規格化された固有関数 $\psi_n^{(+)}$ および $\psi_n^{(-)}$ で置き換えるわけである．

$$\begin{aligned}\Psi &= \sum_n \{a_n \psi_n^{(+)} e^{-i\varepsilon_n^{(+)}t} + b_n^+ \psi_n^{(-)} e^{i\varepsilon_n^{(-)}t}\},\\ \overline{\Psi} &= \sum_n \{a_n^+ \overline{\psi}_n^{(+)} e^{i\varepsilon_n^{(+)}t} + b_n \overline{\psi}_n^{(-)} e^{-i\varepsilon_n^{(-)}t}\}.\end{aligned} \tag{32.9}$$

---

1) 別のスピンを持つ粒子の波動方程式にも，この原理に対応して外場を導入しなければならない．この際，波動方程式としては，付加条件をつけることなしに，変分原理から求められたままの形をとらなければならない．したがって，スピン1の場合に p → p$-eA$ の置き換えは方程式（14.1），（14.2）に対して行なわれる必要がある．（スピン1の場合に対して）2次方程式（14.4）および付加条件（14.3）でこのような置き換えを行なうと，一般に両立しえない連立方程式を得る（スピン3/2の場合には，1次の方程式（31.2）と付加条件（31.1）を使っても非両立性が起こってしまう）．

スピン0の場合には1次方程式（10.4）での交換 p → p$-eA$ は2次方程式（10.5）における交換と同等である．

ここではこの問題の詳しい考察はやめよう．なぜかというと，それは直接に物理的意味を持たない．すなわちスピンが1/2と異なる現実の粒子と電磁的相互作用は波動方程式で記述することができないからである．

しかしながら，第二量子化のこのような図式は，つぎのような困難な事情を招いている．すなわち，ポテンシャルの穴を深くするにつれて，エネルギー準位は限界の $\varepsilon=0$ を超える．すなわち，正から負になる（あるいは他の符号のポテンシャルに対しては，負から正になる）．それにもかかわらず連続性の考察から，これらの準位は電子のもの（であって陽電子のものでない）と考えつづける必要がある．つまりより厳密には，場を非常にゆるやかにとり除いたときに，それが連続スペクトルの境界（$\varepsilon=m$）につながるようなすべての状態を電子の状態に当てる必要がある．しかしながらこの際，電子のエネルギーは負であってもよく，したがって真空が最も低い状態ではない．場が適当な性質のときには，これは電子－陽電子対の出現へと導くことも可能である[1]．それにもかかわらず，さらにポテンシャルを深くしていくと，電子準位は連続スペクトルの負の境界に達してしまう．この場合には対を作る最小エネルギー（$m+\varepsilon_{電}$ に等しい）は 0 になる．すなわち，ただちに自発的対生成が始まる．これは 1 粒子理論の枠内で考察することはどうしてもできない過程である．

すべてこれらは，相対論的理論では外場の概念の適用性が制限されたものであることを示している．特に非常に深いポテンシャルの穴は考えることができない．多粒子理論の枠でも問題はまだ研究されていない．

問　題

定磁場内での電子のエネルギー準位を定めよ．

解　ベクトル・ポテンシャルは $A_x=A_z=0$，$A_y=Hx$ である（磁場 $\boldsymbol{H}$ は z 軸方向を向いている）．（エネルギーとともに）一般化された運動量の成分 p_y，p_z も保存する．

補助関数 φ （(32.8) 参照）に対する 2 次方程式を使って，φ が演算子 Σ_z（固有値 $\sigma=\pm1$ を持つ），および演算子 $\mathrm{p}_y, \mathrm{p}_z$ の固有関数であると考える．φ に対する方程式は

$$\left\{-\frac{d^2}{dx^2}+(eHx-p_y)^2-eH\sigma\right\}\varphi=(\varepsilon^2-m^2-p_z^2)\,\varphi$$

の形になる．この方程式は形の上からは線型振動子に対するシュレーディンガー方程式と一致する．固有値 ε は公式

$$\varepsilon^2-m^2-p_z^2=|e|H(2n+1)-eH\sigma,\quad n=0,1,2,\cdots$$

1) 特に，二つの符号の反対な，深いポテンシャルの穴があるときに起こる．

によって与えられる(III, §111参照). φ から(32.8)式によって決めるべき波動関数 ψ が演算子 Σ_z の固有関数でないこと，それに対応して運動粒子に対してはスピンは保存量でないことに注意しよう．

§33. 1/c についての冪展開[1]

われわれは，非相対論的極限 $(v\to 0)$ で，双スピノール $\psi=\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}$ の二つの成分 χ が 0 になることを見た(§21)．したがって，電子の速度が小さいときは $\varphi\gg\chi$ である．これから形式的に波動関数を $1/c$ について冪展開することにより，2成分量 φ だけを含む近似方程式を得る可能性が与えられる．

外場内の電子に対するつぎのディラック方程式から出発しよう．

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\left\{c\,\boldsymbol{\alpha}\left(\mathbf{p}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)+\beta mc^2+e\Phi\right\}\psi. \tag{33.1}$$

粒子の相対論的エネルギーにはその静止エネルギーも含まれる．非相対論的近似へ移るときに，それは消去されなければならない．そのために ψ の代りに

$$\psi=\psi' e^{-imc^2t/\hbar}$$

にしたがって ψ' を導入しよう．このとき

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}+mc^2\right)\psi'=\left\{c\,\boldsymbol{\alpha}\left(\mathbf{p}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)+\beta mc^2+e\Phi\right\}\psi'$$

となる．ψ' を $\psi'=\begin{pmatrix}\varphi'\\ \chi'\end{pmatrix}$ の形に表わし，連立方程式

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-e\Phi\right)\varphi'=c\,\boldsymbol{\sigma}\left(\mathbf{p}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\chi', \tag{33.2}$$

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-e\Phi+2mc^2\right)\chi'=c\,\boldsymbol{\sigma}\left(\mathbf{p}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\varphi' \tag{33.3}$$

を得る（以下では φ,χ の $'$（ダッシュ）を落とそう．この節では変換された関数 ψ' だけを使うので，こうしても誤解を起こさないからである)．

1次近似では，方程式(33.3)の左辺で $2mc^2\chi$ の項だけを残して

---

1) この節では普通の単位系が用いられている．

$$\chi=\frac{1}{2mc}\boldsymbol{\sigma}\left(\mathbf{p}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\varphi \tag{33.4}$$

を得る ($\chi\sim\varphi/c$ であることに注意). この式を (33.2) に代入して

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-e\Phi\right)\varphi=\frac{1}{2m}\left\{\boldsymbol{\sigma}\left(\mathbf{p}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\right\}^2\varphi.$$

パウリ行列に対して関係式

$$(\boldsymbol{\sigma a})(\boldsymbol{\sigma b})=\boldsymbol{ab}+i\boldsymbol{\sigma}[\boldsymbol{ab}] \tag{33.5}$$

が成り立つ. ここで $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は任意のベクトルである ((20.9) 参照). 今の場合 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}=\mathbf{p}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}$ である. ただし $\mathbf{p}$ と $\boldsymbol{A}$ の交換関係のためにベクトル乗積 $[\boldsymbol{ab}]$ は 0 にはならない. すなわち

$$\left[\left(\mathbf{p}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\left(\mathbf{p}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\right]\varphi=i\frac{e\hbar}{c}\left\{[\boldsymbol{A}\nabla]+[\nabla\boldsymbol{A}]\right\}\varphi=i\frac{e\hbar}{c}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}\cdot\varphi$$

である. このようにして

$$\left\{\boldsymbol{\sigma}\left(\mathbf{p}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\right\}^2=\left(\mathbf{p}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2-\frac{e\hbar}{c}\boldsymbol{\sigma H} \tag{33.6}$$

となり (ここで $\boldsymbol{H}=\operatorname{rot}\boldsymbol{A}$ は磁場である), そして φ に対する方程式を得る.

$$i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\mathrm{H}\varphi=\left[\frac{1}{2m}\left(\mathbf{p}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2+e\Phi-\frac{e\hbar}{2mc}\boldsymbol{\sigma H}\right]\varphi. \tag{33.7}$$

これがいわゆる**パウリ方程式**である. これはハミルトニアンに最後の項が現われる点で, 非相対論的シュレーディンガー方程式と異なっている. この項は外場内における磁気的2重極のポテンシャル・エネルギーの形をしている (III, §110 参照). このようにして, (1/c) に関する1次近似では, 電子は電荷とともに磁気モーメント

$$\boldsymbol{\mu}=\frac{e\hbar}{2mc}\boldsymbol{\sigma}=\frac{e}{mc}\hbar\mathbf{s} \tag{33.8}$$

を持つ粒子のようにふるまう. この磁気回転比 (e/mc) は軌道運動の磁気モーメントに対するものの2倍の大きさである[1].

---

1) この注目すべき結果は, 1928 年にディラックにより得られた. 方程式 (33.7) の満足する2成分波動関数はパウリにより導かれた(1927). これはディラックによるその方程式の発見以前のことである.

密度は $\rho=\psi^*\psi=\varphi^*\varphi+\chi^*\chi$ である．1次近似では第2項は落とされる．したがって $\rho=|\varphi|^2$ となりシュレーディンガー方程式と同様になる．

電流密度は

$$\boldsymbol{j}=c\psi^*\boldsymbol{\alpha}\psi=c(\varphi^*\boldsymbol{\sigma}\chi+\chi^*\boldsymbol{\sigma}\varphi)$$

となる．(33.4) により

$$\chi=\frac{1}{2mc}\boldsymbol{\sigma}\left(-i\hbar\boldsymbol{\nabla}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\varphi,\quad \chi^*=\frac{1}{2mc}\left(i\hbar\boldsymbol{\nabla}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\varphi^*\cdot\boldsymbol{\sigma}$$

をこれに代入しよう．因子 $\boldsymbol{\sigma}$ を2個ずつ含む積は

$$(\boldsymbol{\sigma a})\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{a}+i[\boldsymbol{\sigma a}],\quad \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma a})=\boldsymbol{a}+i[\boldsymbol{a\sigma}] \tag{33.9}$$

の形に表わされた公式 (33.5) を使って変形される．その結果

$$\boldsymbol{j}=\frac{i\hbar}{2m}(\varphi\boldsymbol{\nabla}\varphi^*-\varphi^*\boldsymbol{\nabla}\varphi)-\frac{e}{mc}\boldsymbol{A}\varphi^*\varphi+\frac{\hbar}{2m}\operatorname{rot}(\varphi^*\boldsymbol{\sigma}\varphi) \tag{33.10}$$

を得る．これは非相対論的理論の公式 (III(114.4)) と一致する．

今度は[1]，$\sim 1/c^2$ の項まで展開を続けて，2次近似に進もう． このとき電場しかない ($\boldsymbol{A}=0$) と仮定しよう．

まず第一に，$\sim 1/c^2$ の項を考慮すると密度は

$$\rho=|\varphi|^2+|\chi|^2=|\varphi|^2+\frac{\hbar^2}{4m^2c^2}|\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nabla}\varphi|^2$$

になることに注意しよう．この式はシュレーディンガーの密度と異なっている．シュレーディンガー方程式に類似の方程式を（2次近似で）見いだすために，φ の代りに他の（2成分）関数 $\varphi_{シュレ}$ を導入する必要がある．シュレーディンガー方程式に対して当然のことながら，この $\varphi_{シュレ}$ に対しては，時間について保存する積分が $\int|\varphi_{シュレ}|^2dV$ の形になる必要がある．

求める変換の要求を明らかにするために条件

$$\int\varphi^*_{シュレ}\varphi_{シュレ}dV=\int\left\{\varphi^*\varphi+\frac{\hbar^2}{4m^2c^2}(\boldsymbol{\nabla}\varphi^*\cdot\boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nabla}\varphi)\right\}dV$$

を書き，つぎの部分積分を行なう．

---

1) 以下 ア・イ・アヒーゼルおよびヴェ・ベ・ベレステツキー (1953) の方法にしたがう．

$$\int (\nabla\varphi^*\cdot\boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{\sigma}\nabla\varphi)dV = -\int\varphi^*(\boldsymbol{\sigma}\nabla)(\boldsymbol{\sigma}\nabla)\varphi dV = -\int\varphi^*\Delta\varphi dV$$

(あるいは φ と φ^* の交換したものに対しても同様である). このようにして

$$\int\varphi^*_{シュレ}\varphi_{シュレ}dV = \int\left\{\varphi^*\varphi-\frac{\hbar^2}{8m^2c^2}(\varphi^*\Delta\varphi+\varphi\Delta\varphi^*)\right\}dV.$$

これから

$$\varphi_{シュレ} = \left(1+\frac{\mathbf{p}^2}{8m^2c^2}\right)\varphi,\quad \varphi = \left(1-\frac{\mathbf{p}^2}{8m^2c^2}\right)\varphi_{シュレ} \tag{33.11}$$

であることがわかる.

記述を簡単にするために状態が定常的であると考えよう. すなわち演算子 $i\hbar\,\partial/\partial t$ を(静止エネルギーを差し引いた) エネルギー ε に置き換えよう. ((33.4) の) つぎの近似では, (33.3) から

$$\chi = \frac{1}{2mc}\left(1-\frac{\varepsilon-e\Phi}{2mc^2}\right)(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})\,\varphi$$

となる. これを (33.2) に代入し, その後 (33.11) にしたがって φ を $\varphi_{シュレ}$ で置き換え $1/c^2$ より高次の項はいつも落とすようにする必要がある. 簡単な計算の結果 $\varphi_{シュレ}$ に対し $\varepsilon\varphi_{シュレ} = \mathrm{H}\varphi_{シュレ}$ の形の方程式を得る. ここで

$$\mathrm{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}+e\Phi-\frac{\mathbf{p}^4}{8m^3c^2}+\frac{e}{4m^2c^2}\left\{(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})\Phi(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})-\frac{1}{2}(\mathbf{p}^2\Phi+\Phi\mathbf{p}^2)\right\}$$

である. 波括弧のなかの式は公式

$$(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})\Phi(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}) = \Phi\mathbf{p}^2+(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}\Phi)(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}) = \Phi\mathbf{p}^2+i\hbar(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{E})(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}),$$

$$\mathbf{p}^2\Phi-\Phi\mathbf{p}^2 = -\hbar^2\Delta\Phi+2i\hbar\boldsymbol{E}\mathbf{p}$$

を使って変形される (ここで $\boldsymbol{E} = -\nabla\Phi$ は電場である). ハミルトニアンに対する最終的な式は

$$\mathrm{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}+e\Phi-\frac{\mathbf{p}^4}{8m^3c^2}-\frac{e\hbar}{4m^2c^2}\boldsymbol{\sigma}[\boldsymbol{E}\mathbf{p}]-\frac{e\hbar^2}{8m^2c^2}\operatorname{div}\boldsymbol{E}. \tag{33.12}$$

最後の3項が求める $1/c^2$ の程度の補正項である. これらのなかの1番目の項は運動エネルギーと運動量の相対論的依存性の結果である (差 $c\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2c^2}-mc^2$ の展開). 第2項は**スピン軌道相互作用**のエネルギーと呼ぶことができ, 運動する磁気モーメントと電場

との相互作用である[1]．最後の項は，外場を作る電荷の存在する点でのみ0と異なっている（したがって，点電荷 Ze のクーロン場に対しては $\Delta\Phi = -4\pi Ze\delta(\boldsymbol{r})$ である）．(C. G. Darwin, 1928)．

もしも電場が中心対称の場合には

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\boldsymbol{r}}{r}\frac{d\Phi}{dr}$$

であり，スピン軌道相互作用の演算子は

$$\frac{e\hbar}{4m^2c^2r}\boldsymbol{\sigma}[\boldsymbol{rp}]\frac{d\Phi}{dr} = \frac{\hbar^2}{2m^2c^2r}\frac{dU}{dr}\mathbf{ls} \tag{33.13}$$

の形に表わされる．ここで $\mathbf{l}$ は軌道角運動量の演算子で，$\mathbf{s} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$ は電子のスピンの演算子，そして $U = e\Phi$ は電場中の電子のポテンシャル・エネルギーである[2]．

§34. 水素原子の準位の微細構造

水素原子，すなわち動かない原子核のクーロン場における電子のエネルギー準位の相対論的補正を求めよう[3]．水素原子内での電子の速度は $v/c \sim \alpha \ll 1$ である．したがって摂動論によって求める補正項を，近似的なハミルトニアン (33.12) の相対論的項の，非相対論的状態（すなわち非相対論的波動関数）での平均として計算することができる．より一般的にするために原子核の電荷が Ze に等しいとしよう．しかしながら，このとき $Z\alpha \ll 1$ を仮定するものとする．

核の電場の張力は $\boldsymbol{E} = Ze\boldsymbol{r}/r^3$ で，そのポテンシャルは方程式 $\Delta\Phi = -4\pi Ze\delta(\boldsymbol{r})$ を満足する．これを (33.12)（最後の三つの項）に代入し，電子の電荷が負であることを考慮

---

1) 磁気モーメント (33.8) と速度 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{p}/m$ を導入すると，このエネルギーが $-\frac{1}{2c}\boldsymbol{\mu}[\boldsymbol{Ev}]$ の形で得られる．この結果は一見して不自然に見えるかもしれない．なぜかというと，粒子とともに運動している基準系に移ると，磁場 $\boldsymbol{H} = \frac{1}{c}[\boldsymbol{Ev}]$ が生じ，このなかで磁気モーメントは $-\boldsymbol{\mu H}$ のエネルギーを持つからである．しかしながらこのような考察は，実際には粒子に結びついた基準系が慣性系でないことを十分に考えていない．因子 1/2（≪トーマスの 1/2 因子≫，L. Thomas, 1926）の出現は，固有の磁気回転比を持った≪スピノール≫粒子としての電子の特性と結合した相対論的不変性の一般的要求と関連している（§41 参照）．

2) 公式 (33.13) は III，§72 で用いられている．

3) これらの補正への原子核の運動の影響は，さらに小さい程度のもので，ここでは重要でない．

して摂動演算子を得る.

$$V = -\frac{\mathbf{p}^4}{8m^3} + \frac{Z\alpha}{2r^3 m^2}\mathbf{ls} + \frac{Z\alpha\pi}{2m^2}\delta(\mathbf{r}). \tag{34.1}$$

非相対論的シュレーディンガー方程式から

$$\mathbf{p}^2\psi = 2m\left(\varepsilon_0 + \frac{Z\alpha}{r}\right)\psi$$

となる（ここで $\varepsilon_0 = -mZ^2\alpha^2/2n^2$ は非摂動準位で，n は主量子数である）．したがって平均値は

$$\overline{\mathbf{p}^4} = 4m^2\overline{\left(\varepsilon_0 + \frac{Z\alpha}{r}\right)^2}.$$

(34.1) の第2項の平均値のような量は公式（III, §36）

$$\overline{r^{-1}} = \frac{m\alpha Z}{n^2}, \quad \overline{r^{-2}} = \frac{(m\alpha Z)^2}{n^3(l+1/2)},$$
$$\overline{r^{-3}} = \frac{(m\alpha Z)^3}{n^3 l(l+1/2)(l+1)} \tag{34.2}$$

（最後の式は $l \neq 0$ で成り立つ），および固有値

$$l \neq 0 \text{ のとき} \quad ls = \frac{1}{2}\left[j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}\right],$$
$$l = 0 \text{ のとき} \quad ls = 0$$

を使って計算される．最後に，第3項の平均は公式

$$l = 0 \text{ のとき} \quad \psi(0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z\alpha m}{n}\right)^{3/2},$$
$$l \neq 0 \text{ のとき} \quad \psi(0) = 0 \tag{34.3}$$

を使って遂行される.

上記の諸公式を使った簡単な計算の結果はいつも（あらゆる j および l に対して）

$$\Delta\varepsilon = -\frac{m(Z\alpha)^4}{2n^3}\left(\frac{1}{j+1/2} - \frac{3}{4n}\right) \tag{34.4}$$

の形に表わすことができる.

公式 (34.4) は水素のエネルギー準位に対する，求める相対論的補正，すなわち微細構

造のエネルギーを与える[1]．非相対論的理論では，スピンの方向による縮退と同様に，l によるクーロン縮退も存在することを思い起こそう．微細構造(スピン軌道相互作用)はこの縮退を取り除くが，完全に取り除くわけではない．すなわちn，jが同じで $l=j\pm1/2$ が異なっている2重縮退が残る（このとき与えられたnに対して可能な最大の $j=j_{\max}=l_{\max}+1/2=n-1/2$ を持つ準位だけは縮退していない)[2]．このようにして，微細構造を考慮に入れた水素の準位の系列は

$$
\begin{aligned}
&1s_{1/2};\\
&\underbrace{2s_{1/2},\ 2p_{1/2}},\ 2p_{3/2};\\
&\underbrace{3s_{1/2},\ 3p_{1/2}},\ \underbrace{3p_{3/2},\ 3d_{3/2}},\ 3d_{5/2};\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{aligned}
$$

である．主量子数nを持つ準位はn個の成分に分かれている．

われわれは先にいって，ここで残っている縮退が，いわゆる輻射補正（ラム・シフト）によって取り除かれることを見るだろう．これはディラック方程式によって考察されうる1電子の問題ではない．

少し先走るがここで，この補正は大きさの程度として $\sim mZ^4\alpha^5\ln(1/\alpha)$ であることを指摘しよう．スピン軌道相互作用の2次の補正は $\sim m(Z\alpha)^6$，したがってそれと輻射補正との比は $\sim Z^2\alpha/\ln(1/\alpha)$ である．水素 $(Z=1)$ に対しては，この比はもちろん小さい．したがって，この場合にディラック方程式を正確に解くことは無意味である．しかしながら，この問題は Z の大きい原子核の電場中での電子のエネルギー準位に対しては意味がある．

---

1)　この公式は量子力学が作られる以前に（さらに精密な公式 (36.10) と同様）最初にゾンマーフェルトにより，ボーアの古典理論を使って得られていた．

2)　この縮退はクーロン場に特有の付加保存則の存在と関連している．すなわち，ディラック方程式のハミルトニアン $\mathrm{H}=\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}+\beta m-e^2/r$ は演算子

$$\mathrm{I}=\frac{\mathbf{r}}{r}\Sigma+\frac{i}{me^2}\beta(\Sigma\mathbf{l}+1)\gamma^5(\mathrm{H}-m\beta)$$

と可換である(M. H. Johnson, B. A. Lipman, 1950)．非相対論的極限で $\mathrm{I}\to\Sigma\mathbf{A}$ である．ここで

$$\mathbf{A}=\frac{\mathbf{r}}{r}+\frac{1}{2me^2}\{[\mathbf{lp}]-[\mathbf{pl}]\}$$

は，運動の古典的クーロン積分(I，§15 参照)に対応する演算子である．クーロン場における非相対論的偶然縮退は量 $\mathbf{A}$ の保存則と関連している．

§35.　中心対称場内での運動

中心対称の電場内での電子の運動を考えよう．

中心力場内の運動では（座標原点に選んだ場の中心に対する）角運動量と偶奇性が保存されるので，§24 で自由粒子の球面波に関して述べられたことはすべて，このような運動の波動関数の角度依存性に対しても成立する．ただ動径関数が変えられるだけである．これに対応して（標準表示での）定常状態の波動関数を

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(r)\,\Omega_{jlm} \\ (-1)^{\frac{1+l-l'}{2}} g(r)\,\Omega_{jl'm} \end{pmatrix} \tag{35.1}$$

の形で求めよう．ここで $l=j\pm 1/2$, $l'=2j-l$ であり，-1 の乗冪は将来の便宜のために導入されている．

標準表示でのディラック方程式は，φ および χ に対するつぎのような連立方程式を与える．

$$\begin{aligned} (\varepsilon - m - U)\varphi &= \boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}\chi, \\ (\varepsilon + m - U)\chi &= \boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}\varphi. \end{aligned} \tag{35.2}$$

ここで $U(r)=e\Phi(r)$ は電場内の電子のポテンシャル・エネルギーである．これに(35.1)を代入したのちの計算は，これらの方程式の右辺の計算に帰する．

球面スピノール $\Omega_{jl'm}$ を

$$\Omega_{jl'm} = i^{l-l'}\left(\boldsymbol{\sigma}\frac{\mathbf{r}}{r}\right)\Omega_{jlm}$$

((24.8) 参照) により Ω_{jlm} を使って表わして

$$(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})\chi = -i(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{r})\frac{g}{r}\,\Omega_{jlm}$$

と書こう．ここで積 $(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{r})$ は公式 (33.5) を使って変形し，ベクトル演算を行なうと

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})\chi &= -i\{\mathbf{p}\mathbf{r}+i\boldsymbol{\sigma}[\mathbf{p}\mathbf{r}]\}\frac{g}{r}\,\Omega_{jlm} = \{-\operatorname{div}\mathbf{r}-(\mathbf{r}\nabla)-\boldsymbol{\sigma}[\mathbf{r}\mathbf{p}]\}\frac{g}{r}\,\Omega_{jlm} \\ &= -\left\{g'+\frac{2}{r}g+\frac{g}{r}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{l}\right\}\Omega_{jlm} \end{aligned}$$

となる．ここで $\mathbf{l}=[\mathbf{r}\mathbf{p}]$ は軌道角運動量の演算子である．$'$ は r による微分を意味する．積 $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{l}=2\mathbf{l}\mathbf{s}$ の固有値は

$$\boldsymbol{\sigma}\mathbf{l} = j^2-l^2-s^2 = j(j+1)-l(l+1)-\frac{3}{4} = \begin{cases} j-1/2 & (l=j-1/2\ のとき) \\ -j-3/2 & (l=j+1/2\ のとき) \end{cases}$$

に等しい．両方の場合（$l=j\pm1/2$）の式を一つの式に書くためには

$$\kappa=\begin{cases}-(j+1/2)=-(l+1) & (j=l+1/2\ \text{のとき})\\ +(j+1/2)=l & (j=l-1/2\ \text{のとき})\end{cases} \tag{35.3}$$

という記号を導入すると便利である．κ は0を除いたすべての整数値をとる（ここで正数は $j=l-1/2$ の場合に，負数は $j=l+1/2$ の場合に対応する）．ここで $\mathbf{l}\boldsymbol{\sigma}=-(1+\kappa)$ であり，したがって

$$(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})\chi=-\left(g'+\frac{1-\kappa}{r}g\right)\Omega_{jlm}$$

である．

この式を方程式 (35.2) の第1式に代入すると，球面スピノール Ω_{jlm} は方程式の両辺から落ちてしまう．第2の方程式についても同様のことを行ない[1]，結果として動径関数に対するつぎのような連立方程式を得る．

$$\begin{aligned} &f'+\frac{1+\kappa}{r}f-(\varepsilon+m-U)g=0,\\ &g'+\frac{1-\kappa}{r}g+(\varepsilon-m-U)f=0. \end{aligned} \tag{35.4}$$

あるいは

$$\begin{aligned} &(fr)'+\frac{\kappa}{r}(fr)-(\varepsilon+m-U)gr=0,\\ &(gr)'-\frac{\kappa}{r}(gr)+(\varepsilon-m-U)fr=0. \end{aligned} \tag{35.5}$$

電場 $U(r)$ が $r\to0$ で $1/r$ よりも急に増大すると仮定して，f および g の近距離でのふるまいを調べよう．このとき r の小さい領域で方程式 (35.4) は

$$f'+Ug=0,\quad g'-Uf=0$$

の形をとる．これは

$$f=\text{const}\cdot\sin\left(\int Udr+\delta\right),\quad g=\text{const}\cdot\cos\left(\int Udr+\delta\right) \tag{35.6}$$

の形の実数解を持つ．ここで δ は任意定数である．これらの関数は $r\to0$ で振動し，い

1) この計算を繰り返す必要はない．第1の方程式から第2の方程式への移行は((35.1), (35.2) からわかるように)

$$f\to g,\quad g\to -f,\quad m\to -m,\quad l\to l',\quad \kappa\to-\kappa$$

の置き換えで達せられることに気付けば十分である．

かなる極限値にも近づかない．このような事情は粒子の中心への≪落下≫に対応することが容易にわかる．

まず第一に，今考えられている場合，波動方程式は任意の ε に対し，$|\varepsilon|<m$ の場合さえも含めて，連続スペクトルを持つことを指摘しよう．実際この場合，近距離の領域は解の選択を制限しない．すなわち，振動関数に対する $r=0$ の境界条件は本来なく，したがって定数 δ の選択は任意であるからである．（関数 (35.6) と≪連結される≫）r の大きい領域での波動関数の正しいふるまいは，任意の ε に対し δ の適当な選択により可能である．

しかしながら，連続スペクトルの状態では，すべての波束は時間がたつにつれて，どんな有界の空間領域からも出ていってしまう（これはIII，§10の末尾で記述された考察にも示されている）．$|\varepsilon|<m$ のときに粒子は無限遠に行くことはできないので，これは粒子が原点に行くこと，すなわち中心に落下することを意味している．運動は r の小さい側ではあたかも不定のように見える．しかし相対論的理論では，上記の立場はまったく許されない．それはつぎのようなことである．$|\varepsilon|<m$ でスペクトルが連続であるため，負および正の振動数の状態を区別できないことになる．これは系のなんらかの合理的な記述を不可能にしてしまう．特に系は絶対的に不安定になる．すなわち，どんな摂動でも無数の対生成へと導く．したがって，$r\to 0$ のときに $1/r$ より増大の度合が急激なポテンシャルを持つ電場は，ディラック理論では一般に考察不可能である．これはポテンシャルの符号がどちらの場合でも，そうなることを強調しておこう．結局，≪落下≫について言えるのは，引力の場合だけであるが，$U=e\Phi$ の符号は電荷 e の符号にも依存するので，一方の場合に電子準位が異常を示せば，他の場合には陽電子準位が異状を示すことになる．

つぎに大きい距離での波動関数のふるまいを考察しよう．もしも電場 $U(r)$ が $r\to\infty$ のときに十分急速に減少すれば，大きい距離での波動関数の漸近形を決めるときには，方程式中の電場を完全に無視することができる．$\varepsilon>m$ のとき，すなわち連続スペクトルの領域では，自由運動の方程式にもどる．したがって，波動関数（球面波）の漸近形は自由粒子のそれと付加的な≪位相のずれ≫の出現が異なっていて，そのずれの値は近距離の電場の形によって決定される[1]．このずれは j および l の値，あるいは同じことであるが，前に導入された量子数 κ（そしてまたエネルギー ε）に依存する．したがって，これを δ_κ

1) III，§33参照．非相対論的理論におけるように，$U(r)$ は $1/r$ より急に減少する必要がある．$U\sim 1/r$ の場合は§36で特別に考察されている．

と表わし，自由球面波の式 (24.7) を使って，ただちに求める漸近公式を得る．

$$\psi\approx\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\begin{pmatrix}\sqrt{\varepsilon+m}\,\Omega_{jlm}\sin\left(pr-\frac{\pi l}{2}+\delta_\kappa\right)\\ -\sqrt{\varepsilon-m}\,\Omega_{jl'm}\sin\left(pr-\frac{\pi l'}{2}+\delta_\kappa\right)\end{pmatrix}\tag{35.7}$$

（ここで $p=\sqrt{\varepsilon^2-m^2}$）．ここで共通の係数は動径関数の (24.5) にしたがう規格化に対応する．

離散スペクトル ($\varepsilon<m$) の波動関数は $r\to\infty$ で

$$f=-\sqrt{\frac{m+\varepsilon}{m-\varepsilon}}g=\frac{A_0}{r}\exp(-r\sqrt{m^2-\varepsilon^2})\tag{35.8}$$

の法則にしたがって指数関数的に減少する．ここで A_0 は定数である．

非相対論的理論においてと同様に，位相のずれ δ_κ（正確には $e^{2i\delta_\kappa}-1$ という量）はこの電場による散乱振幅を決定する（これに関しては §37 でさらに詳しく言及する）．ここでこれらの量の解析的性質の研究のためにとどまることはよそう（III, §128 参照）．ただ，$e^{2i\delta_\kappa}$ はエネルギーの関数として前と同様に，粒子の結合状態の準位に相当する点に極を持つことだけを指摘しておこう．このような極での関数 $e^{2i\delta_\kappa}$ の留数は，対応する離散スペクトルの波動関数の漸近式の係数と特定の形で結びついている．非相対論的公式 III (128.16) の一般化であるこの関係式を求めよう．必要な計算は III, §128 で行なわれたのとまったく同様である．

方程式 (35.5) をエネルギーで微分して

$$\left(\frac{\partial rf}{\partial\varepsilon}\right)'+\frac{\kappa}{r}\frac{\partial rf}{\partial\varepsilon}-(\varepsilon+m-U)\frac{\partial rg}{\partial\varepsilon}=rg,$$

$$\left(\frac{\partial rg}{\partial\varepsilon}\right)'-\frac{\kappa}{r}\frac{\partial rg}{\partial\varepsilon}+(\varepsilon-m-U)\frac{\partial rf}{\partial\varepsilon}=-rf.$$

これら二つの方程式にそれぞれ rg と $-rf$ を，二つの方程式 (35.5) にそれぞれ $-\frac{\partial rg}{\partial\varepsilon}$ と $\frac{\partial rf}{\partial\varepsilon}$ を掛けたのち，四つの方程式の全部を項ごとに加える．すべてを整頓して

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\left(g\frac{\partial f}{\partial\varepsilon}-f\frac{\partial g}{\partial\varepsilon}\right)\right]=r^2(f^2+g^2)$$

を得る．この等式を r で積分して

$$r^2\left(g\frac{\partial f}{\partial\varepsilon}-f\frac{\partial g}{\partial\varepsilon}\right)=\int_0^r(f^2+g^2)\,r^2dr$$

となる．そして $r\to\infty$ の極限に移す．規格化の条件から等式の右辺は1になる．左辺では漸近領域で関数 f および g が等式

$$rg=\frac{(rf)'}{\varepsilon+m}$$

((35.5) から U および $1/r$ を持つ項を省略して得られる）で結びつけられていることを考慮する．その結果

$$\frac{1}{\varepsilon+m}\left[(rf)'\frac{\partial rf}{\partial\varepsilon}-rf\left(\frac{\partial rf}{\partial\varepsilon}\right)'\right]=1\ . \qquad (35.9)$$

この公式は非相対論的な類似の公式（χ に対する）と，係数（$2m$ の代りに $\varepsilon+m$）だけが異なる．したがって，これから先の計算を繰り返す必要はない．これからただちに，$\varepsilon=\varepsilon_0$ (ε_0 はエネルギー準位）の近くで正しい最終的なつぎの公式を得る．

$$e^{2i\delta_\kappa}=(-1)^l\frac{2A_0^2}{\varepsilon-\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m-\varepsilon_0}{m+\varepsilon_0}}. \qquad (35.10)$$

ここで A_0 は漸近式 (35.8) の係数である．

問　題

電場 $U\sim r^{-s}$，$s<1$ のなかで，r の小さいときの波動関数の極限の形を求めよ．

解　自由粒子に対して，r の小さいときは $f\sim r^l$，$g\sim r^{l'}$ である．したがって，$l<l'$ のときは $f\gg g$ であり，$l>l'$ のときは $f\ll g$ である．考察される電場に対して，このような関係が成り立つものと仮定しよう（これは，結果から見て正しいことがわかる）．$l<l'$ のとき（すなわち $l=j-1/2$，$\kappa=-l-1$），方程式 (35.4) の第一のもので g を持つ項は落としてもよい．したがって，$f\sim r^l$ である．このとき第二の方程式からは $g\sim rfU$ となり，つまり $g\sim r^{l+1-s}=r^{l'-s}$ である．同様にして $l>l'$ の場合も考察される．その結果

$$l<l' \text{ のとき}\quad f\sim r^l,\quad g\sim r^{l'-s},$$
$$l>l' \text{ のとき}\quad f\sim r^{l-s},\quad g\sim r^{l'}$$

であることがわかる．

§36. クーロン場内での運動

さらに重要なクーロン場における運動の性質の研究を，近距離での波動関数のふるまいを調べることから始めよう．はっきりさせるために引力場 $U=-Z\alpha/r$[1] について述べよう．

小さい r に対し，方程式 (35.5) で $\varepsilon\pm m$ を持つ項を落とすことができる．このとき

$$(fr)'+\frac{\kappa}{r}fr-\frac{Z\alpha}{r}gr=0,$$

$$(gr)'-\frac{\kappa}{r}gr+\frac{Z\alpha}{r}fr=0.$$

二つの関数 fr および gr は，これらの方程式のおのおのに同等に現われている．したがって，両方とも r の同じ乗冪の形にしよう．すなわち，$fr=ar^{\gamma}$, $gr=br^{\gamma}$ である．方程式に代入すると

$$a(\gamma+\kappa)-bZ\alpha=0,\quad aZ\alpha+b(\gamma-\kappa)=0$$

を与える．これから

$$\gamma^2=\kappa^2-(Z\alpha)^2. \tag{36.1}$$

$(Z\alpha)^2<\kappa^2$ としよう．このとき γ は実数である．そして二つの値のなかから正のものを選ぶ．すなわち $r=0$ で発散しないか，あるいは他のものにくらべて発散の遅い解に対応する[2]．このようにして

$$f=\frac{Z\alpha}{\gamma+\kappa}g=\text{const}\cdot r^{-1+\gamma},$$
$$\gamma=\sqrt{\kappa^2-Z^2\alpha^2}=\sqrt{(j+1/2)^2-Z^2\alpha^2}. \tag{36.2}$$

($\gamma<1$ ならば) $r=0$ のとき，波動関数は無限大になりうる．しかし $|\psi|^2$ の積分はもちろん収束する．

もしも $(Z\alpha)^2>\kappa^2$ ならば，(36.2) の二つの γ の値は虚数である．これに対応する解は $r\to 0$ で ($r^{-1}\cos(|\gamma|\ln r)$ のように) 振動する．すでに明らかにされているように，これはまた相対論的理論では許しがたい《中心への落下》に対応する．$\kappa^2\geq 1$ であるから，

---

1) 普通の単位で $U=-Ze^2/r$ である．相対論的単位に移ると e^2 は次元のない α に変えられる．

2) 遅く発散する解の選択は，III, §35 で行なったように，ある半径 r_0 で《切断された》ポテンシャルを考え，その後 $r_0\to 0$ の極限移行をする方法を基礎にすることができる．

これはディラック理論における純クーロン場は，$Z\alpha<1$，すなわち $Z<137$ のときにのみ考察しうるということを意味している．

核電場での運動という現実の場合には，原子核の有限の大きさのために，近距離でのポテンシャルの様子はクーロン場と異なっている．これは大きいZを持った原子核の存在を原理的に可能にしている[1]．

また，点電荷の場合でさえも，ポテンシャルの近距離での様子は輻射補正のために歪められること，またその補正が結果を変えることも強調する必要がある．しかしながら，$Z\alpha$の値が1に近いときのこのような補正の役割はいまだ研究されていない．

波動方程式の正確な解にもどろう (G. Darwin 1928, W. Gordon 1928).

a)　**離散スペクトル** ($\varepsilon<m$)　関数 f および g を

$$
\begin{aligned}
f &= \sqrt{m+\varepsilon}\, e^{-\rho/2}\rho^{\gamma-1}(Q_1+Q_2),\\
g &= -\sqrt{m-\varepsilon}\, e^{-\rho/2}\rho^{\gamma-1}(Q_1-Q_2)
\end{aligned}
\tag{36.3}
$$

の形に求めよう．ここで

$$
\rho=2\lambda r,\quad \lambda=\sqrt{m^2-\varepsilon^2},\quad \gamma=\sqrt{\kappa^2-Z^2\alpha^2}
\tag{36.4}
$$

を導入した．すでにわかっている $\rho\to 0$ での関数のふるまい (36.2)，および $\rho\to\infty$ での指数関数的減衰 ($\sim e^{-\rho/2}$) のためにこのような形が自然である．$\rho\to\infty$ で関数 f および g が漸近的に同じ形になることから，$\rho\to\infty$ で $Q_1\gg Q_2$ となることを期待しなければならない．

(36.3) を (35.4) に代入して方程式

$$
\rho(Q_1+Q_2)'+(\gamma+\kappa)(Q_1+Q_2)-\rho Q_2+Z\alpha\sqrt{\frac{m-\varepsilon}{m+\varepsilon}}(Q_1-Q_2)=0,
$$

$$
\rho(Q_1-Q_2)'+(\gamma-\kappa)(Q_1-Q_2)+\rho Q_2-Z\alpha\sqrt{\frac{m+\varepsilon}{m-\varepsilon}}(Q_1+Q_2)=0
$$

を得る（$'$はρ による微分を表わす）．これらの和および差は

$$
\begin{aligned}
\rho Q_1'+\left(\gamma-\frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda}\right)Q_1+\left(\kappa-\frac{Z\alpha m}{\lambda}\right)Q_2&=0,\\
\rho Q_2'+\left(\gamma+\frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda}-\rho\right)Q_2+\left(\kappa+\frac{Z\alpha m}{\lambda}\right)Q_1&=0.
\end{aligned}
\tag{36.5}
$$

---

1)　≪切断された≫ポテンシャルとしての この問題の研究は，И. Померанчук, Я. Смородинский, *J. Phys. USSR* **9**, 97 (1945) 参照．

あるいは，Q_1 または Q_2 を消去して

$$\rho Q_1'' + (2\gamma+1-\rho) Q_1' - \left(\gamma - \frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda}\right) Q_1 = 0,$$

$$\rho Q_2'' + (2\gamma+1-\rho) Q_2' - \left(\gamma+1 - \frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda}\right) Q_2 = 0$$

を与える（$\gamma^2-(Z\alpha\varepsilon/\lambda)^2 = \kappa^2-(Z\alpha m/\lambda)^2$ を考慮する必要がある）．これらの方程式の $\rho=0$ での有限な解は

$$Q_1 = AF\left(\gamma - \frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda},\ 2\gamma+1,\ \rho\right),$$
$$Q_2 = BF\left(\gamma+1 - \frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda},\ 2\gamma+1,\ \rho\right). \tag{36.6}$$

ここで $F(\alpha, \beta, z)$ は合流型超幾何関数である．方程式 (36.5) のいずれかに $\rho=0$ と置いて，定数 A と B のあいだの関係を得る．

$$B = -\frac{\gamma - \dfrac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda}}{\kappa - \dfrac{Z\alpha m}{\lambda}} A. \tag{36.7}$$

(36.6)のなかの二つの超幾何関数は多項式に帰する必要がある（そうでなければ $\rho\to\infty$ のときに e^{ρ} のように増大する．それとともに全体としての波動関数は $e^{\rho/2}$ のように増大してしまう）．もしもパラメータ α が，負の整数あるいは0に等しいときに関数 $F(\alpha, \beta, z)$ は多項式になる．

$$\gamma - \frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda} = -n_r \tag{36.8}$$

と置こう．もしも $n_r = 1, 2, \cdots\cdots$ ならば二つの超幾何関数は多項式になり，$n_r = 0$ ならば，そのなかの一つだけが多項式になる．しかし等式 $n_r=0$ は $\gamma = Z\alpha\varepsilon/\lambda$ を意味し，このときすぐわかるように $Z\alpha m/\lambda = |\kappa|$ である．もしも $\kappa<0$ ならば，係数 B (36.7) は0になり，したがって $Q_2=0$ で，要求される条件は破られない．もしも $\kappa>0$ とすると，$B=-A$ で Q_2 は $n_r=0$ のときに発散関数である．このようにして，量子数 n_r のつぎのような値が許される．

$$n_r = \begin{cases} 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots & (\kappa<0\ \text{のとき}), \\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots & (\kappa>0\ \text{のとき}). \end{cases} \tag{36.9}$$

定義(36.8)からいまや離散エネルギー準位に対するつぎのような式が得られる.

$$\frac{\varepsilon}{m}=\left[1+\frac{(Z\alpha)^2}{(\sqrt{\kappa^2-(Z\alpha)^2}+n_r)^2}\right]^{-1/2}. \tag{36.10}$$

$Z\alpha\ll 1$ のとき, この式の展開の第1項は

$$\frac{\varepsilon}{m}-1=-\frac{(Z\alpha)^2}{2(|\kappa|+n_r)^2}\left\{1+\frac{(Z\alpha)^2}{|\kappa|+n_r}\left[\frac{1}{|\kappa|}-\frac{3}{4(|\kappa|+n_r)}\right]\right\}$$

を与える. $n_r+|\kappa|=n$ $(=1, 2, \cdots\cdots)$ と置き, $|\kappa|=j+1/2$ に注意すると, すでに摂動論を使って得られた公式(34.4)へもどることになる. 前に§34の末尾で示したように, 展開のこの先の項は, 輻射補正に隠れてしまうので無意味である. しかしながら, 公式(36.10)は $Z\alpha\sim 1$ のときにはその正確な形のままで意味がある. 近似式(34.4)で現われた2重縮退準位は正確な式でもそのまま残ることを強調しよう. なぜかというと, そのなかには $|\kappa|$ だけが現われていて, 異なる l の準位も j が同じときには前と同様に一致するからである.

波動関数中の共通の規格化因子 A が未決定のままで残っている. いつもと同じように離散スペクトルの波動関数は条件 $\int|\psi|^2dV=1$ で規格化されなければならない. f および g に対しては条件

$$\int_0^\infty (f^2+g^2)r^2dr=1$$

を意味する. $r\to\infty$ の漸近形によると最も簡単に A が求められる. 漸近式

$$F(-n_r, 2\gamma+1, \rho)\approx\frac{\Gamma(2\gamma+1)}{\Gamma(n_r+2\gamma+1)}(-\rho)^{n_r}$$

(III, (d.14) 参照) を使って

$$f\approx(-1)^{n_r}A\sqrt{m+\varepsilon}\,\frac{\Gamma(2\gamma+1)}{\Gamma(n_r+2\gamma+1)}e^{-\lambda r}(2\lambda r)^{\gamma+n_r-1}.$$

この公式と, 将来求められる式(36.22)とをくらべて

$$A=\frac{\lambda^2}{\Gamma(2\gamma+1)}\left[\frac{2\Gamma(2\gamma+1+n_r)\left(\dfrac{Z\alpha m}{\lambda}-\kappa\right)}{Z\alpha m^2\cdot n_r!}\right]^{1/2}.$$

得られた公式をまとめて, 規格化された波動関数の最終的な式を書けば

$$\left.\begin{matrix} f \\ g \end{matrix}\right\} = \frac{\pm(2\lambda)^{3/2}}{\Gamma(2\gamma+1)}\left[\frac{(m\pm\varepsilon)\Gamma(2\gamma+n_r+1)}{4m\dfrac{Z\alpha m}{\lambda}\left(\dfrac{Z\alpha m}{\lambda}-\kappa\right)n_r!}\right]^{1/2}(2\lambda r)^{\gamma-1}e^{-\lambda r}$$

$$\times\left\{\left(\frac{Z\alpha m}{\lambda}-\kappa\right)F(-n_r, 2\gamma+1, 2\lambda r)\mp n_r F(1-n_r, 2\gamma+1, 2\lambda r)\right\} \tag{36.11}$$

(ここで上の符号は f，下のは g に対するものである)．

b)　**連続スペクトル** ($\varepsilon > m$)　連続スペクトルの状態に対して，波動方程式を新たに解く必要はない．この場合の波動関数は離散スペクトルの波動関数から

$$\sqrt{m-\varepsilon} \to -i\sqrt{\varepsilon-m},\ \lambda \to -ip,\ -n_r \to \gamma - i\frac{Z\alpha\varepsilon}{p} \tag{36.12}$$

の置き換え[1] により求められる（根 $\sqrt{m-\varepsilon}$ の解析接続の際の符号の選択については，III，§128 参照)．しかしながら，関数の規格化は新たに行なわなければならない．

(36.11) に上記の置き換えを行なって関数 f および g を

$$\left.\begin{matrix} f \\ g \end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix} \sqrt{\varepsilon+m} \\ i\sqrt{\varepsilon-m} \end{matrix}\right\}\cdot A'e^{ipr}(2pr)^{\gamma-1}[e^{i\xi}F(\gamma-i\nu, 2\gamma+1, -2ipr)$$
$$\mp e^{-i\xi}F(\gamma+1-i\nu, 2\gamma+1, -2ipr)]$$

の形に表わそう．ここで A' は新しい規格化定数であり

$$\nu = \frac{Z\alpha\varepsilon}{p},\quad e^{-2i\xi} = \frac{\gamma-i\nu}{\kappa-i\nu\dfrac{m}{\varepsilon}} \tag{36.13}$$

が導入された（$\gamma^2+(Z\alpha\varepsilon/p)^2=\kappa^2+(Z\alpha m/p)^2$）であるから量 ξ は実数である)．

よく知られた公式

$$F(\alpha,\beta,z) = e^z F(\beta-\alpha,\ \beta,\ -z)$$

(III，(d.10) 参照）により

$$F(\gamma+1-i\nu,\ 2\gamma+1,\ -2ipr) = e^{-2ipr}F(\gamma+i\nu,\ 2\gamma+1,\ 2ipr)$$
$$= e^{-2ipr}F^*(\gamma-i\nu,\ 2\gamma+1,\ -2ipr)$$

を得る．したがって

$$\left.\begin{matrix} f \\ g \end{matrix}\right\} = 2iA'\sqrt{\varepsilon\pm m}(2pr)^{\gamma-1}\begin{matrix}\mathrm{Im}\\ \mathrm{Re}\end{matrix}\left\{e^{i(pr+\xi)}F(\gamma-i\nu,\ 2\gamma+1,\ -2ipr)\right\}. \tag{36.14}$$

---

1)　以下この節で　$|p| = \sqrt{\varepsilon^2-m^2}$ と置く．

この関数の漸近形は，公式 III(d.14) を使って見いだされる．そこでは今の場合第1項だけが重要である（第2項は $1/r$ よりも高次で減少する）[1]．

$$\left.\begin{matrix} f \\ g \end{matrix}\right\} = 2iA'\sqrt{\varepsilon\pm m}\,\Gamma(2\gamma+1)(2pr)^{\gamma-1}\begin{matrix}\mathrm{Im}\\ \mathrm{Re}\end{matrix}\left\{\frac{(2ipr)^{-\gamma+i\nu}e^{i(rp+\xi)}}{\Gamma(\gamma+1+i\nu)}\right\}$$

$$= \frac{iA'\sqrt{\varepsilon\pm m}}{pr}e^{-\frac{\pi\nu}{2}}\frac{\Gamma(2\gamma+1)}{|\Gamma(\gamma+1+i\nu)|}\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\left(pr+\delta_\kappa+\nu\ln 2pr-\frac{\pi l}{2}\right). \tag{36.15}$$

ここで

$$\delta_\kappa = \xi - \arg\Gamma(\gamma+1+i\nu) - \frac{\pi\gamma}{2} + \frac{\pi l}{2}, \tag{36.16}$$

あるいは

$$e^{2i\delta_\kappa} = \frac{\kappa - i\nu m/\varepsilon}{\gamma - i\nu}\,\frac{\Gamma(\gamma+1-i\nu)}{\Gamma(\gamma+1+i\nu)}e^{i\pi(l-\gamma)}. \tag{36.17}$$

将来の引用のために，相対論的極限の場合（$\varepsilon \gg m,\ \nu \approx Z\alpha$）の位相の式は

$$e^{2i\delta_\kappa} = \frac{\kappa}{\gamma - iZ\alpha}\,\frac{\Gamma(\gamma+1-iZ\alpha)}{\Gamma(\gamma+1+iZ\alpha)}e^{i\pi(l-\gamma)} \tag{36.18}$$

であることを指摘しよう．

(36.15) を規格化された球面波の一般式 (35.7) とくらべて（この際 (35.1) にしたがって関数 f および g の定義を考慮する必要がある），規格化定数 A' を決定することができる．すなわち

$$\frac{iA'}{p}e^{-\frac{\pi\nu}{2}}\frac{\Gamma(2\gamma+1)}{|\Gamma(\gamma+1+i\nu)|} = \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}}.$$

このようにして，連続スペクトルの波動関数のつぎのような最終式を得る[2]．

$$\left.\begin{matrix} f \\ g \end{matrix}\right\} = 2i\sqrt{\frac{m\pm\varepsilon}{\pi\varepsilon}}\,e^{\frac{\pi\nu}{2}}\frac{|\Gamma(\gamma+1+i\nu)|}{\Gamma(2\gamma+1)}\frac{(2pr)^\gamma}{r}$$

$$\times\begin{matrix}\mathrm{Im}\\ \mathrm{Re}\end{matrix}\left\{e^{i(pr+\xi)}F(\gamma-i\nu,\ 2\gamma+1,\ -2ipr)\right\}. \tag{36.19}$$

$\varepsilon < m$ の領域への解析接続のとき，式 (36.17) は

---

1) シュレーデンガー方程式の場合と同様，クーロン・ポテンシャルの減衰が緩慢で波の位相の歪が生じる．この歪は r についてのゆるやかに変化する関数である．

2) 斥力場の場合の波動関数は $Z\alpha$ の前の符号，すなわち ν の符号を変えることによって得られる．

$$e^{2i\delta_\kappa}=\frac{\kappa-Z\alpha m/\lambda}{\gamma-Z\alpha\varepsilon/\lambda}\frac{\Gamma(\gamma+1-Z\alpha\varepsilon/\lambda)}{\Gamma(\gamma+1+Z\alpha\varepsilon/\lambda)}e^{i\pi(l-\gamma)} \tag{36.20}$$

の形をとる．これは $\gamma+1-Z\alpha\varepsilon/\lambda=1-n_r$, $n_r=1,2,\cdots\cdots$ の点で極を持つ（分子の Γ 関数の極）．そしてまた（もしもここで $\kappa<0$ であれば）$\gamma-Z\alpha\varepsilon/\lambda=-n_r=0$ の点でも極を持つ．当然のことながら，これらの点はエネルギーの離散準位と一致する．

$n_r\neq 0$ の極のなかのいずれかの近くでは

$$e^{2i\delta_\kappa}\approx\frac{\left(\frac{Z\alpha m}{\lambda}-\kappa\right)e^{i\pi(l-\gamma)}}{n_r\Gamma(2\gamma+1+n_r)}\Gamma\left(\gamma+1-\frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda}\right)$$

となる．極の近くでの Γ 関数の形は，よく知られた公式 $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\pi/\sin\pi z$ を使って求められる．

$$\Gamma\left(\gamma+1-\frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda}\right)\approx\frac{\pi}{\Gamma(n_r)\sin\pi(\gamma+1-Z\alpha\varepsilon/\lambda)},$$

$$\sin\pi\left(\gamma+1-\frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda}\right)\approx\pi\cos\pi n_r\cdot\frac{d}{d\varepsilon}\left(\frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda}\right)\cdot(\varepsilon-\varepsilon_0)$$

$$=(-1)^{n_r}\frac{\pi Z\alpha m^2}{\lambda^3}(\varepsilon-\varepsilon_0)$$

（ε_0 はエネルギー準位）．このようにして[1)]

$$e^{2i\delta_\kappa}\approx(-1)^{l+n_r}\frac{e^{-i\pi\gamma}\left(\frac{Z\alpha m}{\lambda}-\kappa\right)}{n_r!\,\Gamma(2\gamma+1+n_r)}\frac{\lambda^3}{Z\alpha m^2}\frac{1}{\varepsilon-\varepsilon_0}. \tag{36.21}$$

前節の終りで，極における関数 $e^{2i\delta_\kappa}$ の留数と，それに対応する結合状態の波動関数の漸近式の係数とを結びつける公式が得られた．しかしながらクーロン場の場合には，この公式 (35.10) は若干変形される必要がある．これは ((35.7) でそうであったような）定数の位相のずれの代りに，(36.15) には和 $\delta_\kappa+\nu\ln(2pr)$ が現われることと関連している．したがって，(35.10) の左辺は $e^{2i\delta_\kappa}$ ではなくて

$$\exp(2i\delta_\kappa+2i\nu\ln 2pr)\longrightarrow e^{2i\delta_\kappa}(2i\lambda r)^{2(n_r+\gamma)}$$

と書く必要がある．(36.21) を使い，(35.10) から係数 A_0 を決め（これはいまや r の乗冪の関数である），離散スペクトルの規格化された波動関数の漸近形が見いだされる．

---

1) $n_r=0$ のときも，この公式は正しいことが容易にわかる．

$$f=\left[\frac{(Z\alpha m/\lambda-\kappa)(m+\varepsilon)\lambda^2}{2n_r!\,Z\alpha m^2\Gamma(2\gamma+1+n_r)}\right]^{1/2}(2\lambda r)^{n_r+\gamma}\frac{e^{-\lambda r}}{r}. \tag{36.22}$$

この公式は (36.11) の係数を定めるために既に用いられている．

§37. 中心対称場内での散乱

動かない中心力場における粒子の散乱を記述する波動関数を

$$\psi=u_{\varepsilon p}e^{ipz}+u'_{\varepsilon' p'}\frac{e^{ipr}}{r} \tag{37.1}$$

の形に書こう[1]．ここで $u_{\varepsilon p}$ は入射平面波の双スピノール振幅である．双スピノール $u'_{\varepsilon' p'}$ は散乱の方向 $\boldsymbol{n}'$ の関数で，$\boldsymbol{n}'$ の値が与えられると，$\boldsymbol{n}'$ 方向に伝播する平面波の双スピノール振幅と同形である（しかし，もちろん規格化は一致しない）．

前に §23 で，平面波の双スピノール振幅は，2成分量，すなわち粒子の静止系の非相対論的波動関数である3次元スピノール w を与えることにより，決定されることを見てきた．このスピノールによって電流密度が表わされる．すなわち，それは w^*w に比例する（これの比例係数はエネルギー ε だけに依存し，したがって入射波に対しても散乱波に対しても同一である）．したがって，散乱断面積 $d\sigma=(w'^*w'/w^*w)do$ である．また，もしも（§23 におけるように）条件 $w^*w=1$ で入射波を規格化すればつぎのようになる．

$$d\sigma=w'^*w'\,do.$$

つぎの定義によって散乱演算子 f を導入しよう．

$$w'=\mathrm{f}w. \tag{37.2}$$

量 w, w' が2成分であるために，このようにして定義された演算子は，スピンを考慮した非相対論的散乱理論で定式化された，演算子散乱振幅（III, §138）とまったく同様である．したがって，そこで得られた散乱場のなかの波動関数の位相のずれによって演算子を表わす公式がそのまま持ってこられる．III, §138 で導入されたずれ δ_l^+ および δ_l^- を，相対論的公式 (35.7) に現われる位相のずれ δ_κ で表わして，記号の置き換えを行なう必要があるだけである．位相 δ_l^+ および δ_l^- は軌道角運動量 l，全角運動量 $j=l+1/2$ および $j=l-1/2$ の状態に関するものであることを思い起こそう．定義 (35.3) にしたがって，$j=$

---

1) §37, §38 で $|\boldsymbol{p}|$ を p で表わした．しかし振幅につけた添字としては ε および $\boldsymbol{p}$ を別々に書こう．

$l+1/2$ のときは $\kappa=-l-1$ で，$j=l-1/2$ のときは $\kappa=l$ である．したがって，われわれは

$$\delta_l^+ \longrightarrow \delta_{-(l+1)}, \quad \delta_l^- \longrightarrow \delta_l$$

のように記号の置き換えを行なう必要がある（そして δ の添字はいまや数 κ であることを思い起こそう）．このようにしてつぎの公式を得る[1]．

$$\mathbf{f} = A + B\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\sigma}, \tag{37.3}$$

$$A = \frac{1}{2ip}\sum_{l=0}^{\infty}\left[(l+1)(e^{2i\delta_{-l-1}}-1)+l(e^{2i\delta_l}-1)\right]P_l(\cos\theta), \tag{37.4}$$

$$B = \frac{1}{2p}\sum_{l=0}^{\infty}(e^{2i\delta_{-l-1}}-e^{2i\delta_l})P_l^1(\cos\theta). \tag{37.5}$$

ここで $\boldsymbol{\nu}=[\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}']$ である．

w は静止系でのスピノール波動関数であるから，散乱の偏りの性質は f を使い，III，§ 138 とまったく同じ公式により記述される．

クーロン場の場合には，二つの関数 $A(\theta)$ と $B(\theta)$ を一つの関数を使って表わしうることがわかる．簡単にその計算の過程を示そう[2]．

クーロン場に対して位相 δ_κ は公式 (36.17) で与えられる．これは

$$\begin{aligned} e^{2i\delta_\kappa} &= -\left(\kappa - i\frac{Ze^2m}{p}\right)\frac{\kappa}{|\kappa|}C_\kappa, \\ C_\kappa &= -\frac{\Gamma(\gamma-i\nu)}{\Gamma(\gamma+1+i\nu)}e^{i\pi(|\kappa|-\gamma)} \end{aligned} \tag{37.6}$$

の形になる（$\kappa>0$ のとき $e^{i\pi l}=e^{i\pi\kappa}$ であり，$\kappa<0$ のとき $e^{i\pi l}=-e^{i\pi\kappa}$ であることに注目しよう）．このようにして導入された量を使って，級数 (37.4)，(37.5) は

$$\begin{aligned} A(\theta) &= \frac{1}{p}G(\theta) - i\frac{Ze^2m}{p^2}F(\theta), \\ B(\theta) &= -\frac{i}{p}\tan\frac{\theta}{2}\cdot G(\theta) + \frac{Ze^2m}{p^2}\cot\frac{\theta}{2}\cdot F(\theta) \end{aligned} \tag{37.7}$$

---

1) III (138.5) で B に対する式で，分母の誤った因子 i は落とす必要がある．

2) R. L. Gluckstern, S. R. Lin, *J. Math. Phys.* **5**, 1594 (1964).

の形にすることができる．ここで

$$G(\theta)=\frac{i}{2}\sum_{l=1}^{\infty}l^2C_l(P_l+P_{l-1}),\quad F(\theta)=\frac{i}{2}\sum_{l=1}^{\infty}lC_l(P_l-P_{l-1}). \tag{37.8}$$

級数 $B(\theta)$ の変形にはルジャンドル多項式に対するつぎの漸化式が用いられた．

$$P_l^1+P_{l-1}^1=-\cot\frac{\theta}{2}\cdot l(P_l-P_{l-1}), \tag{37.9}$$

$$P_l^1-P_{l-1}^1=\tan\frac{\theta}{2}\cdot l(P_l+P_{l-1}). \tag{37.10}$$

他方，等式

$$(1+\cos\theta)\frac{d}{d\cos\theta}[P_l(\cos\theta)-P_{l-1}(\cos\theta)]=l[P_l(\cos\theta)+P_{l-1}(\cos\theta)] \tag{37.11}$$

を使って，関数 $F(\theta)$ と $G(\theta)$ は関係式

$$G=(1+\cos\theta)\frac{dF}{d\cos\theta}=-\cot\frac{\theta}{2}\frac{dF}{d\theta} \tag{37.12}$$

により互いに結びついている．したがって $A(\theta)$, $B(\theta)$ は同一の関数 $F(\theta)$ によって表わされることがわかる[1]．

§38. 超相対論的な場合の散乱

超相対論的な場合（$\varepsilon\gg m$）の散乱を考察しよう． 1次近似では波動方程式中の質量 m を完全に無視する．このときは ψ に対してスピノール表示を使うとつごうがよい．そうすると $m=0$ のときには ξ および η に対する方程式が分離するからである．すなわち

$$\begin{aligned}-i\boldsymbol{\sigma}\nabla\xi&=(\varepsilon-U)\xi,\\-i\boldsymbol{\sigma}\nabla\eta&=-(\varepsilon-U)\eta\end{aligned} \tag{38.1}$$

となる（≪ニュートリノ≫型になる．§30参照）．

$\boldsymbol{p}$ 方向に偏った電子の螺線状態は波動関数 $\psi=\begin{pmatrix}\xi\\0\end{pmatrix}$ に，そして $\boldsymbol{p}$ と反対方向に偏ったのは $\psi=\begin{pmatrix}0\\\eta\end{pmatrix}$ に対応する．ξ および η の方程式に分離したので，この性質が散乱で変わらないことは明らかである．言いかえれば，超相対論的電子の散乱では螺線度は保存する．対称性の考察（縦方向の偏り）から，螺線状粒子の散乱の際に方位角方向の非対称は

1) 関数 $F(\theta)$ は初等関数を使って閉じた形で表わされない．しかしながら，ある2重積分の形に書くことが可能であることがわかる．前掲論文参照．

存在しないことは明らかである．螺線状電子の散乱断面積はその螺線度の符号に依存しないと主張することも可能である．これは，中心場が反転に関し不変であり，螺線度の符号は反転に際し逆になることから出てくる．

超相対論的な場合には公式 (37.3)〜(37.5) は非常に簡単になる (D. R. Yennie, D. G. Ravenhall, R. N. Wilson, 1954).

入射電子が，たとえば運動方向 $\boldsymbol{n}$ の方向に偏っているとしよう．$\boldsymbol{n\sigma}$ が一定値を持つ平面波に対しスピノール $\xi(=(\varphi+\chi)/\sqrt{2})$ は，波の標準表示に現われる3次元スピノール w に比例する．したがって，入射波のスピノール振幅と散乱波のそれとのあいだの，新しい表示での関係式は，前と同じように，同じ演算子 f で与えられる．

散乱の結果，偏りは運動量とともに回転され，新しい方向 $\boldsymbol{n}'$ を得る．したがって，演算子 f の電子のスピン波動関数に対する作用は，スピンを角 θ ($\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{n}'$ のあいだの角) だけ軸 $\boldsymbol{\nu}=[\boldsymbol{nn}']$ のまわりを回転させることに帰してしまう．つぎにこのような回転は，座標系のこの同じ軸のまわりの反対方向の回転，すなわち角 $-\theta$ の回転と同等である．ここから，演算子 f は (係数を除き正確に)，座標系の上記の変化の際の波動関数の変換を起こさせる演算子，すなわち θ を $-\theta$ に変えた演算子 (18.17) と一致する必要がある．(37.3) を (18.17) とくらべて

$$\frac{B}{A}=-i\tan\frac{\theta}{2} \tag{38.2}$$

でなければならないことがわかる．このようにして超相対論的極限では

$$\mathrm{f}=A(\theta)\left[1-i\tan\frac{\theta}{2}\cdot\boldsymbol{\nu\sigma}\right]. \tag{38.3}$$

もしもこの極限で生じる位相 δ_κ と $\delta_{-\kappa}$ とのあいだの関係式を利用すれば，$A(\theta)$ に対する式 (37.4) もまた簡単にすることができる．それを導くために，関数 f および g に対する方程式 (35.5) は，m を持つ項を落とせば，粒子や場のパラメータに触れない置き換え

$$\kappa\to-\kappa,\quad f\to g,\quad g\to -f$$

に対して不変であることに注意しよう．したがって，$f_\kappa/g_\kappa=-g_{-\kappa}/f_{-\kappa}$ であり，漸近式を代入して

$$\tan\left(pr-\frac{l\pi}{2}+\delta_\kappa\right)=-\cot\left(pr-\frac{l'\pi}{2}+\delta_{-\kappa}\right),$$

$$\delta_\kappa = \delta_{-\kappa} - (l'-l)\frac{\pi}{2} + \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi.$$

これから

$$e^{2i\delta_\kappa} = e^{2i\delta_{-\kappa}}. \tag{38.4}$$

この関係式を使い（また (37.4) の和の第1項の添字 l を $l-1$ に変えて[1]）

$$A(\theta) = \frac{1}{2ip}\sum_{l=1}^{\infty} l\,(e^{2i\delta_l}-1)\,[P_l(\cos\theta)+P_{l-1}(\cos\theta)]. \tag{38.5}$$

(38.2) から Re $(AB^*) = 0$ となる．これは，今考えている近似では，断面積は粒子の始めの偏りに依存しないこと，そして偏りがない線束は散乱後も偏りがないままでいることを意味している（公式 III (138.7)～(138.9) 参照）．また $\theta \to \pi$ の際に，式 $A(\theta)$ (38.5) は $(\pi-\theta)^2$ のように0に近づくことを指摘しよう（$P_l(-1) = (-1)^l$ であることを思い起こそう）．これとともに，また断面積

$$\frac{d\sigma}{do} = |A|^2 + |B|^2 = \frac{|A(\theta)|^2}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}} \tag{38.6}$$

もまた 0 に近づく．列挙した性質はもちろん，小さい量 m/ε のつぎの近似では消滅してしまう．特に，解析の結果は，$\theta \to \pi$ のときには断面積が $(m/\varepsilon)^2$ に比例する極限に近づくことを示している．

超相対論的な場合のクーロン場に対し，(36.18) からわかるように[2] 位相 δ_κ はエネルギーに依存しない．したがって，クーロン場では $\varepsilon \gg m$ の散乱断面積は

$$d\sigma = \frac{\tau(\theta)}{\varepsilon^2}\,do \tag{38.7}$$

の形を持つ．ここで τ は角度だけの関数である．

§ 39. クーロン場内の散乱に対する連続スペクトルの波動関数の組

先へいって(§ 93)，超相対論的電子の重い原子核 ($Z\alpha \sim 1$) の電場内の散乱の際に起こ

---

1) 公式 (37.5) の同様な変形によってもふたたび関係式 (38.2) を得ることができる．このとき，ルジャンドルの多項式のあいだの漸化式 (37.10) を使う必要がある．

2) クーロン場に対して $r \to r'/\varepsilon$ の置き換えによって，エネルギー ε は一般に方程式から消去することができるので，方程式(38.1)から直接に見ることができる．

る種々の非弾性過程が考察されよう．対応する行列要素の計算のためには，（$r\to\infty$ の）漸近形が平面波および球面波からなるような波動関数が要求される．

超相対論的な場合($\varepsilon\gg m$)には，（電子から原子核への）運動量の転移 $q=|\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p}|\sim m$ が散乱で基本的な役割を演じることがわかる．この値 q は≪衝突径数≫ $\rho\sim 1/q\sim 1/m$ に対応する．このとき電子は角度[1]

$$\theta\sim\frac{q}{p}\sim\frac{m}{\varepsilon} \tag{39.1}$$

だけ曲げられる．座標 r (中心からの距離) および $z=r\cos\theta$ を使うと，これは領域

$$\rho\equiv r\sin\theta\sim\frac{1}{m},\quad p(r-z)=pr(1-\cos\theta)\sim 1 \tag{39.2}$$

を意味している．ここでは $r\sim\varepsilon/m^2$ である．すなわち距離の大きい領域のことである．

ディラック方程式を

$$(\varepsilon-U-m\beta+i\boldsymbol{\alpha}\nabla)\psi=0,\quad U=-\frac{Z\alpha}{r} \tag{39.3}$$

の形に書こう．これを2次方程式に変形しよう．そのために (39.3) に演算子 $(\varepsilon-U+m\beta-i\boldsymbol{\alpha}\nabla)$ を適用する．

$$(\Delta+p^2-2\varepsilon U)\psi=(-i\boldsymbol{\alpha}\nabla U-U^2)\psi. \tag{39.4}$$

今考えている領域では $r\gg Z\alpha/\varepsilon$ であるから $U\ll\varepsilon$ である．1次近似では (39.4) の右辺を省略することができる．残りの方程式

$$\left(\Delta+p^2+\frac{2\varepsilon Z\alpha}{r}\right)\psi=0 \tag{39.5}$$

は，形はクーロン場内の非相対論的シュレーディンガー方程式

$$\left(\frac{1}{2m}\Delta+\frac{p^2}{2m}+\frac{Z\alpha}{r}\right)\psi=0$$

と一致し，ただパラメータの取り方の一目瞭然な変更（≪ポテンシャル・エネルギー≫のなかの余分な因子 ε/m）だけが異なっている．したがって，ただちに求める漸近形（III, §134 参照）を持つ解を書くことができる．

かくして，漸近的な平面波（$\propto e^{i\boldsymbol{pr}}$）および発散球面波を含む波動関数は

$$\psi_{\varepsilon\boldsymbol{p}}^{(+)}=C\frac{u_{\varepsilon\boldsymbol{p}}}{\sqrt{2\varepsilon}}e^{i\boldsymbol{pr}}F\left(\frac{iZ\alpha\varepsilon}{p},\ 1,\ i(pr-\boldsymbol{pr})\right), \tag{39.6}$$

1）この節では p は $|\boldsymbol{p}|$ を意味する．

$$C = e^{\pi Z\alpha\varepsilon/2p}\Gamma\left(1-i\frac{Z\alpha\varepsilon}{p}\right)$$

となる．ここで F は合流型超幾何関数で，$u_{\varepsilon p}$ はわれわれが用いた条件 (23.4)

$$\bar{u}_{\varepsilon p}u_{\varepsilon p} = 2m \qquad (39.7)$$

で規格化された，平面波の定双スピノール振幅である．

波動関数 (39.6) は，その漸近式中の平面波が，≪単位体積当たり1個≫に対応して普通の形

$$\frac{u_{\varepsilon p}}{\sqrt{2\varepsilon}}e^{ipr}$$

を持つように規格化されている．超相対論的場合には $p\approx\varepsilon$ である．そこで (39.6) のなかで $Z\alpha\varepsilon/p\approx Z\alpha$ と置き換えることができる．すなわち

$$\psi_{\varepsilon p}^{(+)} = C\frac{u_{\varepsilon p}}{\sqrt{2\varepsilon}}e^{ipr}F(iZ\alpha,\ 1,\ i(pr-pr)),$$
$$C = e^{Z\alpha\pi/2}\Gamma(1-iZ\alpha). \qquad (39.8)$$

距離は十分大きく $pr\gg 1$ と考えているが，(39.8) のなかで超幾何関数をその漸近式で置き換えてはいけないことに注意しよう．なぜかというと，関数 F の引数は pr でなくて $pr(1-\cos\theta)$ という量で，大きいと仮定していないからである[1]．

応用ではまた，ψのつぎのような近似も必要なことがわかる．それは($u_{\varepsilon p}$ の因子に帰せられる)(39.8)の構造とは異なったスピノール構造を持つものである．その計算のためにψ を

$$\psi = \frac{C}{\sqrt{2\varepsilon}}e^{ipr}(u_{\varepsilon p}F+\varphi)$$

の形に書こう．方程式 (39.4) の右辺で U の1乗冪の項を残し，関数φ に対し方程式

$$(\Delta+2ip\nabla-2\varepsilon U)\varphi = -iu_{\varepsilon p}(\alpha\nabla U)F \qquad (39.9)$$

を得る．関数 F が方程式

$$(\Delta+2ip\nabla-2\varepsilon U)F = 0$$

を満足すること ((39.6) を (39.5) に代入してこれは確かめることができる)に注意し，この解を見い出すことができる．この方程式に演算 ∇ を使って

---

1) Ⅲ，§133 でわれわれは，このような置き換えが，任意の角度 θ に対して可能なような十分大きい r に興味を持った．

$$(\Delta+2i\boldsymbol{p}\nabla-2\varepsilon U)\nabla F = 2\varepsilon F\nabla U.$$

方程式 (39.9) とくらべて次式を得る.

$$\varphi = -\frac{i}{2\varepsilon}(\boldsymbol{\alpha}\nabla)u_{\varepsilon\boldsymbol{p}}F.$$

$\psi^{(+)}$ および $\psi^{(-)}$ に対して，その漸近式に球面波を含むような最終的な式を書こう.

$$\psi_{\varepsilon\boldsymbol{p}}^{(+)} = \frac{C}{\sqrt{2\varepsilon}}e^{i\boldsymbol{pr}}\left(1-\frac{i\boldsymbol{\alpha}}{2\varepsilon}\nabla\right)F(iZ\alpha,\ 1,\ i(pr-\boldsymbol{pr}))u_{\varepsilon\boldsymbol{p}},$$

$$\psi_{\varepsilon\boldsymbol{p}}^{(-)} = \frac{C^*}{\sqrt{2\varepsilon}}e^{i\boldsymbol{pr}}\left(1-\frac{i\boldsymbol{\alpha}}{2\varepsilon}\nabla\right)F(-iZ\alpha,\ 1,\ -i(pr+\boldsymbol{pr}))u_{\varepsilon\boldsymbol{p}},$$

$$C = e^{\pi Z\alpha/2}\Gamma(1-iZ\alpha) \tag{39.10}$$

(W. H. Furry, 1934). また陽電子の加わる過程の考察の際に必要な，≪負の振動数≫の類似の関数 ($\psi_{-\varepsilon-\boldsymbol{p}}$) も書こう. これは関数 $\psi_{\varepsilon\boldsymbol{p}}$ から $\boldsymbol{p}\to-\boldsymbol{p}$, $\varepsilon\to-\varepsilon$ の置き換えによって得られる. この際 $p=|\boldsymbol{p}|$ は不変である (このために超幾何関数のパラメータ $iZ\alpha$ は符号を変える. これはこのパラメータが $iZ\alpha\varepsilon/p$ の形で含まれている最初の式 (39.6) から見ることができる). このようにして

$$\psi_{-\varepsilon-\boldsymbol{p}}^{(+)} = \frac{C}{\sqrt{2\varepsilon}}e^{-i\boldsymbol{pr}}\left(1+\frac{i\boldsymbol{\alpha}}{2\varepsilon}\nabla\right)F(-iZ\alpha,\ 1,\ i(pr+\boldsymbol{pr}))u_{-\varepsilon-\boldsymbol{p}},$$

$$\psi_{-\varepsilon-\boldsymbol{p}}^{(-)} = \frac{C^*}{\sqrt{2\varepsilon}}e^{-i\boldsymbol{pr}}\left(1+\frac{i\boldsymbol{\alpha}}{2\varepsilon}\nabla\right)F(iZ\alpha,\ 1,\ -i(pr-\boldsymbol{pr}))u_{-\varepsilon-\boldsymbol{p}}, \tag{39.11}$$

$$C = e^{-\pi Z\alpha/2}\Gamma(1+iZ\alpha).$$

いままでやってきた計算に関し，つぎのような注意をする必要がある. われわれが設定した漸近条件それ自身は，波動方程式の解の一意的な選択にはけっして十分なものではない (これはこの条件を破らずに，いつでも任意のクーロンの発散球面波を ψ に付け加えうることからも明らかである). 方程式 (39.5) の解を (39.6) の形に書いて，これによりわれわれは暗黙のうちに $r=0$ で有限な解の選択と考えてきた. このような要求は全空間で成り立つシュレーディンガー方程式の正確な解を考察したIII, §133, §134[1] では不可避であった. 今の場合は方程式 (39.5) が大きい距離だけに関するもので，したがって解の選択には付加的な基礎づけが必要である.

---

1) III, §133 で記述された解法で，この条件は種々の値の β_1, β_2 を持つ積分の総和の代りに，III (133.1) の形の部分積分の選択によって保証されている.

これは，大きい≪衝突径数≫ $\rho=r\sin\theta$ は，大きい軌道角運動量 l および小さい散乱角に対応するという事実によって与えられる．すなわち $\rho\sim 1/m$ のとき

$$l\sim\rho p\sim\rho\varepsilon\sim\frac{\varepsilon}{m}\gg 1$$

であり，角度 θ は準古典的方法により値を見積ることができる．すなわち

$$\theta\sim\frac{1}{p}\int\frac{dU}{dr}dt\sim\frac{U'(\rho)t}{p}\sim\frac{m}{\varepsilon}\ll 1.$$

これは，ψ の球面波展開のなかに（今考えている r および θ の領域で）おもに上記のような大きい値の l を持つ波が現われることを意味している．しかし，座標原点に向かって（遠心力障壁のために）≪古典的に到達不可能な≫距離 $r\ll l/\varepsilon$ まで近づくと，大きい l を持つ球面波は小さい値まで減衰してしまう．したがって，もしも方程式(39.5)の解と近距離で正確な方程式 (39.4) の解とを $r\sim r_1$ で≪連結する≫——ここで $l/\varepsilon\gg r_1\gg Z\alpha/\varepsilon$ とする——と，方程式 (39.5) の解に対する境界条件は，それが小さいという要求になってしまい，われわれの行なった選択を正当化している．

問　　題

$Z\alpha\ll 1$ の引力のクーロン場に対し，離散スペクトルの非相対論的波動関数に対する（$\sim Z\alpha$ の程度の）補正を求めよ．

解　結合状態の電子の速度は $v\sim Z\alpha$ である．したがって，$Z\alpha\ll 1$ のときゼロ近似で波動関数は非相対論的である．すなわち

$$\psi=u\psi_{\text{非相}}.$$

ここで $\psi_{\text{非相}}$ はシュレーディンガー関数で，u は双スピノールで $u=\begin{pmatrix}w\\0\end{pmatrix}$ の形である．ここで w は電子の偏りの状態を記述するスピノールである．つぎの近似を $\psi=u\psi_{\text{非相}}+\psi^{(1)}$ と書こう．そして (39.4) に代入して $\psi^{(1)}$ に対してつぎの方程式を得る．

$$\left(\frac{1}{2m}\Delta-|\varepsilon_n|+\frac{Z\alpha}{r}\right)\psi^{(1)}=i\frac{Z\alpha}{2m}\left(\nabla\frac{1}{r}\right)(\boldsymbol{\alpha}u)\psi_{\text{非相}}.$$

ここで ε_n は非相対論的エネルギー準位である．ここで $\sim(Z\alpha)^2$ の程度の項は落とされた（非相対論的場合に基本的距離はボーア半径の程度 $r\sim 1/mZ\alpha$ であることを考慮しなければならない）．この方程式の解は $\psi^{(1)}=-\frac{i}{2m}\boldsymbol{\alpha}u\nabla\psi_{\text{非相}}$ であり，したがってつぎのようになる．

$$\psi = \left(1 - \frac{i}{2m}\boldsymbol{\alpha}\nabla\right) u \psi_{\text{非相}}.$$

§40. 平面電磁波の場内の電子

ディラック方程式は，平面電磁場内を運動する電子に対して正確に解くことができる(Д. М. Волков, 1937).

波動4-ベクトル k ($k^2 = 0$) を持つ平面波の場は，$\varphi = kx$ の組み合わせでのみ座標に依存する．したがって，4-ポテンシャルは

$$A^\mu = A^\mu(\varphi). \tag{40.1}$$

これはローレンツ・ゲージの条件

$$\partial_\mu A^\mu = k_\mu A^{\mu\prime} = 0$$

を満足する（′ は φ による微分を意味する）．A のなかの定数項は重要でないので，この条件では ′ を落としてつぎの形に書こう．

$$kA = 0. \tag{40.2}$$

2次方程式 (32.6) から出発しよう．そこでは場のテンソルは

$$F_{\mu\nu} = k_\mu A'_\nu - k_\nu A'_\mu \tag{40.3}$$

である．$(i\partial - eA)^2$ を展開するとき，(40.2) によって $\partial_\mu(A^\mu\psi) = A^\mu\partial_\mu\psi$ であることを考慮する必要がある．その結果つぎの方程式を得る．

$$[-\partial^2 - 2ie(A\partial) + e^2A^2 - m^2 - ie\hat{k}\hat{A}']\psi = 0. \tag{40.4}$$

ここで $\partial^2 = \partial_\mu\partial^\mu$.

この方程式の解を

$$\psi = e^{-ipx}F(\varphi) \tag{40.5}$$

の形に求めよう．ここで p は定4-ベクトルである．p に const$\cdot k$ の形の任意のベクトルを付け加えても，関数 ψ のこの形は変わらない（ただ関数 $F(\varphi)$ の適当な変形が要求されるだけである）．したがって，一般性を制限することなく p に付加条件をつけてもよい．

$$p^2 = m^2 \tag{40.6}$$

としよう．ここで場を取り去ると量子数 p^μ は自由粒子の4-運動量の成分になる．場があるときの4-ベクトル p の成分の意味は，$A_0 = 0$ になるような特別の基準系の方がよくわ

かる．この系ではベクトル $\boldsymbol{A}$ が x^1 軸，$\boldsymbol{k}$ が x^3 軸に向いているとしよう（すなわち電場は x^1 軸に沿い，磁場が x^2 軸に沿い，波自身は x^3 軸方向に伝播するわけである）．このとき (40.5) は演算子

$$\mathrm{p}_1 = i\frac{\partial}{\partial x^1},\quad \mathrm{p}_2 = i\frac{\partial}{\partial x^2},\quad \mathrm{p}_0-\mathrm{p}_3 = i\left(\frac{\partial}{\partial x^0}-\frac{\partial}{\partial x^3}\right)$$

の固有関数で，固有値 p_1，p_2，p_0-p_3 を持つ（これらの演算子自身はディラック方程式のハミルトニアンと可換である）．

このようにして，与えられた基準系では p^1，p^2 は x^1，x^2 軸方向の一般化された運動量であり，p^0-p^3 は全エネルギーと x^3 軸方向の一般化された運動量の差である．

(40.5) を (40.4) に代入する際

$$\partial^\mu F = k^\mu F',\quad \partial_\mu\partial^\mu F = k^2 F'' = 0$$

であることに注意し，$F(\varphi)$ に対しつぎの方程式を得る．

$$2i(kp)F'+[-2e(pA)+e^2A^2-ie\hat{k}\hat{A}']F = 0.$$

この方程式の積分は

$$F = \exp\left\{-i\int_0^{kx}\left[\frac{e}{(kp)}(pA)-\frac{e^2}{2(kp)}A^2\right]d\varphi+\frac{e\hat{k}\hat{A}}{2(kp)}\right\}\frac{u}{\sqrt{2p_0}}$$

となる．ここで $u/\sqrt{2p_0}$ は任意の定双スピノールである（この書き表わし方については，下記参照）．

$$\hat{k}\hat{A}\hat{k}\hat{A} = -\hat{k}\hat{k}\hat{A}\hat{A}+2(kA)\hat{k}\hat{A} = -k^2A^2 = 0$$

であるために，$\hat{k}\hat{A}$ の1乗冪以上の乗冪は0に等しい．したがって

$$\exp\frac{e\hat{k}\hat{A}}{2(kp)} = 1+\frac{e}{2(kp)}\hat{k}\hat{A}$$

と置き換えることができる．したがって，ψ は

$$\psi_p = \left[1+\frac{e}{2(pk)}\hat{k}\hat{A}\right]\frac{u}{\sqrt{2p_0}}e^{iS} \tag{40.7}$$

の形になる．ここで[1)]

1) S は波の場のなかを運動している粒子に対しては，古典的作用と一致することを指摘しておく（II，§47，問題2と比較せよ）．

$$S=-px-\int_0^{kx}\left[\frac{e}{(kp)}(pA)-\frac{e^2}{2(kp)}A^2\right]d\varphi. \tag{40.8}$$

定スピノール u に課される条件を明らかにするために，波が非常にわずかしか減衰しないと仮定しよう．ここで $x\to\infty$ のとき $A\to 0$ であり，ψ は自由ディラック方程式の解に移らねばならない．これに対し $u=u(p)$ は方程式

$$(\hat{p}-m)u=0 \tag{40.9}$$

を満足する必要がある．この条件によって2次方程式の《余分な》解が落とされる．u は座標に依存しないので，弱い減衰の存在が ψ の形にまだ反映しない有限の x では，この条件は有効である．このようにして $u(p)$ は自由平面波の双スピノール振幅と一致する．これが (23.4) と同じ条件すなわち $\bar{u}u=2m$ で規格化されると仮定しよう．

いま述べた考察により，波動関数(40.7)の規格化もただちに明らかになる．連続スペクトルの波動関数に対して，規格化積分は空間の離れた領域で定式化される．弱い減衰を導入したのちに，その領域での波動関数は自由運動の関数と一致する．ここから，関数 (40.7) は自由平面波と同じつぎの規格化条件を満足する．

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int\psi_{p'}^*\psi_p\,d^3x=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\bar{\psi}_{p'}\gamma^0\psi_p d^3x=\delta(\mathbf{p}'-\mathbf{p}). \tag{40.10}$$

関数 (40.7) に対応する電流密度を見いだそう．

$$\bar{\psi}_p=\frac{\bar{u}}{\sqrt{2p_0}}\left[1+\frac{e}{2(pk)}\hat{A}\hat{k}\right]e^{-iS}$$

に注意し，直接の計算によって

$$j^\mu=\bar{\psi}_p\gamma^\mu\psi_p=\frac{1}{p_0}\left\{p^\mu-eA^\mu+k^\mu\left(\frac{e(pA)}{(kp)}-\frac{e^2A^2}{2(kp)}\right)\right\}. \tag{40.11}$$

もしも $A^\mu(\varphi)$ が週期関数であれば，その (時間) 平均値は0になる．したがって，電流密度の平均値は

$$\overline{j^\mu}=\frac{1}{p_0}\left(p^\mu-\frac{e^2}{2(kp)}\overline{A^2}k^\mu\right). \tag{40.12}$$

状態 ψ_p での運動学的運動量密度も求めることにしよう．運動学的運動量の演算子は，$\mathrm{p}-eA=i\partial-eA$ である．直接の計算で

$$\psi_p^*(\mathrm{p}^\mu-eA^\mu)\psi_p=\bar{\psi}_p\gamma^0(\mathrm{p}^\mu-eA^\mu)\psi_p$$

$$= p^\mu - eA^\mu + k^\mu\left(\frac{e(pA)}{(kp)} - \frac{e^2A^2}{2(kp)}\right) + k^\mu \frac{ie}{8(kp)p_0} F_{\lambda\nu}(u^*\sigma^{\lambda\nu}u). \qquad (40.13)$$

この4-ベクトルの時間の平均を q^μ で表わす.

$$q^\mu = p^\mu - \frac{e^2\overline{A^2}}{2(kp)} k^\mu. \qquad (40.14)$$

この2乗は

$$q^2 = m_*^2, \quad m_* = m\sqrt{1 + \frac{e^2}{m^2}\overline{A^2}}. \qquad (40.15)$$

m_* は場のなかの電子の《有効質量》の役割を演じる. (40.14) と (40.12) をくらべて

$$\overline{j^\mu} = \frac{q^\mu}{p_0} \qquad (40.16)$$

であることがわかる.

また, 規格化条件 (40.10) はベクトル $\boldsymbol{q}$ を使って

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int \psi_{p'}^* \psi_p \, d^3x = \frac{q_0}{p_0}\delta(\boldsymbol{q}' - \boldsymbol{q}) \qquad (40.17)$$

の形を持つことを指摘しておこう ((40.10) から (40.17) への移行は上記の特別な基準系で最も簡単に行なわれる).

§41. 外場内のスピンの運動

ディラック方程式の準古典的近似への移行は, 非相対論的理論の場合と同様に行なわれる. 2次方程式 (32.7a) のなかで ψ を

$$\psi = ue^{\frac{i}{\hbar}S}$$

の形[1]に置こう (ここで S はスカラー, u はゆっくり変化する双スピノールである). このとき準古典性の普通の条件が満たされているものと仮定されている. すなわち, 波長 $\hbar/|\boldsymbol{p}|$ の程度の距離のあいだの粒子の運動量の変化がわずかである必要がある.

$\hbar$ についてのゼロ近似では, 作用 S に対する普通の相対論的ハミルトン＝ヤコビの方程式が得られる. このときはスピンを含む ($\hbar$ に比例する) すべての項は方程式から落ちてしまう. スピンは $\hbar$ についてのつぎの近似でのみ現われる. 言いかえれば, 電子の磁気モ

---

1) 始めは普通の単位を使う.

ーメントの運動に対する影響は，いつも量子論的補正と同じ大きさの程度の量である．これはスピンの大きさが$\hbar$に比例し，またそれが純量子論的な性質を持つことからもまったく自然なことである．

このような事情と関連して，外場のなかで与えられた準古典的運動をする電子のスピンのふるまいの問題を提起することも意味が出てくる．この問題の解は，ディラック方程式の$\hbar$についてのつぎの近似に含まれる．しかしながら，われわれはよりわかり易い，直接にはディラック方程式と結びつかない方法を用いよう．それはディラック方程式では記述できない≪異常≫磁気回転比を持つものも含めて，任意の粒子の運動の考察を可能にしている点ですぐれている．

われわれの目的は，粒子の任意の（与えられた）運動の際の，スピンに対する≪運動方程式≫を確立することにある．非相対論的な場合から始めよう．

外場内の粒子の非相対論的ハミルトニアンは

$$\mathrm{H} = \mathrm{H}' - \mu\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{H}. \tag{41.1}$$

ここでH'はスピンを含まないすべての項を含んでいる（III，§110参照）．μは磁気モーメントである．ハミルトニアンのこの形は，粒子の特定の種類とは関係がない．電子に対しては$\mu = e\hbar/2mc$（電子の電荷は$e = -|e|$である！），核子に対してμはさらに≪異常≫部分[1)]

$$\mu' = \mu - \frac{e\hbar}{2mc} \tag{41.2}$$

を含んでいる．

量子力学の一般法則にしたがって，スピン運動の演算子の方程式は公式

$$\dot{\mathbf{s}} = \frac{i}{\hbar}(\mathrm{H}\mathbf{s} - \mathbf{s}\mathrm{H}) = \frac{i}{2\hbar}(\mathrm{H}\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\mathrm{H}) \tag{41.3}$$

から得られる．ここに（41.1）を代入して

$$\dot{s}_i = -\frac{i\mu}{2\hbar}H_k(\sigma_k\sigma_i - \sigma_i\sigma_k) = -\frac{\mu}{\hbar}e_{ikl}H_k\sigma_l,$$

あるいは

$$\dot{\mathbf{s}} = \frac{2\mu}{\hbar}[\mathbf{s}\boldsymbol{H}]. \tag{41.4}$$

---

1)　いわゆる輻射補正を考慮しても非常に小さい≪異常部分≫が，電子の磁気モーメントにもまた含まれている．

この演算子の等式を，与えられた軌道に沿って運動している準古典的波束の状態について平均する．この操作はスピン演算子をその平均値 $\bar{\mathbf{s}}$ に，ベクトル $\boldsymbol{H}$ を関数 $\boldsymbol{H}(t)$ に置き換える．これは軌道に沿う与えられた運動の際に，粒子（波束）が現われる点での磁場の変化を表わすものである．非相対論的近似では（すなわちパウリ方程式の枠内では），$\mathbf{s}=\boldsymbol{\sigma}/2$ は静止系での粒子のスピン演算子であり，われわれは§29でその平均値を $\boldsymbol{\zeta}/2$ と置いた．このようにして方程式

$$\frac{d\boldsymbol{\zeta}}{dt}=\frac{2\mu}{\hbar}[\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{H}(t)] \tag{41.5}$$

に到達する．このような形にすると，この方程式は本来純古典的性質のものである．これは磁気モーメントベクトルがその大きさを変えずに，場の方向のまわりを角速度 $-2\mu\boldsymbol{H}/\hbar$ で歳差運動をすることを意味する[1]．

同じ非相対論的な場合には粒子の速度 $\boldsymbol{v}$ は方程式

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{e}{mc}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}]$$

にしたがって変化する．すなわち速度 $\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{H}$ の方向のまわりを角速度 $-e\boldsymbol{H}/mc$ で回転する．もしも $\mu'=0$ ならば $\mu=e\hbar/2mc$ である．そしてその角速度はベクトル $\boldsymbol{\zeta}$ の回転の角速度 $-2\mu\boldsymbol{H}/\hbar$ と一致する．言いかえれば，偏りのベクトルは運動の方向と一定の角度を保つことになる（先へいってこの結果が相対論的理論でも有効であることを見るであろう）．

今度は方程式（41.5）の相対論的一般化を行なおう．この際偏りの共変記述のために，§29で導入された4-ベクトル a を使う必要がある．そしてスピンの運動方程式は固有時間 τ[2] による微係数 $da/d\tau$ で定義する必要がある．

この方程式の可能な形は，その右辺が電磁場のテンソル $F^{\mu\nu}$ および4-ベクトル a^{μ} に関して線型で一様でなければならないことと，その他には4-速度 $u^{\mu}=p^{\mu}/m$ だけは含んでもよいことを考慮すれば，相対論的不変性の考察だけで作ることができる．

1）古典的方程式（41.5）は等式

$$\frac{d\boldsymbol{M}}{dt}=[\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{H}]$$

から直接に得られる．ここで $\boldsymbol{M}$ は系の角運動量，$\boldsymbol{\mu}$ はその磁気モーメントである．$[\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{H}]$ は系に働く力のモーメントである．$\boldsymbol{M}=\frac{1}{2}\hbar\boldsymbol{\zeta}$，$\boldsymbol{\mu}=\frac{\mu}{2s}\boldsymbol{\zeta}=\mu\boldsymbol{\zeta}$ と置くと（41.5）を得る．

2）以下ふたたび $c=1$，$\hbar=1$ と仮定する．

$$\frac{da^\mu}{d\tau} = \alpha F^{\mu\nu}a_\nu + \beta u^\mu F^{\nu\lambda}u_\nu a_\lambda \qquad (41.6)$$

の形の方程式だけがこれらの条件を満足している．ここで α，β は定係数である．条件 $a_\mu u^\mu = 0$ およびテンソル $F^{\mu\nu}$ の反対称性（したがって $F^{\mu\nu}u_\mu u_\nu = 0$ である）から，求める形をした別の式は作りえないことが容易にわかる．

$v \to 0$ のとき，この方程式は (41.5) と一致する必要がある．$a^\mu = (0, \boldsymbol{\zeta})$，$u^\mu = (1, 0)$，$\tau = t$ と置いて

$$\frac{d\boldsymbol{\zeta}}{dt} = \alpha[\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{H}]$$

である．(41.5) とくらべて $\alpha = 2\mu$ となる．

β の決定には $a^\mu a_\mu = 0$ を考慮する．この等式を τ で微分し，電場内の電荷の古典運動方程式

$$m\frac{du^\mu}{d\tau} = eF^{\mu\nu}u_\nu$$

（II，§ 23 参照）を使って

$$u_\mu\frac{da^\mu}{d\tau} = -a_\mu\frac{du^\mu}{d\tau} = -a_\mu\frac{e}{m}F^{\mu\nu}u_\nu = \frac{e}{m}F^{\mu\nu}u_\mu a_\nu$$

を得る．したがって，方程式 (41.6) の両辺に u_μ を掛け，等式 $u_\mu u^\mu = 1$ を考慮し，共通因子 $F^{\mu\nu}u_\mu a_\nu$ を約して次式を得る．

$$\beta = -2\left(\mu - \frac{e}{2m}\right) = -2\mu'.$$

このようにして，最終的にスピンの相対論的運動方程式

$$\frac{da^\mu}{d\tau} = 2\mu F^{\mu\nu}a_\nu - 2\mu' u^\mu F^{\nu\lambda}u_\nu a_\lambda \qquad (41.7)$$

を得る (V. Bargman, L. Michel, V. Telegdi, 1959) [1]．

4-ベクトル a から，粒子の≪瞬間的な≫静止系での偏りを直接特長づける量 $\boldsymbol{\zeta}$ に移ろう．a と $\boldsymbol{\zeta}$ とのあいだの関係式は (29.7)～(29.9) の諸公式で与えられる．まず，(41.7) から自動的に $a_\mu da^\mu/d\tau = 0$ が出て，したがって $a_\mu a^\mu = \text{const.}$ が出ることを指摘しよう．$a_\mu a^\mu = -\boldsymbol{\zeta}^2$ であるから，これは当然の結果，すなわち粒子の運動に際しその偏り $\boldsymbol{\zeta}$ はその大きさが不変のままであることを意味している．

---

1) 類似の方程式の他の形は最初に ヤ・イ・フレンケル が見いだした (1926)．

(41.7)で3次元の記法に移って，偏りの方向の変化を定義する方程式を得る．この方程式の空間成分を取り出して

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}=\frac{2\mu m}{\varepsilon}[\boldsymbol{aH}]+\frac{2\mu m}{\varepsilon}(\boldsymbol{av})\boldsymbol{E}-\frac{2\mu'\varepsilon}{m}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{aE})+\frac{2\mu'\varepsilon}{m}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}[\boldsymbol{aH}])+\frac{2\mu'\varepsilon}{m}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{av})(\boldsymbol{vE})$$

を得る．ここで，微分にあたり等式 $\boldsymbol{p}=\varepsilon\boldsymbol{v}$, $\varepsilon^2=\boldsymbol{p}^2+m^2$ および運動方程式

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=e\boldsymbol{E}+e[\boldsymbol{vH}],\quad \frac{d\varepsilon}{dt}=e(\boldsymbol{vE}) \tag{41.8}$$

を考慮して，(29.9)をここに代入しなければならない．かなり長いが初等的な計算の結果つぎの方程式に達する[1]．

$$\frac{d\boldsymbol{\zeta}}{dt}=\frac{2\mu m+2\mu'(\varepsilon-m)}{\varepsilon}[\boldsymbol{\zeta H}]+\frac{2\mu'\varepsilon}{\varepsilon+m}(\boldsymbol{vH})[\boldsymbol{v\zeta}]+\frac{2\mu m+2\mu'\varepsilon}{\varepsilon+m}[\boldsymbol{\zeta}[\boldsymbol{Ev}]]. \tag{41.9}$$

偏りの空間における絶対的方向の変化と同様に，その運動方向に相対的な変化もまた特別に興味がある．$\boldsymbol{\zeta}$ を

$$\boldsymbol{\zeta}=\boldsymbol{n}\zeta_{\parallel}+\boldsymbol{\zeta}_{\perp} \tag{41.10}$$

の形に表わそう（ここで $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{v}/v$ である）．そして偏りの運動方向への投影 $\zeta_{\parallel}$ に対する方程式を書こう．(41.8)，(41.9) を使った計算はつぎの結果へと導く[2]．

$$\frac{d\zeta_{\parallel}}{dt}=2\mu'(\boldsymbol{\zeta}_{\perp}[\boldsymbol{Hn}])+\frac{2}{v}\left(\frac{\mu m^2}{\varepsilon^2}-\mu'\right)(\boldsymbol{\zeta}_{\perp}\boldsymbol{E}). \tag{41.11}$$

得られた方程式の応用例については，この節の問題で考察される．ここでは，ただ純磁場内の運動では，異常磁気モーメントのない粒子の偏りが，速度と一定の角を保つこと ($\zeta_{\parallel}=\mathrm{const}$) を指摘しよう．このようにして，すでに非相対論の場合に示されたこの結果は，実際には一般的性質を持っている．

得られた方程式の適用可能の条件を明確にしよう．粒子の運動量変化が十分緩慢である

1) もしもしばしば行なうように，荷電粒子に対し $\mu=g\frac{e}{2m}\frac{1}{2}\left(=g\frac{e}{2mc}\frac{\hbar}{2}\right)$ にしたがって磁気回転係数(ランデ因子) g を導入すると，この方程式は

$$\frac{d\boldsymbol{\zeta}}{dt}=\frac{e}{2m}\left(g-2+2\frac{m}{\varepsilon}\right)[\boldsymbol{\zeta H}]+\frac{e}{2m}(g-2)\frac{\varepsilon}{\varepsilon+m}(\boldsymbol{vH})[\boldsymbol{v\zeta}]+\frac{e}{2m}\left(g-\frac{2\varepsilon}{\varepsilon+m}\right)[\boldsymbol{\zeta}[\boldsymbol{Ev}]] \tag{41.9a}$$

の形に書かれる．

2) 方程式(41.7)の時間成分を取り出すと，いくぶん簡単にこの方程式を得ることができる．

という始めに触れた要求は，場 $\boldsymbol{E}$ および $\boldsymbol{H}$ の大きさが小さいことの一定の条件に帰してしまう．特に磁場におけるラーモア半径（$\sim p/eH$）は粒子の波長にくらべて大きくなければならない．しかしながら，この他に空間での場の変化があまり急速でないという条件も，厳密に言えば満足しなければならない．すなわち，準古典的な波束の大きさのあいだでは，場の変化がわずかである必要がある．したがって，粒子の波長 $(1/p)$ またはコンプトン波長 $1/m$ の程度の距離では場の変化がわずかである必要がある[1]．

しかし，巨視的な場のなかでの運動の実際的問題では，その変化の緩慢性の条件はもちろん満たされている．したがって，それが十分に小さいことが要求されるだけである．

§33では，外場内を運動する電子のハミルトニアンに対する最初の相対論的補正が見いだされた．電場内の電子に対する近似的ハミルトニアンは（(33.12) 参照)

$$\mathrm{H} = \mathrm{H}' - \frac{e}{4m}\left(\boldsymbol{\sigma}\left[\boldsymbol{E}\frac{\mathbf{p}}{m}\right]\right) \qquad (\mathbf{p} = -i\nabla) \tag{41.12}$$

の形になる．ここで H' にはスピンを含まない項をまとめてある．この場合 H' のなかの場がゆるやかに変化するから，$\boldsymbol{E}$ の微係数（すなわち $\operatorname{div}\boldsymbol{E}$）を持つ項は無視する必要がある．またここでわれわれに興味がある場の影響と関係のない $\mathbf{p}^4$ を持つ小さい項も落とすことができる．したがって，（磁場のないときの）H' は非相対論的ハミルトニアン $\mathrm{H}' = \dfrac{\mathbf{p}^2}{2m} + e\Phi$ になってしまう．

直接ディラック方程式に頼らないでも，方程式 (41.9) から出発して公式 (41.12) を求めることもできる．それにより，異常磁気モーメントを持つ粒子に対しては，（準古典的場合に）その一般化が可能になる．

速度 v について1次の程度の項までの精度で，電場のなかのスピンの運動方程式は (41.9) から

$$\frac{d\boldsymbol{\zeta}}{dt} = (\mu+\mu')\,[\boldsymbol{\zeta}[\boldsymbol{E}\boldsymbol{v}]] = \left(\frac{e}{2m}+2\mu'\right)[\boldsymbol{\zeta}[\boldsymbol{E}\boldsymbol{v}]]$$

の形に求められる．

もしもこの方程式が，（(41.3) にしたがう）スピン演算子とハミルトニアンとの交換を使

---

1)　あとの要求は，静止系では波束のなかの速度のひろがりが c にくらべて小さいという条件から出ている．そうでない場合には，この系では非相対論的公式を使ってはいけない．

もしも場が非常に急激に変化すると，座標による場の微係数を含む付加項の方が方程式のなかで重要になる．

う量子論的方法によって求められるように要求するならば，容易に確かめうるようにつぎのように置く必要がある.

$$\mathrm{H} = \mathrm{H}' - \left(\mu' + \frac{e}{4m}\right)\left(\boldsymbol{\sigma}\left[\boldsymbol{E}\frac{\mathbf{p}}{m}\right]\right). \tag{41.13}$$

これが求める式である. $\mu'=0$ のとき，われわれは (41.12) にもどる. ≪正常≫磁気モーメント $e/2m$ は異常磁気モーメントにくらべて余分な因子 1/2 を伴って現われていることに注目しよう[1].

問　題

1. 一様な磁場に垂直な平面内を運動するとき ($\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{H}$)，粒子の偏りの方向の変化を決定せよ.

解 方程式 (41.9) の右辺では第一項だけが残る. すなわち，ベクトル $\boldsymbol{\zeta}$ は $\boldsymbol{H}$ の方向（z 軸）のまわりを角速度

$$-\frac{2\mu m+2\mu'(\varepsilon-m)}{\varepsilon}\boldsymbol{H} = -\left(\frac{e}{\varepsilon}+2\mu'\right)\boldsymbol{H}$$

で歳差運動をする. この同じ角速度で xy 面内を $\boldsymbol{\zeta}$ のこの面への投影（これを $\boldsymbol{\zeta}_1$ とする）が回転する. ベクトル $\boldsymbol{v}$ は同一の平面内を角速度 $-e\boldsymbol{H}/\varepsilon$（これは運動方程式 $\dot{\boldsymbol{p}}=\varepsilon\dot{\boldsymbol{v}}=e[\boldsymbol{vH}]$ からわかる）で回転する. これから，$\boldsymbol{\zeta}_1$ は $\boldsymbol{v}$ の方向に対して角速度 $-2\mu'\boldsymbol{H}$ で回転することがわかる.

2. 磁場の方向に沿った運動のときに同じことをせよ.

解 $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{H}$ の方向が一致するとき方程式 (41.9) は

$$\frac{d\boldsymbol{\zeta}}{dt} = \frac{2\mu m}{\varepsilon}[\boldsymbol{\zeta H}]$$

の形になる. すなわち，$\boldsymbol{\zeta}$ は $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{H}$ の共通の方向のまわりを角速度 $-2\mu m\boldsymbol{H}/\varepsilon$ で歳差運動をする.

3. 一様な電場内の運動で同じことをせよ.

解 電場 $\boldsymbol{E}$ が x 軸方向を向いているとし，運動が xy 面内で起こるとする（このとき $p_y=\mathrm{const}$），(41.9) からベクトル $\boldsymbol{\zeta}$ が z 軸のまわりを瞬間角速度

---

1) これは 144 頁の脚注で触れた≪トーマスの 1/2 因子≫である. ここで述べられた導き方はその由来をはっきり示している.

$$-\left(\frac{e}{\varepsilon+m}+2\mu'\right)E\frac{p_y}{\varepsilon}$$

で歳差運動をすることがわかる.

ふたたび $\boldsymbol{\zeta}$ を成分 ζ_z と,（xy 面内の）$\boldsymbol{\zeta}_1$ とに分解する. このとき

$$\zeta_{\|}=\zeta_1\cos\varphi,\quad \boldsymbol{\zeta}_{\perp}\boldsymbol{E}=-\zeta_1\sin\varphi\cdot\frac{v_y}{v}$$

となる. (41.11) から $\boldsymbol{\zeta}_1$ は速度 $\boldsymbol{v}$ に対して瞬間角速度

$$\dot{\varphi}=\frac{2v_y}{v^2}\left(\frac{\mu m^2}{\varepsilon^2}-\mu'\right)=\frac{p_y}{\varepsilon}\left(\frac{em}{p^2}-2\mu'\right)$$

で回転していることがわかる.

§42. 電場内の中性子散乱

中性子が原子核と衝突するとき, 大きい角度の散乱は主要な相互作用, すなわち核力により決定される. 小さい角度の散乱には, あとで見るように, 中性子の磁気モーメントと原子核の電場との相互作用が重要になる (J. Schwinger, 1948).

中性子は非相対論的としよう. したがって, 考慮される相互作用は近似的なハミルトニアン (41.13) で記述される. 中性粒子の磁気モーメントはすべて≪異常≫である. そしてこの場合の演算子 H′ は運動エネルギーの演算子になってしまう[1].

$$\mathrm{H}=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta+i\frac{\mu\hbar}{mc}\boldsymbol{\sigma}[\boldsymbol{E}\nabla]. \tag{42.1}$$

中性子の電磁的相互作用が小さいために, それにより起こされる散乱の振幅 $f_{電磁}$ はボルン近似で計算される.

$$f_{電磁}=-\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int e^{-i\boldsymbol{p}'\boldsymbol{r}/\hbar}\left(i\frac{\mu\hbar}{mc}\boldsymbol{\sigma}[\boldsymbol{E}\nabla]\right)e^{i\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}/\hbar}d^3x$$

（III, §125 参照）. あるいは

$$f_{電磁}=\frac{\mu}{2\pi c\hbar^2}\boldsymbol{\sigma}[\boldsymbol{E}_q\boldsymbol{p}],\quad \boldsymbol{E}_q=\int\boldsymbol{E}(r)e^{-i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}}d^3x \tag{42.2}$$

となる（$\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'$ は中性子の散乱前後の運動量であり, $\hbar\boldsymbol{q}=\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p}$ である）. 上記の形では振幅 $f_{電磁}$ はスピン変数に関する演算子である.

---

1) この節では普通の単位が使われる. しかし m という文字は中性子の質量を意味する.

この先の計算にかかる前につぎのような注意をしよう．公式 (42.1) は §41 で，ゆっくり変化する場に対して導かれた（これは事実上ハミルトニアンのなかで，場の座標による微係数を含む項を無視することを意味した）．原子核のクーロン場に適用すると，これは積分 $\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{q}}$ のなかで重要な距離 $r \sim 1/q$ にくらべて，波長 $\hbar/p$ が小さいことを意味している．ここから $\hbar q \ll p$ となり，したがって散乱角は $\theta \sim \hbar q/p \ll 1$ である．このようにして，要求される条件は小さい角の散乱に対しても同様に満足されている．

ポテンシャル $\Phi = Ze/r$ のクーロン場に対する電場のフーリエ成分は

$$\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{q}} = -i\boldsymbol{q}\Phi_{\boldsymbol{q}} = -i\boldsymbol{q}\frac{4\pi Ze}{q^2}$$

である（II (51.5) 参照）．(42.2) に代入して

$$\mathrm{f}_{\text{電磁}} = i\frac{2Ze\mu}{q^2 c\hbar^3}(\boldsymbol{\sigma}[\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}']).$$

小さい散乱角のときは $\hbar q \approx p\theta$, $[\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}'] \approx p^2\theta\boldsymbol{\nu}$ である．ここで $\boldsymbol{\nu}$ は $[\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}']$ の方向の単位ベクトルである．このようにして

$$\mathrm{f}_{\text{電磁}} = i\frac{2Ze\mu}{\theta\hbar c}\boldsymbol{\sigma\nu}.$$

この式に核による散乱振幅を付け加えなければならない．核力が距離とともに急激に消滅するので，この振幅は小さい角のとき（エネルギーに依存する）有限の複素数値に近づく．この値を a としよう．したがって，全散乱振幅は

$$\mathrm{f} = a + i\frac{b}{\theta}\boldsymbol{\sigma\nu}, \quad b = \frac{2Ze\mu}{c\hbar} = 2Z\alpha\frac{\mu}{e} \tag{42.3}$$

となる．われわれは，実際には電磁的散乱が十分に小さい角度のときに優勢になることを見るだろう．

(42.3) の式の形は III, §138 で考察されたものと一致する．したがって，そこで導かれた公式をただちに利用することができる．すべての可能な終りの偏りについて加えられた散乱断面積は

$$\frac{d\sigma}{do} = |a|^2 + \frac{b^2}{\theta^2} + 2b\,\mathrm{Im}\,a\cdot\boldsymbol{\nu\zeta}. \tag{42.4}$$

ここで $\boldsymbol{\zeta}$ は中性子束の始めの偏りである (III, §138 の $\boldsymbol{P}$)．もしも始めの状態が偏っていないならば ($\boldsymbol{\zeta} = 0$)，散乱後の偏りは

$$\boldsymbol{\zeta}' = \frac{2b\,\mathrm{Im}\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\theta}}{|\boldsymbol{a}|^2\theta^2+b^2}\boldsymbol{\nu}. \tag{42.5}$$

この偏りは $\theta = b/|a|$ のときに極大になり，$\zeta'_{\mathrm{max}} = \mathrm{Im}\,a/|a|$ である．

第5章 輻　　射

§43. 電磁相互作用の演算子

電子と電磁場の相互作用は原則として摂動論を使って考察することができる．この事情は電磁的相互作用が比較的小さいことと関連している．このことは，次元のない≪結合定数≫，すなわち微細構造定数 $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$ の小さいことに表わされ，これが量子電磁力学で基本的役割を果たしている．

古典電磁力学（II，§28 参照）では，電磁的相互作用は≪場＋電荷≫系のラグランジァン密度のなかの項

$$-ej^{\mu}A_{\mu} \tag{43.1}$$

によって記述される（A は場の4-ポテンシャルで，j は粒子の電流密度の4-ベクトルである）．この際電流密度は電荷の保存則を表わす連続方程式

$$\partial_{\mu}j^{\mu} = 0 \tag{43.2}$$

を満足する．理論のゲージ不変性がこの法則と深く結びついていることを思い起こそう（II，§29 参照）．実際に，置換 $A_{\mu} \longrightarrow A_{\mu} + \partial_{\mu}\chi$ (4.1) の際に，ラグランジァン密度 (43.1) には量 $-ej^{\mu}\partial_{\mu}\chi$ が付加される．この量は (43.2) のために4-発散

$$-e\partial_{\mu}(\chi j^{\mu})$$

の形に書くことができ，したがって作用 $S = \int L d^4x$ のなかの d^4x による積分の際に 0 になる．

量子電磁力学では，4-ベクトル j および A は対応する第二量子化された演算子に変えられる．この際，電流演算子は ψ-演算子を使って，$\mathrm{j} = \bar{\psi}\gamma\psi$ によって表わされる．ラグランジァンは

$$\int L_{相互}\, d^3x = -e\int (\mathrm{jA})\, d^3x$$

で，一般化された《座標》q の役割は，空間の各点での $\bar{\psi}$, ψ, A の値が演ずることになる．したがって，その密度は《座標》q 自身のみに依存する（その x による微係数には依存しない）ので，公式 (10.11) によってハミルトニアン密度への移行は，ただラグランジアン密度[1]の符号を変えることによって達せられる．このようにして，電磁相互作用の演算子（相互作用のハミルトニアン密度の空間積分）はつぎの形を持つ．

$$\mathrm{V} = e\int(\mathrm{jA})\,d^3x\,. \tag{43.3}$$

自由電磁場の演算子は，（添字 n で番号付けられている）種々の状態の光子の，生成および消滅の演算子を含む和

$$\mathrm{A} = \sum_n[\mathrm{c}_n A_n(x) + \mathrm{c}_n^+ A_n^*(x)] \tag{43.4}$$

となる．これらの演算子のおのおのは，（他の占有数は不変のまま）対応する占有数 N_n を一つだけの増減に対する行列要素を持つ．したがって，演算子 A は光子数を1個変えるような遷移に対する行列要素を持つ．言いかえれば，摂動論の1次近似では光子の1回の輻射あるいは吸収の過程だけが起こる．

(2.15) にしたがって行列要素は

$$\langle N_n-1|\mathrm{c}_n|N_n\rangle = \langle N_n|\mathrm{c}_n^+|N_n-1\rangle = \sqrt{N_n} \tag{43.5}$$

である．もしも,（n と名付けられる）始状態に光子がないとすると，$\langle 1|\mathrm{c}_n^+|0\rangle = 1$ である．光の放出に対する演算子 (43.3) の行列要素は

$$V_{fi}(t) = e\int(j_{fi}A_n^*)\,d^3x \tag{43.6}$$

である．ここで $A_n(x)$ は輻射される光の波動関数で，j_{fi} は輻射体の始状態 i から終状態 f への遷移に対する，演算子 j の行列要素である[2]．4-ベクトル $j_{fi}^{\mu} = (\rho_{fi}, \boldsymbol{j}_{fi})$ は**遷移電流**と呼ばれる．

同様にして光子の吸収に対する行列要素

---

1)　これらの考察と独立に，1次の微少量の補正について語るならば，ラグランジアンへのすべての小さい補正は，その符号を変えるだけでハミルトニアンに移される（I，§40 参照）．

2)　(43.6)のなかの記号は多少首尾一貫性を欠いている．すなわち，V_{fi} の添字は全系《輻射体＋場》の状態に関するもので，j_{fi} の添字は輻射体のみの状態に関するものである．

$$V_{fi}(t) = e\int(j_{fi}A_n)d^3x \tag{43.7}$$

を得る．これは，$A_n^*(x)$ の代りに $A_n(x)$ が現われる点だけが (43.6) と異なっている．

V_{fi} に引数 t を明示することによって，われわれは時間に依存する行列要素について述べていることを強調しよう．波動関数の時間因子を分離して，普通のように，時間に依存しない行列要素に移ろう．すなわち

$$V_{fi}(t) = V_{fi}\,e^{-i(E_i-E_f\mp\omega)t} \tag{43.8}$$

となる (E_i, E_f は輻射系の始めおよび終りのエネルギーである．$\mp\omega$ は光子 ω の放出および吸収に対応する)．

一定の運動量 $\boldsymbol{k}$ および偏りを持つ光子の波動関数は

$$A^\mu = \sqrt{4\pi}\frac{e^\mu}{\sqrt{2\omega}}e^{i\boldsymbol{kr}} \tag{43.9}$$

である ((4.3) 参照．時間因子は落としてある)．(43.6) に代入して，このような光子の放出に対する行列要素が

$$V_{fi} = e\sqrt{4\pi}\frac{1}{\sqrt{2\omega}}e_\mu^* j_{fi}^\mu(\boldsymbol{k}) \tag{43.10}$$

の形になる．ここで，$\boldsymbol{j}_{fi}(\boldsymbol{k})$ は運動量表示での遷移電流，すなわち，フーリエ成分

$$j_{fi}(\boldsymbol{k}) = \int j_{fi}(\boldsymbol{r})\,e^{-i\boldsymbol{kr}}d^3x \tag{43.11}$$

である．光子の吸収に対しても，同様な公式が成り立つ．

$$V_{fi} = e\sqrt{4\pi}\frac{1}{\sqrt{2\omega}}e_\mu j_{fi}^\mu(-\boldsymbol{k}). \tag{43.12}$$

運動量表示での電流保存の方程式は，遷移電流の 4-横波の条件の形に書かれる．

$$k_\mu j_{fi}^\mu = \omega\rho_{fi}(\boldsymbol{k}) - \boldsymbol{k}\boldsymbol{j}_{fi}(\boldsymbol{k}) = 0. \tag{43.13}$$

電流演算子の形は必ず，この節に書かれた公式になるはずのものではない．しかしこの公式は一般性を持ち，任意の荷電粒子の加わる電磁的過程に対して正しいものである．現存の理論は，電子に対してのみ電流演算子の形を確立する（それによりその行列要素を計算する）可能性を与える．強い相互作用の系（そのなかには原子核も含む）への適用の際には，半現象論に限った方がつごうがよい．そこでは，遷移電流は経験から作った量となり，時空対称性の一般要求と連続方程式のみを満足する．

§44. 放出と吸収

摂動 V の影響による遷移確率は，1次近似では摂動論（III,§42）でよく知られた公式で与えられる．輻射系の始および終状態が離散スペクトルであるとしよう[1]．このとき光子を放出する，$i\to f$ の遷移の（1秒あたりの）確率は

$$dw = 2\pi|V_{fi}|^2\delta(E_i-E_f-\omega)d\nu \tag{44.1}$$

である．ここで $d\nu$ は光子の状態を特長づけ，連続値をとる量の全体を表わすものとする（このときは，光子の波動関数は ≪ ν の尺度で≫ 規格化された δ-関数であると仮定される）．

もしも一定の運動量の大きさの光子が放出されるならば，唯一の連続量は振動数 ω である．公式（44.1）の $d\nu\equiv d\omega$ での積分は（ω を一定値 E_i-E_f で置き換え），δ-関数を落とす．そして遷移確率はつぎのようになる．

$$w = 2\pi|V_{fi}|^2. \tag{44.2}$$

もしも一定運動量 $\boldsymbol{k}$ を持つ光子の放出が考察されるならば，$d\nu\equiv d^3k=\omega^2d\omega do$ である．このとき公式（44.1）で，光子の波動関数は $\delta(\boldsymbol{k})$ に規格化されると考えられる．しかしながら，この本ではすべての平面波を≪単位体積あたり1粒子≫で規格化した．この規格化は $\delta(\boldsymbol{k})$ の規格化とは，因子 $(2\pi)^{-3/2}$ が落ちることが異なる．したがって，光子の平面波のこの規格化では，一定運動量を持つ光子の放出確率は，つぎのように表わされ[2]

$$dw = 2\pi|V_{fi}|^2\delta(E_i-E_f-\omega)\frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \tag{44.3}$$

$d\omega$ について積分すれば

$$dw = \frac{1}{4\pi^2}|V_{fi}|^2\omega^2 do \tag{44.4}$$

となる．ここに（43.10）から行列要素 V_{fi} を代入する必要がある．

次節では，いろいろな具体的な場合での輻射確率の計算にこの公式を利用しよう．ここでわれわれは，輻射過程の種々の形態のあいだにある一般的関係を考察しよう．

1）それにより，あらゆる場合に反跳を無視すると考える．すなわち，輻射体は完全に動かないままでいるわけである．

2）このような書き方は，（44.1）で≪体積 $V=1$ に1個の光子≫での規格化の際に，$d\nu=d^3k$ の代りに位相空間の体積 Vd^3k にある状態の数を書く必要があり，それは $d^3k/(2\pi)^3$ に等しい．

もしも場の始状態に，与えられた光子が0と異なる数だけ存在すれば，遷移の行列要素は，さらに

$$\langle N_n+1|c_n^+|N_n\rangle = \sqrt{N_n+1} \tag{44.5}$$

が掛けられる．すなわち，遷移確率は N_n+1 倍される．この因子中の1は，$N_n=0$ のときに起こる自発放出に対応する．N_n の項は**強制**（あるいは**誘導**）放出を与える．すなわち，場の始状態に光子が存在することは，同じ光子の付加的な放出を刺激する．

系の状態を逆に変える（$f\to i$）遷移の行列要素 V_{if} は，つぎの点が要素 V_{fi} と異なる．すなわち，(44.5) を

$$\langle N_n-1|c_n|N_n\rangle = \sqrt{N_n}$$

で置き換える（他の量はその複素共役に置き換える）．この逆遷移は，準位 E_f から準位 E_i に移る系による光子の吸収である．したがって光子の放出と吸収の確率のあいだには（状態 i, f の対が与えられたとき）

$$\frac{w_{放}}{w_{吸}} = \frac{N_n+1}{N_n} \tag{44.6}$$

の関係が成り立つ[1]（これは，最初に A. Einstein により1916年に示された）．

光子数を，外から輻射系に入射する強度と結びつけよう．

$$I_{ke}\,d\omega\,do \tag{44.7}$$

が，1秒間に $1\,\mathrm{cm}^2$ の面積に入射し，偏り e を持ち，振動数が $d\omega$ の領域にあり，波動ベクトルが立体角要素 do の領域に入る輻射エネルギーとしよう．この領域は場の振動子の $k^2dk\,do/(2\pi)^3$ に対応する．このおのおのには N_{ke} 個の与えられた偏りの光子が対応する．したがって

$$c\frac{k^2dk\,do}{(2\pi)^3}N_{ke}\cdot\hbar\omega = \frac{\hbar\omega^3}{8\pi^3c^2}N_{ke}\,d\omega\,do$$

の積を作ると，そのエネルギー (44.7) を得る．これから求める関係式が得られる．

$$N_{ke} = \frac{8\pi^3c^2}{\hbar\omega^3}I_{ke}. \tag{44.8}$$

$dw_{ke}^{(自)}$ を偏り e を持った光子の立体角 do 内への自発輻射の確率であるとしよう．添

---

1) 以下この節では普通の単位が用いられる．

字の（誘）および（吸）は誘導放出および吸収に対する類似の確率である．(44.6) および (44.8)にしたがって，この確率はそれらのあいだのつぎのような関係式で結ばれている．

$$dw_{ke}^{(\text{吸})} = dw_{ke}^{(\text{誘})} = dw_{ke}^{(\text{自})}\frac{8\pi^3 c^2}{\hbar\omega^3}I_{ke}. \tag{44.9}$$

もしも入射する輻射が等方で偏っていない（I_{ke} が k および e の方向に依存しない）とすれば，(44.9) の do での積分と e による和は，輻射遷移（系の与えられた状態 i および f のあいだの）の全確率のあいだの類似の関係式を与える．

$$w^{(\text{吸})} = w^{(\text{誘})} = w^{(\text{自})}\frac{\pi^2 c^2}{\hbar\omega^3}I. \tag{44.10}$$

ここで $I = 2\cdot 4\pi I_{ke}$ は入射する輻射の全スペクトル強度である．

もしも輻射（あるいは吸収）系の i および f 状態が縮退していれば，与えられた光子の輻射（あるいは吸収）の全確率は，互いに縮退している全終状態について加え，可能な全始状態について平均することによって得られる．i および f 状態の縮退の因子（統計的重み）を g_i および g_f としよう．どちらの場合にも，g_i 個の始状態，あるいは g_f 個の始状態が全部同等であると仮定すれば，明らかに (44.10) の代りにつぎの関係式[1]を得る．

$$g_f w^{(\text{吸})} = g_i w^{(\text{誘})} = g_i w^{(\text{自})}\frac{\pi^2 c^2}{\hbar\omega^3}I. \tag{44.11}$$

§45. 2重極輻射

外場内を運動する（一般的には相対論的）電子による光の放出に，得られた公式を適用しよう．この場合遷移電流は，演算子

$$\mathbf{j} = \bar{\psi}\boldsymbol{\gamma}\psi$$

の行列要素である．ここで ψ-演算子は与えられた場のなかの電子の定常状態の波動関数系 (§32) で展開されるものと仮定する．電子の状態 i から状態 f への遷移は，行列要素 $\langle 0_i 1_f|\mathbf{j}|1_i 0_f\rangle$ に対応する．占有数のこのような変化は演算子 $a_f^+ a_i$ により実現され，遷

1) 文献ではしばしば $A_{if} = w^{(\text{自})}$, $B_{if} = w^{(\text{誘})}c/I$, $B_{fi} = w^{(\text{吸})}c/I$ で定義されるいわゆる**アインシュタイン係数**を用いている（I/c という量は輻射エネルギーのスペクトル空間密度である）．これらは互いに関係式

$$g_f B_{fi} = g_i B_{if} = g_i A_{if}\frac{\pi^2 c^3}{\hbar\omega^3} \tag{44.11 a}$$

で結ばれている．

移電流に対し

$$j^{\mu}_{fi} = \bar{\psi}_f \gamma^{\mu} \psi_i = (\psi^*_f \psi_i,\ \psi^*_f \boldsymbol{\alpha} \psi_i) \tag{45.1}$$

を得る．ここで，ψ_i および ψ_f は電子の始および終状態の波動関数である．

光子の波動関数を3次元横波ゲージ（偏りの4-ベクトルは $e=(0,\boldsymbol{e})$ になる）に選ぼう．このとき (43.10) のなかの積は $j_{fi}e^* = -\boldsymbol{j}_{fi}\boldsymbol{e}^*$ となる．V_{fi} を (44.4) に代入して，偏り $\boldsymbol{e}$ を持つ光子の立体角要素 do 内の（1秒間の）輻射確率に対し，つぎのような公式を得る．

$$dw_{\boldsymbol{en}} = e^2 \frac{\omega}{2\pi} |\boldsymbol{e}^* \boldsymbol{j}_{fi}(\boldsymbol{k})|^2 do. \tag{45.2}$$

ここで

$$\boldsymbol{j}_{fi}(\boldsymbol{k}) = \int \psi^*_f \boldsymbol{\alpha} \psi_i \cdot e^{-i\boldsymbol{kr}} d^3x. \tag{45.3}$$

光子の偏りについての和は，（与えられた方向 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{k}/\omega$ に垂直な平面内での）$\boldsymbol{e}$ の方向について平均し，その後，その結果を2倍することにより実現される．この2倍は，光子の横方向の偏りの二つの独立な可能性に対応している[1]．このようにしてつぎの公式が得られる．

$$dw_{\boldsymbol{n}} = e^2 \frac{\omega}{2\pi} |[\boldsymbol{n} \boldsymbol{j}_{fi}(\boldsymbol{k})]|^2 do. \tag{45.4}$$

波長 λ が輻射系 a の大きさにくらべて大きい場合が非常に重要である．普通，このような事情は，光速にくらべて粒子の速度が小さいことと関連している．a/λ についての1次近似で（2重極輻射に対応する．II，§64 と比較せよ），遷移電流 (45.3) のなかで，ψ_i または ψ_f が0といちじるしく異なる領域では，わずかしか変わらない因子 $e^{-i\boldsymbol{kr}}$ を1に置き換えることができる．言いかえれば，このような置き換えは，光子の運動量を系内の粒子の運動量と比較し無視することを意味している．

この近似で積分 $\boldsymbol{j}_{fi}(0)$ は，その非相対論的な式，すなわちシュレーディンガー波動関

---

1) 平均には公式

$$\overline{e_i e^*_k} = \frac{1}{2}(\delta_{ik} - n_i n_k),$$

あるいは

$$\overline{(\boldsymbol{ae})(\boldsymbol{be}^*)} = \frac{1}{2}\left\{\boldsymbol{ab} - (\boldsymbol{an})(\boldsymbol{bn})\right\} = \frac{1}{2}[\boldsymbol{an}][\boldsymbol{bn}]$$

が使われる，ここで $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は定ベクトルである（II (78.6) と比較せよ）．

数に関する電子の速度の行列要素 v_{fi} に置き換えることができる．つぎにこの要素は $v_{fi}=-i\omega r_{fi}$ であり，$er_{fi}=d_{fi}$ である．ここで d は電子の（軌道運動の）2重極モーメントである．このようにして2重極輻射の確率に対して，つぎのような公式を得る．

$$dw_{en}=\frac{\omega^3}{2\pi}|e^*d_{fi}|^2\,do \tag{45.5}$$

（ここで方向 n はあらわでない形で現われる．すなわち，ベクトル e は n に垂直になる必要がある）．偏りについて加えれば

$$dw_n=\frac{\omega^3}{2\pi}|[nd_{fi}]|^2\,do. \tag{45.6}$$

この公式の（電子に関する）非相対論的性質のために，任意の電子系に対する一般化は，明らかに，d_{fi} を系の全2重極モーメントの行列要素と考えればよいわけである．

公式 (45.6) を全方向で積分して，輻射の全確率が求められる．

$$w=\frac{4\omega^3}{3}|d_{fi}|^2. \tag{45.7}$$

あるいは普通の単位で

$$w=\frac{4\omega^3}{3\hbar c^3}|d_{fi}|^2. \tag{45.7 a}$$

輻射強度 I は確率に $\hbar\omega$ を掛けて得られる．

$$I=\frac{4\omega^4}{3c^3}|d_{fi}|^2. \tag{45.8}$$

この公式は，週期運動をする粒子の系の2重極輻射に対する古典式（II (67.11) 参照）との直接の類似性を示している．すなわち，振動数 $\omega_s=s\omega$（ここで ω は粒子の運動の振動数，s は整数である）の輻射強度は

$$I_s=\frac{4\omega_s^4}{3c^3}|d_s|^2 \tag{45.9}$$

に等しい．ここで d_s は2重極モーメントのフーリエ成分，すなわち展開

$$d(t)=\sum_{s=-\infty}^{\infty}d_s e^{-is\omega t} \tag{45.10}$$

の係数である．量子論の公式 (45.8) は (45.9) から，そのフーリエ係数を対応する遷移の行列要素で置き換えることによって得られる．この規則（ボーアの**対応原理**を表わしている）は古典量のフーリエ成分と，準古典的な場合の量子論における行列要素の一般的対応の特別な場合である（III，§48 参照）．大きい量子数の状態間の遷移に対しては，輻射は準

古典的である．この際，遷移の振動数 $\hbar\omega = E_i - E_f$ は輻射体のエネルギー E_i および E_f にくらべて小さい．しかしながら，この事情は任意の遷移に対して成立する公式 (45.8) に形の変更をもたらすものではない．これによって，輻射強度に対する対応原理が，準古典的な場合だけでなく一般の量子論的な場合にも正しいという事実が，（ある意味では偶然に）明らかになる．

§46. 電気的多重極輻射

与えられた方向（すなわち，与えられた運動量）を持つ光子の輻射を考察する代りに，今度は角運動量 j および適当に選ばれた z 方向へのその投影 m の値が一定の光子の輻射を考察しよう．われわれは§6でこのような光子に二つの型，すなわち電気型と磁気型があることを見てきた．そこで電気型の光子の輻射から始めよう．この際，ふたたび輻射系の大きさが波長にくらべて小さいと考えよう．

光子の運動量表示の波動関数を使って計算するのが，すなわち，4-ベクトル $A^\mu(\boldsymbol{r})$ はフーリエ積分の形に表わすのが便利である．このとき，行列要素は

$$V_{fi} = e\int j^\mu_{fi}(\boldsymbol{r})\,A^*_\mu(\boldsymbol{r})\,d^3x = e\int d^3x\cdot j^\mu_{fi}(\boldsymbol{r})\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}A^*_\mu(\boldsymbol{k})\,e^{-i\boldsymbol{kr}} \qquad (46.1)$$

となる（式を簡単に書くために，光子の波動関数の添字 ωjm は省いた）．

Ej-光子に対し (7.10) の波動関数をとろう．このとき，任意定数 C は

$$C = -\sqrt{\frac{j+1}{j}}$$

に等しいように選ぶ．このような C の選択の目的は，波動関数の空間成分 ($\boldsymbol{A}$) で $(j-1)$-次の球関数を含む項が落ちるように（これは公式 (7.16) からわかる）するためである．このとき $\boldsymbol{A}$ は $j+1$ 次の球関数だけを含み，その結果，V_{fi} におけるその寄与は（以下の計算で明らかになる様に），j 次の球関数だけを含んでいる成分 $A^0 \equiv \Phi$ からの寄与にくらべて（a/λ について）高次になる．

このようにして

$$A^\mu = (\Phi, 0), \quad \Phi = -\sqrt{\frac{j+1}{j}}\frac{4\pi^2}{\omega^{3/2}}\delta(|\boldsymbol{k}|-\omega)\,Y_{jm}(\boldsymbol{n})$$

$(\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}/\omega)$．この式を (46.1) に代入して $d|\boldsymbol{k}|$ で積分を行ない次式を得る．

$$V_{fi} = -e\sqrt{\frac{j+1}{j}}\frac{\sqrt{\omega}}{2\pi}\int d^3x\cdot\rho_{fi}(\boldsymbol{r})\int do_{\boldsymbol{n}}\,e^{-i\boldsymbol{kr}}\,Y^*_{jm}(\boldsymbol{n})\,. \qquad (46.2)$$

内側の積分を行なうために，展開 (24.12) を

$$e^{ikr} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} i^l g_l(kr)\, Y_{lm}^*\left(\frac{\boldsymbol{k}}{k}\right) Y_{lm}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) \tag{46.3}$$

の形に書いて利用する．ここで

$$g_l(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{l+1/2}(kr) \tag{46.4}$$

である[1]．この展開を (46.2) に代入して

$$\int e^{-ikr} Y_{jm}^*(\boldsymbol{n})\, do_{\boldsymbol{n}} = 4\pi i^{-j} g_j(kr)\, Y_{jm}^*\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)$$

を得る（残りの項は球関数の直交性により 0 になる）．条件 $a/\lambda \ll 1$ のために，d^3x の積分で $kr \ll 1$ であるような距離だけが効いてくる．したがって，関数 $g_j(kr)$ をその kr による展開[2]の第1項で置き換えることができる．すなわち

$$g_j(kr) \approx \frac{(kr)^j}{(2j+1)!!}. \tag{46.5}$$

その結果

$$V_{fi} = (-1)^{m+1} i^j \sqrt{\frac{(2j+1)(j+1)}{\pi j}}\, \frac{\omega^{j+1/2}}{(2j+1)!!}\, e(Q_{j,-m}^{(\text{電})})_{fi} \tag{46.6}$$

を得る．ここで量

$$(Q_{jm}^{(\text{電})})_{fi} = \sqrt{\frac{4\pi}{2j+1}} \int \rho_{fi}(\boldsymbol{r})\, r^j Y_{jm}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) d^3x \tag{46.7}$$

を導入した（$Y_{j,-m} = (-1)^{j-m} Y_{jm}^*$ であることを思い起こそう）．量 (46.7) を対応する

---

1) 関数 $g_l(kr)$ は積 kr にのみ依存する．それにより，この公式がベクトル $\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{r}$ に関して対称であることが明らかである．二つの球関数のどちらに複素共役の記号をつけても違いはない．

関数 g_l の規格化は，$kr \to \infty$ のときのその漸近形が

$$g_l(kr) \approx \frac{\sin\left(kr - \frac{\pi l}{2}\right)}{kr} \tag{46.4 a}$$

になるようにする．

2) kr の乗冪の数は，g_j のなかにそれとの積として現われる関数 Y_{jm} の次数と一致する．それによって，$\boldsymbol{A}$ のなかで高次の球関数を含む項を無視することの正当性が与えられる．

古典量（II, §41）の類似から，系の**遷移の 2^j-重極モーメント**と呼ぶ[1].

外場内の電子に対しては $\rho_{fi}=\psi_f^*\psi_i$ である．このとき量 (46.7) は古典量

$$Q_{jm}^{(電)}=\sqrt{\frac{4\pi}{2j+1}}\,r^j Y_{jm}$$

の行列要素として計算される．

（粒子の速度について）非相対論的な場合の遷移のモーメントを，原理的には，N 個の相互作用をする粒子の任意の系に対しても，同様に計算することができる．この際，遷移の密度は系の波動関数を使って

$$\rho_{fi}(\boldsymbol{r})=\int\psi_f^*(\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_N)\,\psi_i(\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_N)\sum_{n=1}^{N}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n)\cdot d^3x_1\cdots dx_N \qquad (46.8)$$

の形に表わされる．ここで積分は配位空間全体について行なわれる[2].

われわれが使用した光子の波動関数は（座標表示で），公式 (44.2) で仮定されたように δ-関数の ω の尺度での規格化に対応している．(46.6) をそれに代入して，Ej-輻射の確率を得る[3].

$$w_{jm}^{(電)}=\frac{2(2j+1)(j+1)}{j[(2j+1)!!]^2}\,\omega^{2j+1}e^2|(Q_{j,-m}^{(電)})_{fi}|^2. \qquad (46.9)$$

特に $j=1$ のときは

$$w_{1m}^{(電)}=\frac{4\omega^3}{3}e^2|(Q_{1,-m}^{(電)})_{fi}|^2. \qquad (46.10)$$

$Q_{1m}^{(電)}$ という量は公式

$$eQ_{10}^{(電)}=id_z,\quad eQ_{1,\pm1}^{(電)}=\mp\frac{i}{\sqrt{2}}(d_x\pm id_y) \qquad (46.11)$$

---

1) 本書では，電流が電荷の因子なしに定義されているのに対応して，多重極モーメントも因子 e なしに定義しよう．

2) 系のなかの電子の速度が小さいという仮定は，系の波動関数を使った記述の可能性からなされている．この意味で原理的な性質ではない．

電子のスピン軌道相互作用を無視したときに成立する近似的な選択則のために，遷移確率が 0 になるような事情も起こりうる．このような場合，0 と異なる結果を得るためには，この相互作用を考慮に入れた相対論的補正を持つ波動関数を使う必要がある．

3) 一見すると，空間対称性のために光子放出の全確率は m の値に依存してはならないことを示せるように思えるであろう．これがそうでないことは，もしも異なる値の m を持つ光子の放出には，（始状態が与えられたとき）系の終状態を異にしなければならないことに気がつけば，容易に理解されるであろう．公式 (46.16) とくらべよ．

により，電気的2重極モーメントのベクトル成分と結びつけられる．(46.10) を m の値について加えて，当然のことながら，2重極輻射の全確率に対するよく知られた式 (45.7) を得る．

多重極輻射の角分布は公式 (7.11) で与えられる．これを放出の全確率で規格化すると

$$dw_{jm}=|Y_{jm}^{(\text{電})}(\boldsymbol{n})|^2 w_{jm}\,do=\frac{w_{jm}}{j(j+1)}|\boldsymbol{n}\nabla\ Y_{jm}|^2 do \tag{46.12}$$

となる．特に $j=1$ に対しては

$$Y_{10}=i\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta,\quad Y_{1,\pm1}=\mp i\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\cdot e^{\pm i\varphi}$$

である．ここで θ, φ は z 軸に対する方向 $\boldsymbol{n}$ の天頂角と方位角である．勾配を計算し，m の一定値を持つ2重極輻射の角分布が，式

$$dw_{10}=w_{10}\frac{3}{8\pi}\sin^2\theta\,do,\quad dw_{1,\pm1}=w_{1,\pm1}\frac{3}{8\pi}\frac{1+\cos^2\theta}{2}do \tag{46.13}$$

で与えられることがわかる．これはもちろん公式 (45.6) から，一つは ($m=0$ に対し) $d_x=d_y=0$, $d_z=d$ と置き，他は ($m=\pm1$ に対し) $d_y=\mp id_x=d/\sqrt{2}$, $d_z=0$ と置いて求めることができる．

系（原子あるいは原子核）の大きさの程度を a とすれば，一般的にいって電気的多重極モーメントという量の大きさの程度は $Q_{jm}^{(\text{電})}\sim a^j$ で，多重極輻射の確率は

$$w_{jm}^{(\text{電})}\sim\alpha k(ka)^{2j} \tag{46.14}$$

である．多重度が一つ増すと輻射確率は $\sim(ka)^2$ の比で小さくなる．

角運動量および偶奇性の保存則は，輻射系の状態の可能な変化を制限するような一定の選択則へと導く．もしも系の始めの角運動量が J_i に等しいとすれば，角運動量 j を持つ光子を輻射したのち，系の角運動量は，角運動量の合成則 ($\boldsymbol{J}_i-\boldsymbol{J}_f=\boldsymbol{j}$)，すなわち

$$|J_i-J_f|\leqslant j\leqslant J_i+J_f \tag{46.15}$$

で決められる J_f の値だけをとる．

J_i および J_f の値が与えられたとき，同じ法則 (46.15) によって光子の角運動量 j の可能な値が決定される．しかし輻射確率は j の増大によって急速に減少するので，輻射は主として可能な最小の多重度で起こる．

角運動量 $\boldsymbol{J}_i$ および $\boldsymbol{J}_f$ の投影 M_i および M_f は，光子の角運動量の投影 m とともに，(同じ角運動量の合成則から) 明らかなつぎの規則を満足する．

$$M_i - M_f = m. \tag{46.16}$$

輻射系の始および終状態の偶奇性は，$P_光$を輻射される光子の偶奇性として，$P_f P_光 = P_i$ の条件を満足する．偶奇性は ±1 の値だけを持ちうるので，この条件は

$$P_i P_f = P_光 \tag{46.17}$$

の形に書くことができる．電気型光子に対しては $P_光 = (-1)^j$ である．したがって電気的多重極輻射に対する偶奇性の選択則を得る．

$$P_i P_f = (-1)^j. \tag{46.18}$$

全角運動量および偶奇性についての選択則はまったく厳密なもので，任意の系による輻射の際に守られなければならない．この規則と並んで，現実の輻射系のなんらかの特殊の構造と結びついた，より限られた他の規則も存在しうる．このような規則は多かれ少なかれ近似的な性質を持つことは避けられない．この章ののちの節でこれらを考察しよう．

輻射確率の量子数 m, M_i, M_f への依存性は，全部多重極モーメントのテンソルの性質により決定される．与えられた j の Q_{jm} という量は，j 階の球面テンソルから成り立っている．この行列要素の上記の量子数への依存性は，公式

$$|\langle n_f J_f M_f | Q_{j,-m} | n_i J_i M_i \rangle|^2 = \begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ M_f & m & -M_i \end{pmatrix}^2 |\langle n_f J_f \| Q_j \| n_i J_i \rangle|^2 \tag{46.19}$$

(III, (107.6) 参照) により与えられる．ここで文字 n は系の状態の J および M 以外の，残りの量子数の全体を表わすものと約束する．等式 (46.19) の右辺にある既約行列要素は，量子数 m, M_i, M_f には依存しない．この公式を (46.9) に代入すると求める依存性が決定される．それは

$$\begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ M_f & m & -M_i \end{pmatrix}^2$$

に比例することがわかる（ここで，輻射体は外場内にはないと仮定された．このときは遷移の振動数は量子数 M_i および M_f には依存しない)．

この確率を M_f のすべての値について（M_i は与えられたときに）加えると，系の始めの準位が $n_i J_i$ で，与えられた振動数の光子を放出する全確率を得る．空間の等方性から，この量が M_i の始めの値にもよらないことは前から明らかである．和は公式

$$\sum_{M_f} |\langle n_f J_f M_f | Q_{j,-m} | n_i J_i M_i \rangle|^2 = \frac{1}{2J_i+1} |\langle n_f J_f \| Q_j \| n_i J_i \rangle|^2 \tag{46.20}$$

(III(107.11)参照)を使って実現される．

§47. 磁気的多重極輻射

磁気型光子の波動関数は $A^\mu=(0,\boldsymbol{A})$ である．ここで $\boldsymbol{A}$ は公式(7.6)で与えられる．これを(46.1)に代入して，遷移の行列要素

$$V_{fi}=-e\frac{\sqrt{\omega}}{2\pi}\int d^3x\cdot\boldsymbol{j}_{fi}(\boldsymbol{r})\int do_{\boldsymbol{n}}\cdot e^{-ikr}\boldsymbol{Y}_{jm}^{(磁)*}(\boldsymbol{n}) \tag{47.1}$$

を得る．ベクトル $\boldsymbol{Y}_{jm}^{(磁)}$ は(7.16)にしたがって j 次の球関数を使って表わされる．ふたたび展開(46.3)を使って，内側の積分に対し

$$\int e^{-ikr}\boldsymbol{Y}_{jm}^{(磁)*}(\boldsymbol{n})\,do_{\boldsymbol{n}}=4\pi i^{-j}g_j(kr)\,\boldsymbol{Y}_{jm}^{(磁)*}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)$$

を得る．(46.5)の g_j を代入すれば[1]

$$V_{fi}=-ei^{-j}\frac{2\omega^{j+\frac{1}{2}}}{(2j+1)!!}\int \boldsymbol{j}_{fi}(\boldsymbol{r})\,r^j\boldsymbol{Y}_{jm}^{(磁)*}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)d^3x\,.$$

ここで定義(7.4)にしたがって

$$\boldsymbol{Y}_{jm}^{(磁)}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)=\frac{1}{\sqrt{j(j+1)}}[\boldsymbol{r}\nabla Y_{jm}]$$

を代入しなければならない．そののち積分内で変形

$$r^j\boldsymbol{j}_{fi}[\boldsymbol{r}\nabla Y_{jm}^*]=-[\boldsymbol{r}\boldsymbol{j}_{fi}]\nabla(r^jY_{jm}^*)$$

を行ない

$$V_{fi}=(-1)^m i^j\sqrt{\frac{(2j+1)\,(j+1)}{\pi j}}\,\frac{\omega^{j+\frac{1}{2}}}{(2j+1)!!}\,e\,(Q_{j,-m}^{(磁)})_{fi} \tag{47.2}$$

を得る．ここで

$$(Q_{jm}^{(磁)})_{fi}=\frac{1}{j+1}\sqrt{\frac{4\pi}{2j+1}}\int[\boldsymbol{r}\boldsymbol{j}_{fi}]\nabla(r^jY_{jm})\,d^3x. \tag{47.3}$$

という量が導入された．これを**遷移の 2^j-重極磁気モーメント**と呼ぶ．

式(47.2)と(46.6)との類似性から，放出確率に対して，(46.10)と電気的モーメントを磁気的モーメントに置き換えただけが異なる公式が得られる．角分布に対する公式(46.12)もまた有効である(これはすでに(7.11)に関連して指摘されている)．

(1 電流 $\boldsymbol{j}$ と角運動量 j を混同しないこと．

$j=1$ のときの式 (47.3) の構造を考察しよう．この場合関数は

$$\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\,rY_{10}=iz,\quad \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\,rY_{1,\pm1}=\mp\frac{i}{\sqrt{2}}(x\pm iy)$$

となり，その勾配は単に，(7.14) の球面基底 $e^{(0)}, e^{(\pm1)}$ に等しい．したがって $e(Q^{(磁)}_{1m})_{fi}$ はベクトル

$$\boldsymbol{\mu}_{fi}=\frac{e}{2}\int[\boldsymbol{r}\boldsymbol{j}_{fi}]d^3x \tag{47.4}$$

の球面成分となり，これはその構造から古典的磁気モーメント（II, §44 参照）と類似している．公式 (47.4) が，磁気モーメント演算子の普通の非相対論的表式と，どう結びつけられるかを示そう．

遷移電流の非相対論的表式は (III, §114 参照)

$$\boldsymbol{j}_{fi}=-\frac{i}{2m}(\psi_f^*\nabla\psi_i-\psi_i\nabla\psi_f^*)+\frac{\mu}{es}\operatorname{rot}(\psi_f^*\mathbf{s}\,\psi_i) \tag{47.5}$$

である．ここで μ は粒子の磁気モーメントで，s はそのスピンである．したがって

$$\boldsymbol{\mu}_{fi}=-\frac{ie}{4m}\int\psi_f^*[\boldsymbol{r}\nabla]\psi_i\,d^3x+\frac{ie}{4m}\int\psi_i[\boldsymbol{r}\nabla]\psi_f^*\,d^3x+\frac{\mu}{2s}\int[\boldsymbol{r}\operatorname{rot}(\psi_f^*\mathbf{s}\,\psi_i)]d^3x \tag{47.6}$$

である．第2項のなかで

$$\int\psi_i[\boldsymbol{r}\nabla]\psi_f^*\,d^3x=-\int\psi_f^*[\boldsymbol{r}\nabla]\psi_i\,d^3x-\int\operatorname{rot}(\boldsymbol{r}\psi_f^*\psi_i)\,d^3x$$

と書こう．あとの積分は無限遠の表面上の積分に変形され 0 になる．このようにして，(47.6) の始めの2項は同一である．第3項はつぎのような形の積分に変形しよう（しばらく $\boldsymbol{F}=\psi_f^*\mathbf{s}\psi_i$ と置こう）．

$$\int[\boldsymbol{r}[\nabla\boldsymbol{F}]]\,d^3x=\oint[\boldsymbol{r}[d\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{F}]]-\int[[\boldsymbol{F}\nabla]\boldsymbol{r}]\,d^3x.$$

表面積分は 0 になり，あとの積分中で $[[\boldsymbol{F}\nabla]\boldsymbol{r}]=-\boldsymbol{F}\operatorname{div}\boldsymbol{r}+\boldsymbol{F}=-2\boldsymbol{F}$ となる．このようにして

$$\int[\boldsymbol{r}\operatorname{rot}\boldsymbol{F}]d^3x=2\int\boldsymbol{F}\,d^3x$$

となる．この結果 $\boldsymbol{\mu}_{fi}$ に対する式は

$$\boldsymbol{\mu}_{fi}=\int\psi_f^*\Big(\frac{e}{2m}\mathbf{L}+\frac{\mu}{s}\mathbf{s}\Big)\psi_i\,d^3x \tag{47.7}$$

の形となる．ここで $\mathbf{L}=-i[\boldsymbol{r}\nabla]$ は粒子の軌道角運動量の演算子である．当然のことながら $\boldsymbol{\mu}_{fi}$ は演算子

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{e}{2m}\mathbf{L} + \frac{\mu}{s}\mathbf{s} \tag{47.8}$$

の行列要素になる．これは粒子の軌道および固有磁気モーメントの演算子から合成される．

磁気的多重極輻射の選択則は電気的な場合と同様である．全角運動量に対しては同じ選択則 (46.15), (46.16) が成り立ち，偶奇性に対しては，Mj-光子の偶奇性 $P_{光} = (-1)^{j+1}$ を (46.17) に代入して得られるつぎの選択則が成り立つ．

$$P_i P_f = (-1)^{j+1}. \tag{47.9}$$

§48. 角分布と輻射の偏り

§46 および §47 で導かれた公式は，角運動量 j およびその投影 m が一定値を持つ光子の放出に関するものであった．したがって，輻射系（たとえば原子核）は輻射の前後に角運動量の一定値 J だけでなく一定の偏り，すなわち一定値 M を持つと仮定されていた．

今度は，部分的に偏った原子核（前と同じように，その大きさは波長にくらべて小さいと仮定されている）による輻射の，より一般的な場合を考察しよう．放出される光子は，前と同様に一定の角運動量 j を持ち，さらに部分的に偏っていてもよい．光子の方向 $\boldsymbol{n}$ の関数として，その放出の確率を見いだそう．これは原子核および光子の偏りの状態を記述する密度行列を使って表わされなければならない．

このためまず，始めおよび終りの原子核が $J_i M_i$ および $J_f M_f$ の一定値を持つ場合に，光子の方向 $\boldsymbol{n}$ と螺線度 $\lambda\,(=\pm 1)$ の関数としての放出確率を書くことにしよう．

一定の jm を持つ光子放出の行列要素は，原子核の（電気的あるいは磁気的）2^j-重極モーメントの行列要素に比例する．すなわち

$$\langle J_f M_f; jm|V|J_i M_i\rangle \propto (-1)^m \langle J_f M_f|Q_{j,-m}|J_i M_i\rangle. \tag{48.1}$$

放出される光子の（運動量表示の）波動関数は $\boldsymbol{Y}_{jm}^{(電)}(\boldsymbol{n})$，あるいは $\boldsymbol{Y}_{jm}^{(磁)}(\boldsymbol{n})$ に比例する．$\boldsymbol{n}$ 方向の運動量と螺線度 λ を持つ光子の波動関数は，偏りのベクトル $e^{(\lambda)}$ に比例する．光子 $\boldsymbol{n}\lambda$ の放出の行列要素は，状態 $|jm\rangle$ の波動関数の状態 $|\boldsymbol{n}\lambda\rangle$ への投影を(48.1) に掛けることによって得られる．すなわち

$$\langle J_f M_f; \boldsymbol{n}\lambda|V|J_i M_i\rangle \propto (-1)^m \langle J_f M_f|Q_{j,-m}|J_i M_i\rangle (e^{(\lambda)*}\boldsymbol{Y}_{jm}).$$

(16.23) にしたがって二つの型の光子に対し

$$e^{(\lambda)*}Y_{jm}(\boldsymbol{n}) \backsim D^{(j)}_{\lambda m}(\boldsymbol{n}) \tag{48.2}$$

である．多重極モーメントの行列要素は，普通既約要素を使って表わされる．その結果遷移確率振幅が

$$\langle J_f M_f;\boldsymbol{n}\lambda|V|J_i M_i\rangle \backsim (-1)^{J_f-M_f+m}\begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ -M_f & -m & M_i \end{pmatrix} Q D^{(j)}_{\lambda m}(\boldsymbol{n}) \tag{48.3}$$

の形に得られる．ここで Q は $\langle J_f\|Q\|J_i\rangle$ を表わしている．

今度は，偏りの混合状態の一般的な場合に移ることができる．量子力学の一般法則にしたがって，遷移確率は次式に比例する[1]．

$$\sum_{(m)}\langle J_f M_f;\boldsymbol{n}\lambda|V|J_i M_i\rangle\langle J_f M_f';\boldsymbol{n}\lambda'|V|J_i M_i'\rangle^*\langle M_i|\rho^{(i)}|M_i'\rangle$$
$$\times\langle M_f'|\rho^{(f)}|M_f\rangle\langle\lambda'|\rho^{(\gamma)}|\lambda\rangle. \tag{48.4}$$

ここで $\rho^{(i)}$, $\rho^{(f)}$, $\rho^{(\gamma)}$ は始めの原子核，終りの原子核および放出される光子の密度行列である．和の記号の下の記号 (m) は，和が2重に繰り返される m-添字$(M_i M_i' M_f M_f' \lambda \lambda')$ のすべてについて行なわれることを意味し，(48.3) を (48.4) に代入する必要がある．

立体角 do 内への光子の放出の確率を $w(\boldsymbol{n})do$ としよう．光子および2次原子核の全方向とすべての偏りについての全放出確率は，明らかに原子核の始めの偏りの状態には依存しない．それは，今は重要ではないよく知られた公式で与えられる．したがって，確率 $w(\boldsymbol{n})$ を1に規格化しよう．それに対しては[2]

$$w(\boldsymbol{n}) = \frac{(2j+1)(2J_i+1)}{8\pi}\sum_{(m)}(-1)^{2J_i-M_i-M_i'}D^{(j)}_{\lambda m}D^{(j)*}_{\lambda' m'}\begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ -M_f & -m & M_i \end{pmatrix}$$

---

1) 系の始および終状態が重ね合わせ

$$\psi^{(i)} = \sum_n a_n\psi_n^{(i)},\quad \psi^{(f)} = \sum_m b_m\psi_m^{(f)}$$

によって記述されれば，行列要素は

$$\langle f|V|i\rangle = \sum_{mn} b_m^* a_n V_{mn}$$

となり，その平方は

$$|\langle f|V|i\rangle|^2 = \sum_{nn'mm'} V_{mn}V^*_{m'n'}a_n a^*_{n'}b_{m'}b^*_m.$$

混合状態の場合への移行は，

$$a_n a^*_{n'} \longrightarrow \rho^{(i)}_{nn'},\quad b_{m'}b^*_m \longrightarrow \rho^{(f)}_{m'm}$$

の置き換えで実現される．したがって

$$|\langle f|V|i\rangle|^2 \longrightarrow \sum_{nn'mm'} V_{mn}V^*_{m'n'}\rho^{(i)}_{nn'}\rho^{(f)}_{m'm}.$$

2) 符号因子の変形には，$2J_i$, $2J_f$, $2M_i$, $2M_f$ が同じ偶奇性を持つことが使われる．また j, m は整数で，$\lambda=\pm1$ であることを思い起こそう．

$$\times\begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ -M'_f & -m' & M'_i \end{pmatrix}\langle M_i|\rho^{(i)}|M'_i\rangle\langle M'_f|\rho^{(f)}|M_f\rangle\langle\lambda'|\rho^{(r)}|\lambda\rangle$$

が得られる（規格化が正しいことはあとで見るであろう）．二つのD-関数の積を級数（b. 2）に展開してこの公式を変形しよう．すなわち

$$D^{(j)}_{\lambda m}D^{(j)*}_{\lambda' m'} = (-1)^{\lambda'+m'}D^{(j)}_{\lambda m}D^{(j)}_{-\lambda'-m'}$$

$$= (-1)^{\lambda+m}\sum_L(2L+1)\begin{pmatrix} j & j & L \\ \lambda & -\lambda' & -\Lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j & j & L \\ m & -m' & -\mu \end{pmatrix}D^{(L)}_{\Lambda\mu}$$

となる（添字 $\Lambda=\lambda-\lambda'$，$\mu=m-m'$；Lは整数，$L\leq 2j$）．このようにして最終的に

$$w(\boldsymbol{n}) = \frac{(2j+1)(2J_i+1)}{8\pi}\sum_L\sum_{(m)}(-1)^{2J_i-M_i-M'_i+m+1}(2L+1)$$

$$\times\begin{pmatrix} j & j & L \\ \lambda & -\lambda' & -\Lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j & j & L \\ m & -m' & -\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ -M_f & -m & M_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ -M'_f & -m' & M'_i \end{pmatrix}$$

$$\times D^{(L)}_{\Lambda\mu}(\boldsymbol{n})\,\langle M_i|\rho^{(i)}|M'_i\rangle\langle M'_f|\rho^{(f)}|M_f\rangle\langle\lambda'|\rho^{(r)}|\lambda\rangle \tag{48.5}$$

を得る．前と同様 $\sum_{(m)}$ はすべての（2重に繰り返された）添字 m についての和を意味する．このとき，添字λ, λ'と残りの添字 m との違いを思い出す必要がある．すなわち，これらの和が（添字 j が与えられたとき）$2j+1$ 個の可能な値のすべてについて行なわれるのでなく，光子の偏りに対応して $\lambda, \lambda'=\pm 1$ の二つの値についてのみ行なわれるわけである．

公式（48.5）は放出される光子の角分布，その偏り，そしてまた2次（すなわち，光子を放出した）原子核の偏りについての，すべての必要な情報を含んでいる．この際，始めの密度行列は与えられるものと考える．

角度分布

光子の角分布は，光子と2次原子核のすべての偏りについて加えることによって得られる．偏りによる平均は，偏りのない状態の密度行列を代入することにより得られる．すなわち

$$\langle\lambda|\rho^{(r)}|\lambda'\rangle = \frac{1}{2}\delta_{\lambda\lambda'},\quad \langle M_f|\rho^{(f)}|M'_f\rangle = \frac{1}{2J_f+1}\delta_{M_fM'_f}. \tag{48.6}$$

こののち，和は(光子に対して) 2倍，(原子核に対し) $2J_f+1$ 倍することになる．言いか

えれば，和は単なる置き換え

$$\langle\lambda|\rho^{(\gamma)}|\lambda'\rangle\longrightarrow\delta_{\lambda\lambda'},\quad\langle M_f|\rho^{(f)}|M_f'\rangle\longrightarrow\delta_{M_fM_f'}\tag{48.7}$$

により実現される．このようにして角分布は

$$\overline{w}(\boldsymbol{n})=\frac{(2j+1)(2J_i+1)}{8\pi}\sum_L\sum_{(m)}(-1)^{m'+1}(2L+1)D_{0\mu}^{(L)}(\boldsymbol{n})\begin{pmatrix}j & j & L\\ \lambda & -\lambda & 0\end{pmatrix}$$
$$\times\begin{pmatrix}j & j & L\\ m & -m' & -\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}J_f & j & J_i\\ -M_f & -m & M_i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}J_f & j & J_i\\ -M_f & -m' & M_i'\end{pmatrix}\langle M_i|\rho^{(i)}|M_i'\rangle.$$

$\boldsymbol{m}$-添字についての和をとると，この公式を非常に簡単にできる．

まず第一に

$$\begin{pmatrix}j & j & L\\ \lambda & -\lambda & 0\end{pmatrix}=(-1)^L\begin{pmatrix}j & j & L\\ -\lambda & \lambda & 0\end{pmatrix}\tag{48.8}$$

であることに注意すれば，和は

$$\sum_{\lambda=\pm1}\begin{pmatrix}j & j & L\\ \lambda & -\lambda & 0\end{pmatrix}=\begin{cases}2\begin{pmatrix}j & j & L\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix} & (L\text{が偶数のとき})\\ 0 & (L\text{が奇数のとき})\end{cases}$$

となる．したがって，Lについての和のなかで偶数のLを持つ項，すなわち偶数次の球関数（$D_{0\mu}^{(L)}$）が現われる項だけが残る．この結果は予知できたはずである．なぜかというと，偶奇性の保存のために，確率は反転，すなわち $\boldsymbol{n}\to-\boldsymbol{n}$ の置き換えに対して不変であるはずだからである．

このようにして

$$\overline{w}(\boldsymbol{n})=\frac{(2j+1)(2J_i+1)}{4\pi}\sum_L(2L+1)\begin{pmatrix}j & j & L\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}D_{0\mu}^{(L)}(\boldsymbol{n})\sum_{(m)}(-1)^{m'+1}$$
$$\times\begin{pmatrix}j & j & L\\ m & -m' & -\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}J_f & j & J_i\\ -M_f & -m & M_i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}J_f & j & J_i\\ -M_f & -m' & M_i'\end{pmatrix}\langle M_i|\rho^{(i)}|M_i'\rangle$$

となる．ここで容易に規格化を確かめることができることを指摘しよう．すなわち，公式

$$\int D_{0\mu}^{(L)}(\boldsymbol{n})\frac{do}{4\pi}=\delta_{L0}\delta_{\mu0}$$

を使って，方向について積分したのちは，$L=\mu=0$ の項だけが残る．公式

$$\begin{pmatrix}j & j & 0\\ m & -m & 0\end{pmatrix}=(-1)^{j-m}\frac{1}{\sqrt{2j+1}},$$

$$\sum_{M_f m}\begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ -M_f & -m & M_i \end{pmatrix}^2 = \frac{1}{2J_i+1}, \quad \mathrm{Sp}\,\rho^{(i)} = 1$$

を使って，この項が1に等しいことがわかる．

つぎの $\overline{w}(\boldsymbol{n})$ のなかの内側の和で，$mm'M_f$ についての和は公式 III (108.4) を使って行なわれる．その結果，光子の角分布に対する最終的な公式を得る．

$$\overline{w}(\boldsymbol{n}) = (-1)^{1+J_i+J_f}\frac{(2j+1)\sqrt{2J_i+1}}{4\pi}\sum_{偶の L}(-i)^L\sqrt{2L+1}\begin{pmatrix} j & j & L \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\times\begin{Bmatrix} J_i & J_i & L \\ j & j & J_f \end{Bmatrix}\sum_{\mu}\mathscr{P}^{(i)*}_{L\mu}D^{(L)}_{0\mu}(\boldsymbol{n}). \tag{48.9}$$

ここで

$$\mathscr{P}^{(i)}_{L\mu} = i^L\sqrt{(2L+1)(2J_i+1)}\sum_{M_iM_i'}(-1)^{J_i-M_i'}\begin{pmatrix} J_i & L & J_i \\ -M_i' & \mu & M_i \end{pmatrix}\langle M_i|\rho^{(i)}|M_i'\rangle,$$

$$\mathscr{P}^{(i)*}_{L\mu} = (-1)^{L-\mu}\,\mathscr{P}^{(i)}_{L,-\mu} \tag{48.10}$$

と置いた．(48.9) のなかの内側の和は $|\mu| \leqslant L$ のすべてについて行なわれ，外側の和は条件

$$L \leqslant 2j, \quad L \leqslant 2J_i \tag{48.11}$$

を満足するすべての L の偶数値について行なわれる（この条件は (48.9)，(48.10) に現われる 3j-記号のなかの添字 j が満足しなければならない，三角形の法則から出てくる）．この条件のために，和のなかの項の数は普通大きくない．そこで，$J_i = 0$ あるいは1/2のときは $L = 0$ の項だけが残る．すなわち，輻射は等方的である（規格化条件から当然であるが，$L = 0$ の項は $1/4\pi$ に等しい）．$J_i = 1$，3/2あるいは $j = 1$ のときは，L についての和で $L = 0, 2$ の二つの項が残る．また密度行列 $\rho^{(i)}$ が対角型 ($M_i = M_i'$) であれば $\mu = 0$ であり，分布関数 (48.9) はルジャンドル多項式による展開の形をとる ((16.5) および (a.17) にしたがって，関数 $D^{(L)}_{00}$ は関数 $P_L(\cos\theta)$ に帰してしまう)．最後に，もしも

$$\langle M_i|\rho^{(i)}|M_i'\rangle = \frac{1}{2J_i+1}\delta_{M_iM_i'}$$

すなわち，始めの原子核が偏っていないとすると，$\mathscr{P}^{(i)}_{00} = 1$ の外はすべて $\mathscr{P}^{(i)}_{L\mu} = 0$

である[1].

$\mathscr{P}_{L\mu}$ という量は，原子核の偏りの状態を特長づけるのに適している．そこで**偏りのモーメント**と名付けよう．公式 (48.10) はこの量を密度行列 $\rho_{MM'}$ を使って定義している．この行列を偏りのモーメントによって表わす逆の公式

$$\rho_{MM'}=\sum_{L\mu}\sqrt{\frac{2L+1}{2J+1}}\,i^{-L}(-1)^{J-M'}\begin{pmatrix}J & L & J\\ -M' & \mu & M\end{pmatrix}\mathscr{P}_{L\mu} \tag{48.12}$$

が正しいことは，直接の証明で確かめられる．

$f_{L\mu}$ を，原子核の偏りの状態に依存するある球面テンソルとする．一般則（III (14.8)参照）にしたがって，密度行列 $\rho_{MM'}$ を持つ状態でのその平均値は

$$\bar{f}_{L\mu}=\sum_{MM'}\rho_{MM'}\langle JM'|f_{L\mu}|JM\rangle \tag{48.13}$$

に等しい．$f_{L\mu}$ という量の行列要素を既約要素 $\langle J\|f_L\|J\rangle$ を使って

$$\langle JM'|f_{L\mu}|JM\rangle=i^L(-1)^{J-M'}\begin{pmatrix}J & L & J\\ -M' & \mu & M\end{pmatrix}\langle J\|f_L\|J\rangle$$

で表わし，定義 (48.10) によって偏りのモーメントを導入すると次式を得る．

$$\bar{f}_{L\mu}=\frac{\langle J\|f_L\|J\rangle}{\sqrt{(2L+1)(2J+1)}}\mathscr{P}_{L\mu}. \tag{48.14}$$

光子の偏り

行列 $\rho^{(\gamma)}$ および $\rho^{(f)}$ が（$\rho^{(i)}$ とともに）与えられたとき，公式 (48.5) は一定の偏りの状態の光子を放出し，原子核を残す遷移確率を定義する．このような状態は本来輻射過程そ

---

1) 実際

$$\begin{pmatrix}J & 0 & J\\ -M' & 0 & M\end{pmatrix}=(-1)^{J-M}\frac{1}{\sqrt{2J+1}}\delta_{MM'}$$

であることに注意し

$$\sum_{MM'}(-1)^{J-M'}\begin{pmatrix}J & L & J\\ -M' & \mu & M\end{pmatrix}\delta_{MM'}$$
$$=\sqrt{2J+1}\sum_{MM'}\begin{pmatrix}J & L & J\\ -M' & \mu & M\end{pmatrix}\begin{pmatrix}J & 0 & J\\ -M' & 0 & M\end{pmatrix}$$
$$=\sqrt{2J+1}\,\delta_{L0}\delta_{\mu 0}$$

である．このあとで定義 (48.10) から上記の結果が出る．

のものの性質ではなく，光子や反跳原子核を記録し，その一定の偏りを取り出す測定器の性質を示すものである．他の問題の設定，すなわち系《原子核＋光子》の終状態はあらかじめ固定されないで，光子放出の方向だけが与えられたときの，この状態の偏りの密度行列を要求した方がより自然である．

この問題の答は同じ公式 (48.5) によって与えられる．もしもそれを

$$w=\overline{w}(\boldsymbol{n})\sum_{(m)}\langle M_f;\boldsymbol{n}\lambda|\rho|M_f';\boldsymbol{n}\lambda'\rangle\langle\lambda'|\rho^{(\gamma)}|\lambda\rangle\langle M_f'|\rho^{(f)}|M_f\rangle \qquad (48.15)$$

の形に置くと，$\langle M_f;\boldsymbol{n}\lambda|\rho|M_f';\boldsymbol{n}\lambda'\rangle$ は求める密度行列である．なぜかというと，量子力学の一般法則にしたがって，あらかじめ与えられた状態への遷移確率 w は，その与えられた $\rho^{(\gamma)}\rho^{(f)}$ への《投影》で与えられるからである．この行列が普通の条件

$$\sum_{\lambda M_f}\langle M_f;\boldsymbol{n}\lambda|\rho|M_f;\boldsymbol{n}\lambda\rangle=1$$

により規格化されるようにするために，(48.15) のなかで $\overline{w}(\boldsymbol{n})$ を分離した．

もしわれわれが光子だけの偏りに興味があるなら，$M_f=M_f'$ について加える必要がある．すなわち

$$\langle\boldsymbol{n}\lambda|\rho|\boldsymbol{n}\lambda'\rangle=\sum_{M_f}\langle M_f;\boldsymbol{n}\lambda|\rho|M_f;\boldsymbol{n}\lambda'\rangle$$

となる．(48.9) の導出とまったく同様に

$$\langle\boldsymbol{n}\lambda|\rho|\boldsymbol{n}\lambda'\rangle=(-1)^{1+J_i+J_f}\frac{(2j+1)\sqrt{2J_i+1}}{8\pi\overline{w}(\boldsymbol{n})}\sum_L(-i)^L\sqrt{2L+1}\begin{pmatrix}j & j & L\\ \lambda & -\lambda' & -\Lambda\end{pmatrix}$$
$$\times\begin{Bmatrix}J_i & J_i & L\\ j & j & J_f\end{Bmatrix}\sum_\mu\mathscr{P}^{(i)*}_{L\mu}D^{(L)}_{\Lambda\mu}(\boldsymbol{n}) \qquad (48.16)$$

を得る ($\Lambda=\lambda-\lambda'$)．ここで和は，条件 (48.11) を満足するすべての L の整数値について行なう．

特に円偏光はストークスのパラメータ

$$\xi_2=\langle\boldsymbol{n}1|\rho|\boldsymbol{n}1\rangle-\langle\boldsymbol{n},-1|\rho|\boldsymbol{n},-1\rangle$$

により定義される（§8 の問題参照）．関係式 (48.8) のために，この差のなかで偶数の L を持つすべての項が落ちる．そして ξ_2 に対して (48.9) の式と，和がすべての（偶数でなくて）奇数の値の L について行なわれる点だけが異なっている公式が得られる．

二次原子核の偏り

最後に，もしも原子核の終りの偏りだけが重要ならば，$\rho^{(\gamma)} \to \delta$ と置く必要がある．もしもこの際光子の方向についての積分も行なえば，二次原子核の密度行列は

$$\langle M_f|\rho|M_f'\rangle = \int \overline{w}(\boldsymbol{n})\langle M_f\boldsymbol{n}|\rho|M_f'\boldsymbol{n}\rangle do = (2J_i+1)\sum_{mM_iM_i'}(-1)^{2J_i-M_i-M_i'}$$
$$\times\begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ -M_f & -m & M_i\end{pmatrix}\begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ -M_f' & -m & M_i'\end{pmatrix}\langle M_i|\rho^{(i)}|M_i'\rangle$$

となる．この行列を使って計算された偏りのモーメントは

$$\mathscr{P}^{(f)}_{L\mu} = (-1)^{J_i+J_f+L+j}\sqrt{(2J_i+1)(2J_f+1)}\begin{Bmatrix} J_i & J_i & L \\ J_f & J_f & j\end{Bmatrix}\mathscr{P}^{(i)}_{L\mu}. \tag{48.17}$$

もしも始めの原子核が偏っていなければ，終りの原子核も偏らない．しかしながら，この際相関の偏り，すなわち与えられた方向への輻射後の原子核の偏りは存在する．$\rho^{(i)} \longrightarrow \delta/(2J_i+1)$（したがって $\overline{w}(\boldsymbol{n}) = 1/4\pi$）と置き，(48.9) の導出と類似の計算をすると，この偏りを記述する密度行列を得る．

$$\langle M_f;\boldsymbol{n}|\rho|M_f';\boldsymbol{n}\rangle = (2j+1)(-1)^{J_i+M_f'+1}\sum_{\text{偶数の}L}(2L+1)\begin{pmatrix} j & j & L \\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$
$$\times\begin{pmatrix} J_f & L & J_f \\ -M_f' & \mu & M_f\end{pmatrix}\begin{Bmatrix} J_f & J_f & L \\ j & j & J_i\end{Bmatrix}D^{(L)}_{0\mu}(\boldsymbol{n}). \tag{48.18}$$

この行列に対応して，偏りのモーメントを得る．

$$\mathscr{P}^{(f)}_{L\mu} = i^L(-1)^{1+J_i+J_f}(2j+1)\sqrt{(2L+1)(2J_f+1)}\begin{pmatrix} j & j & L \\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$
$$\times\begin{Bmatrix} J_f & J_f & L \\ j & j & J_i\end{Bmatrix}D^{(L)}_{0\mu}(\boldsymbol{n}). \tag{48.19}$$

偶数次のモーメントだけができる（これはすでに触れた偶奇性の保存の結果である）．

もしも今度は二次原子核が輻射すると，偏っているので光子の非等方分布を与える．偏りのモーメント (48.19) は最初の崩壊で放出された光子の方向 $\boldsymbol{n}$ に依存するので，（始めの原子核が偏っていなくても）続けて放出された光子の方向とのあいだに一定の相関が生じる．同様にカスケード放出の際に他の相関現象（偏りの相関その他）を考察することができる[1]．

---

1) この問題の詳しい記述は《γ-線》（ソビエト科学アカデミー出版，1961）のア・ゼ・ドルギノフの論文中に見られる．

問　　題

1. 偏りのモーメント $\mathscr{P}_{1\mu}$ および $\mathscr{P}_{2\mu}$ を，角運動量ベクトル $\boldsymbol{J}$ および4重極モーメントのテンソル Q_{ik} の平均値と関係づけよ．

解　ベクトル $\boldsymbol{J}$ およびテンソル Q_{ik} の既約要素は，等式

$$\overline{\boldsymbol{J}^2} = \frac{\langle J\|J\|J\rangle^2}{2J+1},\quad \overline{Q_{ik}^2} = \frac{\langle J\|Q\|J\rangle^2}{2J+1}$$

で定義される（III (107.10), (107.11) 参照）．演算子 Q_{ik} は公式 III (75.2)

$$\mathrm{Q}_{ik} = \frac{3Q}{2J(2J-1)}\left(\mathrm{J}_i\mathrm{J}_k + \mathrm{J}_k\mathrm{J}_i - \frac{2}{3}\mathbf{J}^2\delta_{ik}\right)$$

により，角運動量の演算子を使って表わされる．これから平均値が求まる．

$$\overline{\mathrm{Q}_{ik}^2} = \frac{6Q^2}{J^2(2J-1)^2}(\overline{\boldsymbol{J}^2})^2 = \frac{6(J+1)^2}{(2J-1)^2}.$$

既約行列要素は

$$\langle J\|J\|J\rangle = \sqrt{J(J+1)(2J+1)},$$

$$\langle J\|Q\|J\rangle = \frac{Q(J+1)\sqrt{6(2J+1)}}{2J+1}$$

となる．(48.14) から今度は，偏りのモーメント $\mathscr{P}_{1\mu}$ がベクトルの球面成分

$$\sqrt{\frac{3}{J(J+1)}}\bar{\boldsymbol{J}}$$

と一致し，モーメント $\mathscr{P}_{2\mu}$ がテンソル

$$\frac{\bar{Q}_{ik}}{Q}\sqrt{\frac{5}{6}}\frac{2J-1}{J+1}$$

の球面成分と一致することがわかる．

§49. 原子輻射．電気型[1)]

（光学的輻射遷移に参加する）原子の外側の電子のエネルギーは，あらい見積りで，$E \sim me^4/\hbar^2$ という程度の量であり，したがって輻射される波長は $\lambda \sim \hbar c/E \sim \hbar^2/\alpha me^2$ である．原子の大きさは $a \sim \hbar^2/me^2$ である．したがって，原子の光学的スペクトルでは，原則として不等式 $a/\lambda \sim \alpha \ll 1$ が満足されている．$v/c \sim \alpha$ もこれと同程度の量である．ここで v は光学的電子の速度である．

1)　§49～§55 では普通の単位が用いられる．

このようにして，原子の光学スペクトルでは，電気的２重極輻射の確率が（もしも選択則で許されるならば），多重極遷移の確率よりいちじるしく大きくなるための条件が満たされている[1]．これに関連して原子の分光学では，もちろん電気的２重極遷移が最も重要な役割を果たしている．

すでに示されているように，このような遷移は，原子の全角運動量 J および偶奇性 P についての厳密な選択則

$$|J'-J| \leqslant 1 \leqslant J+J', \tag{49.1}$$

$$PP'=-1 \tag{49.2}$$

にしたがう[2]．不等式 $|J'-J|\leqslant 1$ は，角運動量が 0，±1 だけ変化できることを意味している．不等式 $J+J'\geqslant 1$ のために，付加的に $0\to 0$ 遷移が禁止される．始および終状態の偶奇性は逆になる必要がある[3]．

遷移 $nJM \longrightarrow n'J'M'$ を伴う輻射確率は，原子の２重極モーメントの対応する行列要素によって

$$\left.\begin{aligned} w(nJM\to n'J'M') &= \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3}|\langle n'J'M'|d_{-m}|nJM\rangle|^2, \\ \omega &= \omega(nJ\to n'J') \end{aligned}\right\} \tag{49.3}$$

のように決定される．(49.3) を（M が与えられたとき）すべての $M'=M-m$ について加えると，原子準位 nJ の与えられた振動数の全輻射確率を得る．和は (46.20) を使って行なわれ

$$w(nJ\to n'J') = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3}\frac{1}{2J+1}|\langle n'J'\|d\|nJ\rangle|^2 \tag{49.4}$$

を与える[4]．

---

1) 原子の光学スペクトル中の，２重極遷移確率の典型的な値は $10^8\ \mathrm{sec}^{-1}$ の程度である．

2) いまは，始および終状態の量子数をそれぞれ，′のない文字，および′のついた文字で表わそう．文字 n, n' により，系の状態を定義する（あらわに示されたもの以外の）残りの量子数の全部を表わそう．

3) 偶奇性に関する選択則は，最初にラポルテにより確立された (O. Laporté, 1924)．

4) 観測される輻射強度は w に $\hbar\omega$ および，光源中の与えられた励起状態にある原子の数 (N_{nJ}) を掛けることにより得られる．したがって，温度 T の気体中では，この数は $N_{nJ} \propto (2J+1)\exp(-E_{nJ}/T)$ である．ここで因子 $(2J+1)$ は，角運動量 J の準位の統計的重みである．

ここに現われる既約行列要素の絶対値の2乗を**遷移線の強度**と呼ぶ．この量は始および終状態に関して対称である．

原子スペクトルの遷移確率についてのこれ以上の結論は，原子の状態のなんらかの性質を具体化するときにだけ出すことができる．われわれはここで，その近似の程度がはっきりした理論的性質を持たないような，行列要素の計算の方法にとどまることはやめよう．ただ，（特に軽い原子で）LS-結合型に作られた十分広い範疇の状態に対して，ある関係を導こう（III，§72参照）．このような状態は，全角運動量のほかに，この場合に保存される軌道角運動量L，およびスピンSの一定値によって特長づけられる．

2重極モーメントは純軌道的な量であるから，その演算子はスピン演算子と可換である．すなわち，その行列は量子数Sについて対角型である．量子数Lについては，2重極モーメントに対しては，任意の軌道ベクトルに対するのと同じ選択則が成立する（III，§29参照）．このようにして，LS-型に作られた状態間の遷移は，（(49.1)，(49.2) 以外に）付加的選択則にしたがわねばならない．すなわち

$$S'-S=0, \tag{49.5}$$

$$|L'-L|\leqslant 1\leqslant L+L'. \tag{49.6}$$

この選択則は近似的で，スピン軌道相互作用を考慮すると破れることを再度強調しよう．

選択則 (49.5)（異なる多重度の項のあいだの遷移の禁止）は，2重極のみならず，電気型のすべての遷移に対しても正しいことを指摘しよう．すなわち，すべての次数の電気的多重極モーメントは軌道性のテンソルであり，したがって，その行列はスピンに関して対角型である．したがって，電気的4重極遷移に対しては，共通の選択則

$$|J'-J|\leqslant 2\leqslant J+J',\quad PP'=1 \tag{49.7}$$

のほかに，LS-結合の場合には付加的なつぎの選択則が成り立つ．

$$S'-S=0,\quad |L'-L|\leqslant 2\leqslant L+L'. \tag{49.8}$$

輻射確率の量子数 S, L, J' への依存性は，あらわな形で決めることができる．この問題は，角運動量の合成のときの球面テンソルの行列要素に対する一般則を使って，直接に解くことができる．公式III (109.3) にしたがって[1]

1) 今はIII，§109 の公式での≪部分系1および2の角運動量≫を，原子の軌道角運動量とスピンであると考えるべきである．そのあいだの相互作用は無視している．量 $f^{(1)}_{1q}$ の役割は軌道性ベクトル d_q が演じる．

$$|\langle n'L'SJ'\|d\|nLSJ\rangle|^2 = (2J+1)(2J'+1)\begin{Bmatrix} L' & J' & S \\ J & L & 1 \end{Bmatrix}^2 |\langle n'L'\|d\|nL\rangle|^2 \tag{49.9}$$

を得る．これを (49.4) に代入して

$$w(nLSJ \to n'L'SJ') = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3}(2J'+1)\begin{Bmatrix} L' & J' & S \\ J & L & 1 \end{Bmatrix}^2 |\langle n'L'\|d\|nL\rangle|^2 \tag{49.10}$$

を得る，ここで $\omega = \omega(nLS \to n'L'S)$ である[1]．

これらの確率に対して，一定の総和則が得られる．$6j$-記号の 2 乗に対しては，加算法則

$$\sum_{J'}(2J'+1)\begin{Bmatrix} L' & J' & S \\ J & L & 1 \end{Bmatrix}^2 = \frac{1}{2L+1} \tag{49.11}$$

が成り立つ．これを使って (49.10) から

$$\sum_{J'} w(nLSJ \to n'L'SJ') = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3}\frac{1}{2L+1}|\langle n'L'\|d\|nL\rangle|^2 \tag{49.12}$$

を見いだす．この量は始めの J の値に依存しないことを指摘しておこう．

もしもわれわれが，原子項 nSL の微細構造の間隔よりもはるかに大きい温度の気体からの輻射を扱うならば，異なる J を持つ状態が均等に配置される．すなわち，すべての J の値が同等に現われる．原子がある定まった J の値を持つ準位に見いだされる確率は，この場合

$$\frac{2J+1}{(2L+1)(2S+1)} \tag{49.13}$$

に等しい．すなわち，これらの準位の統計的重みと，nSL の項の全統計的重みとの比に等しい．式 (49.10) あるいはその和 (49.12) の，この確率についての平均は，因子 (49.13) を掛けることに帰する．この平均を上線で表わそう．（微細構造の二つの項 nSL および $n'SL'$ のあいだの，すべての可能な遷移からなっている）スペクトル多重項の，すべての線の輻射の全確率は，和

$$\overline{w}(nLS \to n'L'S) = \sum_J \sum_{J'} \overline{w}(nLSJ \to n'L'SJ') \tag{49.14}$$

---

1) 行列要素の計算にあたり，スピン軌道相互作用を無視して，われわれはまた振動数の J および J' への依存性，すなわち原子の始および終準位の微細構造もまた無視したわけである．

である．もちろん，$\sum_J (2J+1)=(2S+1)(2L+1)$ であるから，全確率として (49.12) と一致する式を得る．したがって，個々の線の相対的確率(あるいは同じことだが相対強度)に対して

$$\frac{\overline{w}(nLSJ\to n'L'SJ')}{\overline{w}(nLS\to n'L'S)}=\frac{(2J+1)(2J'+1)}{(2S+1)}\begin{Bmatrix}L' & J' & S\\ J & L & 1\end{Bmatrix}^2. \tag{49.15}$$

これらの公式から与えられる数値解析から，多重項の線のなかで $\Delta J=\Delta L$ のものが最も強いことがわかる（これを**主線**と呼び，**副線**と呼ばれる多重項の他の残りの成分と区別する）．この際，始めの J が大きいほど主線の強度は大きい．

量 (49.15) を J あるいは J' について加えると

$$\frac{\sum_{J'}\overline{w}(nLSJ\to n'L'SJ')}{\overline{w}(nLS\to n'L'S)}=\frac{2J+1}{(2L+1)(2S+1)},$$

$$\frac{\sum_{J}\overline{w}(nLSJ\to n'L'SJ')}{\overline{w}(nLS\to n'L'S)}=\frac{2J'+1}{(2L+1)(2S+1)} \tag{49.16}$$

となる．このようにして，同一の始（あるいは終）準位を持つスペクトル多重項のすべての線の強度の和は，始（あるいは終）準位の統計的重みに比例する．

原子のスペクトル線の超微細構造をさらに詳述しよう．原子準位の超微細分裂は，核のスピンが0と異なるとき，電子と核スピンとの相互作用の結果として生じる（III，§120 参照）．原子の（原子核も含めて）全角運動量 $\boldsymbol{F}$ は，電子の全角運動量 $\boldsymbol{J}$ と原子核の角運動量 $\boldsymbol{I}$ とから合成される．準位 nJ の超微細構造の各成分は，その量子数の値 F で特長づけられる．

角運動量保存の厳密な法則は，今は全角運動量Fに対する厳密な選択則に帰する．電気的2重極輻射に際しては

$$|F'-F|\leqslant 1\leqslant F+F' \tag{49.17}$$

である．しかし，電子と核のスピンとの相互作用はいちじるしく弱いために，原子の電子殻の電気的（あるいは磁気的）モーメントの行列要素の計算の際にはいつもそれを無視することができた．したがって，電子の角運動量Jおよび電子の偶奇性についての，以前の選択則もまた成り立ったままである．特に，後者のために同一項の超微細構造の成分間の2重極遷移は不可能である．すなわち，これらの準位はすべて同じ偶奇性を持つが，上記の遷移は異なる偶奇性の状態間でのみ可能だからである．

2重極モーメントの演算子は原子核のスピンと可換であるから，行列要素の量子数 I および F への依存性はあらわな形で求められる．この計算は，前に LS-結合に対して行なわれた計算とは，ただ明らかな記号の置き換えだけが異なっている．全角運動量 $\boldsymbol{F}$ の投影の終りの値について加えた輻射確率は

$$w(nJIF \to nJ'I'F') = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3}\frac{1}{2F+1}|\langle n'J'IF'\|d\|nJIF\rangle|^2, \qquad (49.18)$$

$$\omega = \omega(nJ \to n'J')$$

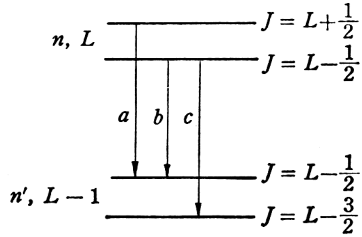
となる．ここで既約行列要素の2乗は

$$|\langle n'J'IF'\|d\|nJIF\rangle|^2 = (2F+1)(2F'+1)\begin{Bmatrix} J' & F' & I \\ F & J & 1 \end{Bmatrix}^2 |\langle n'J'\|d\|nJ\rangle|^2. \qquad (49.19)$$

問　題

アルカリ金属のスペクトルの大部分の線は，一つの外殻（光学的）電子の，閉じた配位を形成している原子の残りの部分の，自己無矛盾の場内での遷移の結果として，記述することができる．原子の状態は LS-結合型に組み立てられている．このような前提で，スペクトル線の微細構造の成分の相対強度を決定せよ．

解　原子の全角運動量 L および $S=1/2$ は，光学的電子の軌道角運動量およびスピンと一致する．したがって，状態の偶奇性は $(-1)^L$ に等しい（原子の残りの閉じた配位の偶奇性は正である）．したがって，偶奇性についての選択則は $L'=L$ の2重極輻射を禁止する．したがって，$L'-L=\pm1$ の遷移だけが可能になる．2重項 nL および n', $L-1$ の成分のあいだの遷移は，J についての選択則のために全部で3本の線を与える（第1図）．これらの相対強度（これらを a, b, c としよう）を，（直接に公式 (49.15) に頼らないで）(49.16) の法則から決定するほうが簡単である．一方および他方の始（あるいは終）準位を持つ線の強度の和の比を作り，二つの等式を得る．



第 1 図

$$\frac{b+c}{a} = \frac{2L}{2L+2}, \qquad \frac{a+b}{c} = \frac{2L}{2L-2}.$$

これから

$$a:b:c = [(L+1)(2L-1)]:1:[(L-1)(2L+1)]$$

となる．もしも $L=1$ ならば，下の準位は分れない．c 線は無くなり $a/b=2$ である．

§50. 原子輻射．磁気型

原子の磁気モーメントは，その大きさの程度としてはボーア磁子で与えられる．すなわち $\mu \sim e\hbar/mc$ である．この評価は電気的2重極モーメント $d \sim ea \sim \hbar^2/me$ と因子 α だけ異なる（なぜかというと，$v/c \sim \alpha$ であるから，当然のことながら，$\mu \sim dv/c$ である）．これから，原子の磁気的2重極輻射（$M1$）の確率は，（同じ振動数の）電気的2重極輻射より α^2 倍小さい．したがって，選択則によって電気的な場合が禁止された遷移に対してのみ，磁気的輻射が役割を果たす．

電気的4重極（$E2$）輻射に関していえば，その確率と $M1$-輻射の確率との比は，その大きさの程度としては

$$\frac{E2}{M1} \sim \frac{(ea^2)^2\omega^2/c^2}{\mu^2} \sim \frac{a^4m^2\omega^2}{\hbar^2} \sim \left(\frac{\Delta E}{E}\right)^2 \tag{50.1}$$

に等しい（4重極モーメントは $\sim ea^2$，$E \sim \hbar^2/ma^2$ は原子のエネルギー，ΔE は遷移の際のエネルギーの変化である）．われわれは，原子の平均振動数に対し（すなわち $\Delta E \sim E$ のとき），$E2$- および $M1$-輻射の確率は（もちろん，両方とも選択則では許されている条件のとき）同程度の大きさであることがわかる．もしも $\Delta E \ll E$ ならば（たとえば同一項の微細構造の成分間の遷移に対しては），$M1$-輻射は $E2$-輻射よりはるかに起こり易い．

磁気的2重極遷移は厳密な選択則にしたがう．

$$|J'-J| \leqslant 1 \leqslant J+J', \tag{50.2}$$

$$PP'=1. \tag{50.3}$$

LS-結合の場合には，電気的な場合よりも制限されてはいるが，付加的な選択則が生じる．この事情は，原子の磁気的モーメントの特別な性質と関係がある．その性質は系のすべての粒子が同一である（電子）結果として生じたものである．すなわち，磁気モーメントの演算子は，その全軌道およびスピン角運動量の演算子を使って表わされる．すなわち

$$\boldsymbol{\mu} = -\mu_0(\mathbf{L}+2\mathbf{S}) = -\mu_0(\mathbf{J}+\mathbf{S}) \tag{50.4}$$

で，ここで $\mu_0=|e|\hbar/2mc$ はボーア磁子である(III, §112 参照)．全角運動量が保存されるために，演算子 $\mathbf{J}$ は一般にはエネルギーについて非対角要素は持たない．したがって，輻射遷移の考察にあたっては，$\boldsymbol{\mu}=-\mu_0\mathbf{S}$ と書けば十分である[1]．

スピン軌道相互作用を無視すると，角運動量 $\boldsymbol{L}$ と $\boldsymbol{S}$ のどちらも個々に保存する．したがって，分れていない項を特長づける量子数 nSL のすべてについて，演算子 $\mathbf{S}$ は対角型である．したがって，一般になんらかの遷移が起こるためには，量子数 J が必ず変化しなければならない．このようにして，選択則

$$n'=n,\quad S'=S,\quad L'=L,\quad J'-J=\pm 1 \tag{50.5}$$

が得られる．すなわち，遷移は同一項の微細構造の成分のあいだでのみ起こる．

この場合の輻射確率の計算は完全に行なうことができる．公式 (49.10) の記号を適当に変えて

$$w(nLSJ\to nLSJ') = \frac{4\omega^3\mu_0^2}{3\hbar c^3}(2J'+1)\begin{Bmatrix} S & J' & L \\ J & S & 1 \end{Bmatrix}^2 |\langle S\|S\|S\rangle|^2$$

を得る．ここに現われるスピン自身の固有関数についての，スピンの既約行列要素は公式

$$\langle S\|S\|S\rangle = \sqrt{S(S+1)(2S+1)} \tag{50.6}$$

で与えられる（III, §29（邦訳 106 頁）の脚注参照)．われわれに必要な $6j$-記号は

$$\begin{Bmatrix} S & J-1 & L \\ J & S & 1 \end{Bmatrix}^2 = \frac{(L+S+J+1)(L+S-J+1)(L-S+J)(S-L+J)}{S(2S+1)(2S+2)(2J-1)2J(2J+1)} \tag{50.7}$$

に等しい（III, §108 の表参照)．その結果

$$w(nLSJ\to nLS,\ J-1) = \frac{2J-1}{2J+1}\,w(nLS,\ J-1\to nLSJ)$$

$$= \frac{\omega^3\mu_0^2}{3\hbar c^3(2J+1)J}(L+S+J+1)(L+S-J+1)(J+S-L)(J+L-S) \tag{50.8}$$

を得る．

同一の準位（その振動数はラジオ波の領域にある）の超微細構造の成分間の遷移は，一般には電気的 2 重極遷移では起こらない．なぜかというと，これらの成分はすべて同じ偶

1) 原子の電子が作る角運動量 $\boldsymbol{J}$ が保存されない場合は例外である．すなわち，外場の存在するときに超微細構造を考慮する場合などである(問題参照)．

奇性を持っているからである．$E2$-および$M1$-遷移は偶奇性の変化なく起こる．超微細構造の間隔が非常に小さい量であるために，$E2$-輻射は$M1$-輻射にくらべて確率が小さい((50.1)を見よ)．したがって，上記の遷移は磁気的2重極で起こる．

問　　題

1. 同じ準位の超微細構造の成分間の$M1$-遷移の確率を求めよ．

解　遷移確率は公式(49.18)，(49.19)で与えられる．ここでは，磁気モーメントの対角既約行列要素$\langle nJ\|\mu\|nJ\rangle$が現われる．もしも全部の(可約の)行列要素$\langle nJM|\mu_z|nJM\rangle$が，ゼーマン効果で与えられた準位の分裂を決定すること（III，§112参照）に注意すれば，この値はただちに書くことができて$-\mu_0 gM$に等しい．ここでgはランデ因子である．既約行列要素は（III (29.7) 参照)

$$\langle nJ\|\mu\|nJ\rangle = \frac{1}{M}\sqrt{J(J+1)(2J+1)}\ \langle nJM|\mu_z|nJM\rangle = -\mu_0 g\sqrt{J(J+1)(2J+1)}$$

である．この結果求める確率として[1)]

$$w(nJIF\to nJI,\ F-1) = \frac{2F-1}{2F+1}\ w(nJI,\ F-1\to nJIF) = \frac{\omega^3\mu_0^2 g^2}{3\hbar c^3(2F+1)F}$$
$$\times(J+I+F+1)(J+I-F+1)(F+J-I)(F-J+I)$$

を見いだす．この式は，記号の明らかな変化と余分な因子g^2だけが(50.8)と異なっている．

2. 同一の原子準位のゼーマン成分のあいだの$M1$-遷移の確率を求めよ．

解　nJの値が不変のときの遷移$M\longrightarrow M-1$について語ることになる．遷移の振動数は，$\hbar\omega=\mu_0 gH$（gはランデ因子である）（下記の(51.3)参照)．ベクトル$\boldsymbol{\mu}$の球面成分μ_{-1}の行列要素は

---

1)　水素原子の基底準位($1s_{1/2}$)の超微細構造の成分のあいだの遷移は興味ある例である．これは$E1$も$E2$も同様に厳密に禁止されている（後者は$J+J'=1$の4重極遷移を禁じている選択則による)．振動数$\omega=2\pi\cdot1.42\cdot10^9\ \mathrm{sec}^{-1}$（波長$\lambda=21\ \mathrm{cm}$）がこの遷移に対応する．$g=2$，$I=1/2$，$J=1/2$，$F=1$，$F'=0$と置いて

$$w=\frac{4\omega^3\mu_0^2}{3\hbar c^3}=2.85\cdot10^{-15}\ \mathrm{sec}^{-1}$$

を得る．

$$|\langle nJ, M-1|\mu_{-1}|nJM\rangle| = \sqrt{\frac{(J-M+1)(J+M)}{2J(J+1)(2J+1)}}\,|\langle nJ\|\mu\|nJ\rangle|$$
$$= -\mu_0 g\sqrt{\frac{1}{2}(J-M+1)(J+M)}$$

となる (III (27.12) および前問参照). 遷移確率は

$$w = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3}|\langle nJ, M-1|\mu_{-1}|nJM\rangle|^2 = \frac{2\mu_0^5 H^3}{3\hbar^4 c^3}(J-M+1)(J+M).$$

§51. 原子輻射. ゼーマンおよびシュタルク効果

外部磁場 H (弱いと仮定する) のなかで全角運動量 J の原子準位のおのおのは $2J+1$ 個の準位

$$E_M = E^{(0)} + \mu_0 gMH \tag{51.1}$$

に分れる. ここで $E^{(0)}$ は非摂動準位, μ_0 はボーア磁子, g はランデ因子, M は角運動量 J の磁場の方向への投影である (III, §112 参照). このようにして, 角運動量の方向による縮退は完全に取り払われる.

したがって, 2組の分裂した準位間の遷移から起こるスペクトル線が分離する. 線の成分の数は, 2重極輻射の際にしたがう必要のある, 量子数 M に対する選択則

$$m = M-M' = 0,\ \pm1 \tag{51.2}$$

によって決定される[1]. $m=0$ および $m=\pm1$ の遷移から起こる成分を, それぞれ π-成分および σ-成分と呼ぶ. その振動数は

$$\begin{aligned}\hbar\omega_\pi &= \hbar\omega^{(0)} + \mu_0 H(g-g')M,\\ \hbar\omega_\sigma &= \hbar\omega^{(0)} + \mu_0 H[gM-g'(M\pm1)]\end{aligned} \tag{51.3}$$

である. $g=g'$ の特別の場合には

$$\hbar\omega_\pi = \hbar\omega_0,\quad \hbar\omega_\sigma = \hbar\omega^{(0)} \mp \mu_0 gH \tag{51.4}$$

となり, M の値に依存しない. 言いかえれば, この場合にはスペクトルは, ずれない π-成分とそれから両側に対称に位置する σ-成分の3重項に分れる (これは《正常》**ゼーマン効果**と呼ばれるものである).

---

1) この選択則に付随して, $J'=J$ であれば $M=M'=0$ の遷移も禁止される. これは任意のベクトルの行列要素の一般式 III (29.7) から直接見ることができる.

(全方向への) 輻射の全確率は絶対値の2乗 $|\langle n'J'M'|d_{-m}|nJM\rangle|^2$ に比例する．したがって，$j=1$ とした公式 (46.19) を使って，スペクトル線のゼーマン成分のおのおのの相対輻射確率は

$$\begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ M' & m & -M \end{pmatrix}^2. \tag{51.5}$$

≪正常≫ ゼーマン効果の特別な場合にはすべての成分すべてが存在し，そのおのおのは m が与えられたとき，始めの M がすべての値を持つ遷移から起こっている．

$$\sum_{MM'} \begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ M' & m & -M \end{pmatrix}^2 = \frac{1}{3} \tag{51.6}$$

であるから (III (106.12) 参照)，この場合にはすべて3成分の輻射は同じ確率である．

しかしながら，(光源に置かれた磁場の方向に対して)一定方向からの観測の際の，ゼーマン成分の相対強度が非常に重要である．(45.5)にしたがって，与えられた方向への輻射確率（そしてそれとともに線強度）は $\sum|\boldsymbol{e}^*\boldsymbol{d}_{fi}|^2$ に比例する．ここで和は与えられた $\boldsymbol{n}$ に対して可能な二つの独立な偏り $\boldsymbol{e}$ について行なわれる．

磁場（z 軸）に沿う方向の観測では，この和は

$$|(d_x)_{fi}|^2 + |(d_y)_{fi}|^2,$$

あるいは，球面成分に移って

$$|(d_1)_{fi}|^2 + |(d_{-1})_{fi}|^2.$$

これは，(磁場について) 縦方向では二つの σ-成分 ($m=\pm1$) だけが観測されることを意味する．その強度は

$$\begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ M\mp1 & \pm1 & -M \end{pmatrix}^2 \tag{51.7}$$

に比例する．伝播方向に対して一定の投影値を持つので，この線は右 ($m=1$) および左 ($m=-1$) 円偏光である (§8 参照)．

磁場に垂直な方向（これを x 軸にしよう）での観測の際，強度は和

$$|(d_z)_{fi}|^2+|(d_y)_{fi}|^2 = |(d_0)_{fi}|^2+\frac{1}{2}\{|(d_1)_{fi}|^2+|(d_{-1})_{fi}|^2\}$$

に比例する．このようにして，横方向では二つの σ-成分と π-成分が観測され，その強度はそれぞれ

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ M\mp1 & \pm1 & -M \end{pmatrix}^2 \text{ および } \begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ M & 0 & -M \end{pmatrix}^2 \tag{51.8}$$

に比例する（σ-成分の強度は縦方向の観測値の 1/2 である）. この際 π-成分は z 軸方向の直線偏光で, σ-成分はこの方向からは y 軸方向の直線偏光として観測される.

ゼーマン成分の相対強度は, 始めと終りの J および M の値で完全に決定され, 準位の他の性質によらないことを指摘しておこう.

選択則は同一準位のゼーマン成分間の電気的 2 重極遷移を禁止している. なぜかというと, それらは同じ偶奇性を持つからである. 前節の終りで, 準位の超微細構造の成分間の遷移に対して示されたのと同じ原因から, 上記の遷移は磁気的 2 重極として実現される. 量子数 M についての選択則のために, 遷移は隣接する成分 ($M'-M = \pm 1$) 間でのみ起こる[1].

弱い電場内における原子準位の分裂（シュタルク効果）は, 磁場内での分裂と違って, 角運動量の方向に関する縮退を完全に取り除くことにはならない. すべての準位は $M = 0$ の準位を除いて, 2 重縮退のままである. すなわち, 角運動量の投影が M および $-M$ の二つの状態が, そのおのおのに対応している.

スペクトル線のシュタルク成分の相対強度の計算は, 上記のゼーマン効果に対するものとまったく類似している[2]. この際, π-成分の強度には ($M \neq 0$ のとき) $M \to M$ および $-M \to -M$ の遷移が寄与をし, σ-成分の強度には $M \longrightarrow M\pm1$, $-M \longrightarrow -(M\pm1)$ の遷移が寄与する. したがって, たとえば横方向の観測では, π-成分の強度は

$$2\begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ M & 0 & -M \end{pmatrix}^2$$

に比例し, σ-成分の強度は和

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ M\pm1 & \mp1 & -M \end{pmatrix}^2 + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ -M\mp1 & \pm1 & M \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ M\pm1 & \mp1 & -M \end{pmatrix}^2$$

に比例する（下の段の数すべての符号を変えるとき $3j$-記号は符号を変えるだけで, したがってその 2 乗は変わらないことを思い出そう）.

たとえ弱くても外場内では, J は厳密には保存されなくなる. 一様な電場内では, 角運

---

1) これらの遷移は普通センチメートル領域にあり, 吸収および強制輻射（電子磁気共鳴）で観測される. すなわち, 吸収する原子は（ゼーマン分離を行なう）強定磁場, および共鳴振動数のラジオ周波数の弱い場のなかに置かれる.

2) われわれはここで水素原子以外のすべての原子に特有な, 2 次の量であるシュタルク効果 (III, §76 参照) を考慮しよう. 電場は十分弱く, それにより表わされる準位の分離は, 微細構造の間隙にくらべてさえも小さいと仮定される.

動量の投影 M の保存だけが正確に守られる．したがって，弱電場内での輻射遷移の際，角運動量の保存は厳密な要求ではない．そして原子スペクトルのなかに，普通の選択則で禁止される線が現われうる．

これらの線の強度の計算は，2重極モーメントの行列の補正の計算であり，これが今度は，定常状態の波動関数の補正の決定を要求することになる．（弱い外場についての）1次近似の摂動論で，波動関数中に，摂動（電場内では $-\boldsymbol{Ed}$）の0と異なる行列要素により，始めの波動関数と結ばれた状態の《混合》が現われる．すなわち，状態 ψ_1 に対するある状態 ψ_2 の付加項は

$$\frac{-\boldsymbol{E}\boldsymbol{d}_{21}}{E_1-E_2}\psi_2$$

である．その結果，《禁止された》遷移の行列要素に

$$\frac{-(\boldsymbol{E}\boldsymbol{d}_{21})\boldsymbol{d}_{32}}{E_1-E_2}$$

という項が現われる．もしも《中間》状態2から始および終状態1および3への遷移が許されるならば，これは0と異なる．

§52. 原子輻射．水素原子

水素原子は，遷移行列要素の計算が完全に解析的な形で遂行されうる唯一の場合である (W. Gordon, 1929)．

水素原子の状態の偶奇性は $(-1)^l$ に等しい．すなわち，電子の軌道角運動量により一意的に決定される（状態の偶奇性を決定する量子数 l は，正確な相対論的波動関数に対しても，すなわちスピン軌道相互作用を考慮しても，その意味を保っていることを思い起こそう）．したがって，偶奇性の選択則は l の変化のない電気的2重極遷移を厳密に禁止している．$l \longrightarrow l\pm 1$ の遷移だけが可能である．主量子数 n の変化は制限されない．

水素原子の2重極モーメントは電子の動径ベクトルに帰する．すなわち $\boldsymbol{d}=e\boldsymbol{r}$ である．水素原子内の電子の波動関数は角部分と動径関数 R_{nl} の積であるから，動径ベクトルの既約行列要素は積の形で表わされる．

$$\langle n', l-1\|\boldsymbol{r}\|n l\rangle = \langle l-1\|\boldsymbol{\nu}\|l\rangle\int_0^\infty R_{n', l-1}\, r R_{nl}\, r^2 dr.$$

ここで $\langle l-1\|\nu\|l\rangle$ は $\boldsymbol{r}$ の方向の単位ベクトル $\boldsymbol{\nu}$ の既約行列要素である．これは

$$\langle l-1\|\nu\|l\rangle = \langle l\|\nu\|l-1\rangle^* = i\sqrt{l}$$

に等しい（III, §29 の問題参照）．このようにして

$$\langle n', l-1\|r\|nl\rangle = -\langle nl\|r\|n', l-1\rangle = i\sqrt{l}\int_0^\infty R_{n', l-1}R_{nl}r^3 dr. \qquad (52.1)$$

水素原子の離散スペクトルの非相対論的波動関数は，公式 III (36.13) で与えられる[1]．

$$R_{nl} = \frac{2}{n^{l+2}(2l+1)!}\sqrt{\frac{(n+l)!}{(n-l-1)!}}(2r)^l e^{-r/n}F\left(-n+l+1, 2l+2, \frac{2r}{n}\right). \qquad (52.2)$$

二つの合流型超幾何関数の積を持つ積分 (52.1) は，III, §f で導かれた公式を使って計算される[2]．計算の結果

$$\langle n', l-1\|r\|nl\rangle = i\sqrt{l}\,\frac{(-1)^{n'-1}}{4(2l-1)!}\sqrt{\frac{(n+l)!(n'+l-1)!}{(n-l-1)!(n'-l)!}}\,\frac{(4nn')^{l+1}(n-n')^{n+n'-2l-2}}{(n+n')^{n+n'}}$$
$$\times\left\{F\left(-n+l+1, -n'+l, 2l, -\frac{4nn'}{(n-n')^2}\right)\right.$$
$$\left.-\left(\frac{n-n'}{n+n'}\right)^2 F\left(-n+l-1, -n'+l, 2l, -\frac{4nn'}{(n-n')^2}\right)\right\}. \qquad (52.3)$$

ここで $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ は超幾何関数である．与えられた場合のパラメータ α, β は負の整数（あるいは 0）に等しいので，この関数は多項式になってしまう[3]．

いくつかの特別な場合に，(52.3) から得られた式を参考のために並べよう（l の値は分光学的記号 s, p, d, ……で示してある）．

$$|\langle 1s\|r\|np\rangle|^2 = \frac{2^8 n^7(n-1)^{2n-5}}{(n+1)^{2n+5}},$$

$$|\langle 2s\|r\|np\rangle|^2 = \frac{2^{17}n^7(n^2-1)(n-2)^{2n-6}}{(n+2)^{2n+6}}, \qquad (52.4)$$

$$|\langle 2p\|r\|nd\rangle|^2 = \frac{2^{19}n^9(n^2-1)(n-2)^{2n-7}}{3(n+2)^{2n+7}},$$

---

1) この節では原子単位が用いられる．普通の単位では，下記の座標の既約行列要素に対する式には，$\hbar^2/me^2$ を掛ける必要がある（もしも原子番号 Z の水素類似のイオンを扱うのならば，これは $\hbar^2/mZe^2$ になる．

2) そこで導入された記号のなかでは，積分 $J^{12}_{2l+2}(-n+l+1, -n'+l)$ の計算を言っている．これは公式 (f.12)～(f.16) を使って実現される．

3) 水素原子に対する行列要素，および遷移確率の数表はつぎの本を参照のこと：H.ベーテ，E.サルピーター《1および2個の電子を持つ原子の量子力学》1960.

$$|\langle 2p\|r\|ns\rangle|^2=\frac{2^{15}n^9(n-2)^{2n-6}}{3(n+2)^{2n+6}}.$$

公式 (52.3) は主量子数 n の変化のない遷移（準位の微細構造の成分間の遷移）に対しては役に立たない．この場合 ($n=n'$)，積分を実行するために，一般化されたラゲール多項式により動径関数を表わすことから始めよう．すなわち

$$R_{nl}=-\frac{2}{n^2}\sqrt{\frac{(n-l-1)!}{[(n+l)!]^3}}\,e^{-r/n}\left(\frac{2r}{n}\right)^l L_{n+l}^{2l+1}\left(\frac{2r}{n}\right) \tag{52.5}$$

となる．積分

$$\int_0^\infty R_{n,l-1}R_{nl}r^3dr \backsim \int_0^\infty e^{-\rho}\rho^{2l+2}L_{n+l}^{2l+1}(\rho)L_{n+l-1}^{2l-1}(\rho)d\rho$$

において，多項式のなかの一つを微分形の表わし方に変えよう．すなわち(III, §d 参照)

$$L_{n+l}^{2l+1}(\rho)=-\frac{(n+l)!}{(n-l-1)!}e^{\rho}\rho^{-2l-1}\left(\frac{d}{d\rho}\right)^{n-l-1}e^{-\rho}\rho^{n+l}.$$

$(n-l-1)$ 回の部分積分ののち

$$\int_0^\infty e^{-\rho}\rho^{n+l}\left(\frac{d}{d\rho}\right)^{n-l-1}\rho L_{n+l-1}^{2l-1}(\rho)d\rho$$

の形の積分を得る．ここでラゲール多項式を，公式

$$L_n^m(\rho)=(-1)^m n!\sum_{k=0}^{n-m}\binom{n}{m+k}\frac{(-\rho)^k}{k!}$$

にしたがってあらわな形に表わす．微分したのち，和のなかでは全部で三つの項が残る．その後の積分は初等的である．計算は簡単な結果へと導く．

$$\langle n,l-1\|r\|nl\rangle=i\sqrt{l}\cdot\frac{3}{2}n\sqrt{n^2-l^2}. \tag{52.6}$$

積分

$$\int_0^\infty R_{n',l-1}R_{nl}r^3dr=\int_0^\infty \chi_{n',l-1}(r\chi_{nl})dr$$

（ここで $\chi_{nl}=rR_{nl}$）は，関数 $r\chi_{nl}$ の直交関数系 $\chi_{n',l-1}$ ($n'=1,2,\cdots\cdots$) による展開係数である．これらの係数の絶対値の2乗の和は，展開される関数の2乗の積分に等しい[1]．

---

1) 和は離散スペクトルの状態についても，連続スペクトルの状態についても同様に行なう．

したがって

$$\sum_{n'}|\langle n', l-1 \| r \| nl\rangle|^2 = l\int_0^\infty r^2\chi_{nl}^2\,dr \tag{52.7}$$

となる．状態 nl での r^2 の平均に対するよく知られた式を使って（III (36.16) 参照），つぎのような総和則を得る．

$$\sum_{n'}|\langle n', l-1 \| r \| nl\rangle|^2 = l\frac{n^2}{2}[5n^2+1-3l(l+1)]. \tag{52.8}$$

n, l の値が与えられ，n' が大きい値のとき，遷移 $nl\to n'l'$ の行列要素は，法則

$$|\langle n'l' \| r \| nl\rangle|^2 \backsim \frac{3}{n'^3} \tag{52.9}$$

にしたがって減少する．これは特別な式 (52.4) からも，一般式 (52.3) からも確かめられる．この結果はまったく自然である．なぜかというと，クーロンのエネルギー準位 $E'\sim -1/2n'^2$ は，n' が大きいと準連続的に配置され，dE' の領域にあるどれかの準位への遷移確率は，これらの準位の配置の密度に比例し，その密度自身は $\backsim n'^{-3}$ である．

水素原子のシュタルク効果は，よく知られているように，特色を持っている (III, §77)．すなわち，分離が電場の１乗に比例する．このとき電場は強くない（摂動論の適用条件）けれども，しかし同時に，準位の分離がその微細構造とくらべて大きいと仮定されている．この条件では一般に，角運動量の大きさは保存されない．そして準位は放物線型量子数 n_1, n_2, m で識別する必要がある．これらの最後のものは磁気量子数 m で，前と同じように軌道角運動量の z 軸（電場の方向）への投影であり，これは与えられた条件（スピン軌道相互作用の無視）では保存される．したがって，これに対しては普通の選択則

$$m'-m = 0, \pm 1 \tag{52.10}$$

が成り立つ．量子数 n_1, n_2 の変化に対しては制限がない．

放物線座標での２重極モーメントの行列要素は，解析的に計算することができる．しかしながら，得られた公式は非常に大きく，われわれはここでそれを導くことはやめよう[1]．

問　題

水素原子の準位のシュタルク分離を，分離の大きさが微細構造の間隔にくらべて小さい

1) この公式および対応する数表は前に触れたH．ベーテおよびE．サルピーターの著書参照．

（しかしラム・シフトとくらべると大きい）場合について求めよ．

解　示された条件の下で，$l=j\pm 1/2$ を持った非摂動準位には2重縮退が残る．この関係で，シュタルク分離は電場について線型である．分離の大きさ Δ は永年方程式

$$\begin{vmatrix} -\Delta & -E(d_z)_{12} \\ -E(d_z)_{21} & -\Delta \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta = \pm E|(d_z)_{12}|$$

から決められる（添字1，2は $l=j\pm 1/2$ を持ち，与えられた磁気量子数 m の状態に対応する．摂動 $V=-Ed_z$ は m について対角型であり，l について対角型の要素は持たない）．軌道型の量 d_z の行列要素は，公式 III(29.7)，III(109.3) を使って計算される．それによると

$$\langle j, l-1, m|d_z|jlm\rangle = \frac{m}{\sqrt{j(j+1)(2j+1)}}\langle j, l-1\|d\|jl\rangle,$$

$$\langle j, l-1\|d\|jl\rangle = -(2j+1)\begin{Bmatrix} l-1 & j & 1/2 \\ j & l & 1 \end{Bmatrix}\langle l-1\|d\|l\rangle.$$

ここで $l=j+1/2$ と置く必要がある．量 $\langle l-1\|d\|l\rangle$ は (52.6) から持ってくる．その結果

$$\Delta = \pm\frac{3}{4}\sqrt{n^2-(j+\tfrac{1}{2})^2}\,\frac{nm}{j(j+1)}E.$$

§53.　2原子分子の輻射．電子スペクトル

分子スペクトルの特質は，まず第一に，分子のエネルギーが電子，振動，回転部分に分れていることに関連している．そしてこれらのなかで，あとのものはその前のにくらべて小さくなっている．2原子分子の準位構造は III，第11章で詳しく調べられている．ここではそこで生ずるスペクトルの形の解明や，そのなかの線強度の計算を行なおう[1]．

遷移のとき，分子の電子状態が（一般的に言えば，それとともに振動および回転状態も）変わる一般的な場合から始めよう．この遷移の振動数は，スペクトルの可視部および紫外部にある．これら全体を分子スペクトルの**電子スペクトル**と呼ぶ．このとき，われわれはいつも電気的2重極遷移を考えている．他の型の遷移は分子スペクトルでは一般に重要性が少ない．

---

1)　これから先の記述は，III，§78，§82～§88 に含まれる資料に基づいている．本文を大きくしてしまうのを避けるため，これらの節の決まりきった引用は避けることにしよう．

任意の系における2重極遷移と同様に，全角運動量Jに対する選択則が成立する．

$$|J'-J|\leqslant 1\leqslant J+J'. \tag{53.1}$$

系の偶奇性についての厳密な選択則は，今の場合準位の**符号**についての選択則に対応する．分子スペクトルで用いられている述語によると，反転（電子と原子核の座標の符号の変化）に際して，符号を変える，あるいは変えない波動関数を持つ状態を**正**あるいは**負**と呼ぶ．このようにして厳密な選択則を得る．すなわち

$$+\longrightarrow -,\quad -\longrightarrow +. \tag{53.2}$$

もしも分子が（同一の同位体の原子核を持つ）同じ原子から成り立っていれば，原子核の座標の交換に対する対称性が現われる．すなわち，この変換に対して符号を変えない波動関数を持つ**対称**（s）準位，および符号を変える**反対称**（a）準位である．電子の2重極モーメントはこの変換に関係がないから，その行列要素はこの対称性を変えない遷移に対してのみ0と異なる[1]．すなわち

$$s\longrightarrow s,\quad a\longrightarrow a. \tag{53.3}$$

しかしながら，この選択則は絶対的に厳密なものではない．準位に与えられた対称性があることは，分子に原子核の全スピンのある一定値Iが存在することと関連している．原子核スピンと電子スピンとの相互作用が非常に弱いために，Iは完全に厳密ではないが非常な精度で保存する．この相互作用を考えるとIは一定値を持たず，対称性（sあるいはa）は保存しない．そして選択則(53.3)は失われる．

同じ原子からなる分子の電子項はまた，自分の**偶奇性**（gあるいはu）——原子核の座標は変えないでおいて，（分子の中心に対する）電子の座標の符号を変えたときの波動関数のふるまい——によって特長づけられる．一方では電子項のこれらの性質と，他方では原子核の対称性とその項と関連した回転準位の符号とのあいだに密接な関係がある．偶(g)の電子項に関する準位は$s+$あるいは$a-$の性質を，また奇の項に対しては$s-$あるいは$a+$の性質を持つことができる．(53.2)と(53.3)の選択則から，またつぎの選択則が出てくる．

$$g\longrightarrow u,\quad u\longrightarrow g. \tag{53.4}$$

近似的な選択則としては，(53.4)は同一元素の異なる同位元素からなる分子に対しても

---

1) この選択則は明らかに，任意の多重度の遷移に関して成り立つ．

成立する．原子核の電荷が同じであるから，原子核が動かないときの電子項を考察すると，このような場合われわれは，(原子核のあいだの距離を2等分する点に)対称中心を持つ電場内の電子系を扱うことになる．この点に関する反転に対する電子波動関数の対称性は項の偶奇性を決定し，電気的2重極モーメントのベクトルがこの変換の際に符号を変えるから，　われわれは選択則(53.4)に到達する．このような導き方に基づいた選択則の近似性は，原子核を動かないとみなす要求と関連している．したがって，電子状態と分子の回転との相互作用を考慮すると，それは破られる．

これ以上の選択則は，分子内のいろいろの相互作用の比較的な大きさについて（すなわち，その結合の型について）のなんらかの具体的な仮定と結びついている．それによって，これらの選択則は単なる近似的なものとしてのみ可能である．

2原子分子の大部分の電子項は，結合型aあるいはbと関係している．これら二つの型は，軌道角運動量と軸との結合（分子内の両方の原子の電気的相互作用）が，他のすべての相互作用にくらべて大きいことに特徴がある．これに関連して量子数ΛとSが存在する（これは電子の軌道角運動量の分子軸への投影と，全電子スピンである）．軌道性の量，すなわち電子の軌道角運動量はスピン演算子と可換である．したがって

$$S'-S=0 \qquad (a,\ b\text{ の場合}) \tag{53.5}$$

となる．量子数Λの変化は選択則

$$\Lambda'-\Lambda=0,\ \pm1 \qquad (a,\ b\text{ の場合}) \tag{53.6}$$

にしたがう．ここで$\Lambda=0$を持つ項のあいだの遷移(Σ-項)に対しては，付加的な選択則

$$\Sigma^+\to\Sigma^+,\ \Sigma^-\to\Sigma^- \qquad (a,\ b\text{ の場合}) \tag{53.7}$$

が成り立つ（状態Σ^+およびΣ^-は，分子軸を含む平面に対する鏡映に関するふるまいで区別されることを思い起こそう）．選択則(53.6)，(53.7)は，原子核に固く結びついた座標系（III，§87参照）で分子を考察することによって得られる．選択則(53.6)は，原子の場合の磁気量子数についての選択則に似ている．

結合型aおよびbは，≪スピン-軸≫相互作用のエネルギーと回転エネルギー（回転準位の差）との相互関係で互いに区別される．aの場合には前者が後者より大きい．そしてbの場合はずっと小さい．以下これらの場合を別々に考察しよう．

aの場合　この場合量子数Σ，すなわち全スピンの分子軸への投影（およびこれとともに$\Omega=\Sigma+\Lambda$，すなわち全角運動量の投影）が存在する．もしも（始めと終りの）双方の

状態が a の場合であれば，選択則

$$\Sigma' - \Sigma = 0 \qquad (a\text{の場合}) \tag{53.8}$$

が成り立つ（これはすでに思い起こした，2重極モーメントとスピンの可換性から出てくる）．(53.6) と (53.8) から

$$\Omega' - \Omega = 0,\ \pm 1 \tag{53.9}$$

が出る[1]．もしも $\Omega = \Omega' = 0$ ならば，一般則 (53.1) に加えて $J' = J$ の遷移が禁止される[2]．すなわち

$$\Omega = \Omega' = 0 \quad \text{のとき} \quad J' - J = \pm 1 \quad (a\text{の場合}). \tag{53.10}$$

二つの異なる（a 型の）電子状態に関係する，ある一定の振動準位のあいだの遷移を考察しよう．電子項の微細構造を考えると，これらの準位のおのおのは，いくつかの成分に分れる．選択則 (53.5) によりその数 $(2S+1)$ は両方とも同じである．(53.8) にしたがって，一方の準位の成分のおのおのは他方の同じ Σ の値を持つ一つの成分とのみ結合する．

さらに同じ Σ の1対の準位をとろう．これらの Ω および Ω' の値は（Λ および Λ' とともに）0あるいは ±1 が可能である．回転を考えると，これらのおのおのは量子数 J および J' の値が異なり，$J \geqslant |\Omega|$, $J' \geqslant |\Omega'|$ の値をとる一連の準位に分れる．遷移確率のこれらの量子数への依存性は一般的な形で作ることができる(H. Hönl, F. London, 1925)．

遷移 $n\Lambda\Omega J M_J \longrightarrow n'\Lambda'\Omega' J' M'_J$（$n$ は電子項を特長づける，Ω および Λ 以外の残りの量子数である）の行列要素は

$$|\langle n'\Lambda'\Omega'J'M'_J|d_q|n\Lambda\Omega J M_J\rangle| = \sqrt{(2J+1)(2J'+1)}$$
$$\times \begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ -\Omega' & q' & \Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ -M'_J & q & M_J \end{pmatrix} |\langle n'\Lambda'|\bar{d}_{q'}|n\Lambda\rangle|. \tag{53.11}$$

ここで d_q および $\bar{d}_{q'}$ はそれぞれ，動かない座標系 xyz，および ζ 軸を分子軸に向けた《動く》座標系 $\xi\eta\zeta$ に関する，2重極モーメントのベクトルの球面成分である（この

---

1)　この選択則はまた c の場合（軌道角運動量と軸との結合が《スピン軌道》結合にくらべて小さいとき）にも残る．そこでは量子数 Λ, Σ は別々には存在しない．

2)　この選択則は，原子の場合に $M = M' = 0$ のときに $J = J'$ の遷移の禁止に似ている (213 頁脚注参照)．しかし，そこでは外場の存在するときにだけ，これは興味があった．今の場合，選択則は直接にあとで導かれる公式 (53.12) から出てくる．$3j$-記号 $\begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ は $J' = J$ のとき，$J' + J + 1$ が奇数であるから0になる．

公式は (b. 6) および同等な公式 III (87. 3), (87. 4) を使って求められる). 行列要素 $\langle n'\Lambda'|\bar{d}_{q'}|n\Lambda\rangle$ は回転量子数 J, J' には依存しないで, 電子状態の性質にのみ依存する (ここで今の場合は量子数 Σ[1] に依存しない). したがって, 行列要素の記号のなかで添字 $\Omega'=\Lambda'+\Sigma$ および $\Omega=\Lambda+\Sigma$ は落としてある.

$n\Lambda\Omega J \longrightarrow n'\Lambda'\Omega'J'$ の遷移確率は行列要素 (53. 11) の平方を M'_J について加えたものに比例する. 公式 III (106. 12)

$$\sum_{M'_J}\begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ -M'_J & q & M_J \end{pmatrix}^2 = \frac{1}{2J+1}$$

を使って

$$W(n\Lambda\Omega J \to n'\Lambda'\Omega'J') = (2J'+1)\begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ -\Omega' & \Omega'-\Omega & \Omega \end{pmatrix}^2 B(n',n\,;\Lambda',\Lambda) \qquad (53.12)$$

を得る. ここで係数 B は J, J' によらない (われわれは結局, 異なる J, J' の遷移[2] の振動数の差が相対的に非常に小さいことを仮定している).

(53. 12) を J' と Ω' について加えると, (3j- 記号の直交性 III(106. 13) のために) われわれは単に $B(n',n\,;\Lambda',\Lambda)$ を得る. 言いかえれば, Ω 状態の回転準位 J から, すべての Ω' 状態の準位 J' への全遷移確率は J に依存しない.

b の場合 この場合には全角運動量 J と並んで, そのスピンを考慮しない分子の角運動量の量子数 K が存在する. この量子数についての選択則は, すべての軌道性ベクトル量 (電気的2重極モーメントもそうである) に対する一般の選択則と一致する. すなわち

$$|K'-K| \leqslant 1 \leqslant K+K' \qquad (b\text{ の場合}) \qquad (53.13)$$

となり, $\Lambda=\Lambda'=0$ のとき $K=K'$ の遷移も付加的に禁止される ((53. 10) と同様). したがって

1) このことは, III, §29 の始めにスカラー量 f に対して行なわれたのとまったく同様にして確かめられる. 与えられた場合, ベクトル量 $\boldsymbol{d}$ の演算子は (ゼロ近似で) 保存するベクトル $\boldsymbol{S}$ の演算子と交換する. そして Σ は $\boldsymbol{S}$ の回転座標系の ζ 軸への投影である. そしてこの座標系で $\boldsymbol{d}$ と $\boldsymbol{S}$ の可換性の条件を考慮しなければならない.

2) 今考察されている回転準位 J のおのおのは Λ-重複を考えると, さらに二つの準位に分れる. そのなかの一つは正で, 他は負である. したがって, 一つの遷移 $J\to J'$ の代りに, われわれは選択則 (53. 2) を考慮して, 二つの遷移を持つことになる. 準位 J の正 (負) 成分から準位 J' の負 (正) 成分への遷移である. これらの遷移の確率は同じである.

$$K'-K=\pm 1 \qquad (\Lambda=\Lambda'=0 \text{ のとき}) \tag{53.14}$$

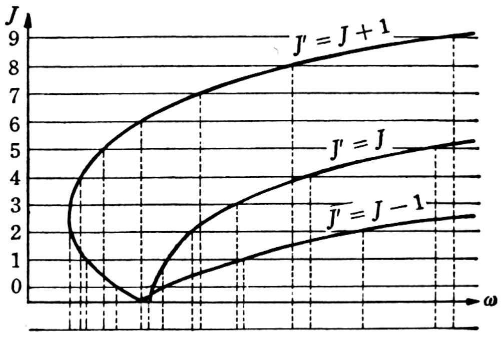
となる．b 型に属する二つの電子状態の，一定の振動準位の回転成分のあいだの遷移を考察しよう．これらのあいだの遷移確率は同じ公式(53.12)で定義される．ただしここで J，Ω の代りに K, Λ と書く必要がある．$S \neq 0$ のとき，微細構造を考えると，各回転準位 K は $J=|K-S|, \cdots\cdots, K+S$ を持つ $2S+1$ 個の成分に分れる．その結果1本の $J \to J'$ の線の代りに多重線が現われる．今の場合，われわれは自由な（分子軸に結びつかない）角運動量 $\boldsymbol{K}$ と $\boldsymbol{S}$ の合成を扱っているので，多重項のいろいろな線に対する相対的遷移確率の公式は，原子スペクトルの微細構造の成分に対する公式 (49.15) と一致する．そこでは（LS-結合の場合）角運動量 $\boldsymbol{L}$ および $\boldsymbol{S}$ が主役を演じている．

このようにして，われわれは2原子分子に現われるすべての基本的な場合の，可能なスペクトル線を決定する選択則を考察した．

二つの与えられた電子-振動準位の回転成分のあいだの遷移による線の全体は，分光学で言われるように帯を形成している．回転の線間隔が小さいので，帯のなかの線は非常に密に並んでいる．これらの線の振動数は差

$$\hbar\omega_{JJ'}=\text{const}+BJ(J+1)-B'J'(J'+1) \tag{53.15}$$

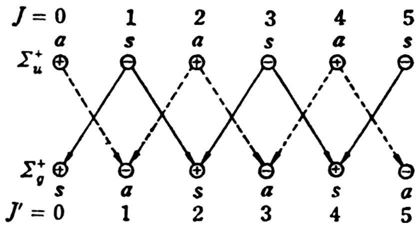
で与えられる．ここで B, B' は両方の電子状態の回転の定数である（余分な複雑化を避けるために電子項は一重項と仮定した）．$J'=J$，$J\pm 1$ のとき，公式 (53.15) は図を使って（第2図）三つの枝（放物線）に描かれる．そのなかで整数の J に対する点が振動数の値を決定する（第2図の枝の配置は $B'<B$ に対応する．$B'>B$ のとき，これは ω の小



第 2 図

さい方の側にひろがっている．このときは$J'=J-1$に対する曲線が上にくる[1]）．曲がっている枝の存在は図から明らかなように，ある定まった極限の位置に線を圧縮することになる（**帯頭**）．

線の強度について言えば，同一の同位元素の原子からなる分子の電子スペクトルのある帯のなかでは，**強度の交替**という独自の現象にも触れる必要がある（W. Heisenberg, F. Hund, 1927）．原子核スピンと結びついた対称性の要求からつぎのようになる．すなわち，偶および奇のKを持つ回転成分の電子的Σ-項は，原子核に関して反対の対称性を持ち，それぞれ異なる原子核の統計的重みg_sおよびg_aを持つ（III, § 86 参照）．(53. 14)の選択則にしたがって，二つの異なるΣ-項間の遷移は$J'=J\pm1$だけが許される．このとき選択則(53. 4)により，Σ-項の一つは偶で，他は奇である．その結果，$J'-J$の値が与えられたとき，Jの値の順の一連の遷移は，交互に対称準位の対および反対称準位の対のあいだで起こる（これはΣ_g^+およびΣ_u^+状態を例として第3図に描かれている）．一方，観測される線強度は与えられた始状態にある分子の数，つまりその統計的重みに比例する．したがって，一連の並んだ線の（$J=1, 2, \cdots\cdots$）強度は公式(53. 12)[2]で予言される単調な変化のほかは，g_sとg_aに比例し交互に強かったり弱かったりする．



第 3 図

二つの異なる電子項のあいだの遷移の際の振動量子数の変化に対しては，なんら厳密な選択則は存在しない．しかしながら，振動状態の最も起こり易い変化の予想を許す法則が存在する（**フランク＝コンドンの原理**）．それは原子核の運動の準古典性に基礎を置き，その質量の大きいことと関連している（III, § 90 の前期解離についての記述を見よ）[3]．

電子項$U(r)$および$U(r')$の振動状態EおよびE'のあいだの，遷移の行列要素を定義する積分のなかで

1）$J'=J+1$，J，$J-1$の遷移に対応する一連の線をそれぞれP-，Q-およびR-枝と呼ぶ．

2）このとき，全核スピンの値の異なるすべての状態は，一様に配列していると仮定した．

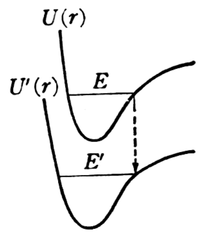
3）厳密に言えば，振動量子数もまた十分大きいことが必要である．

$$U(r_0)-U'(r_0) = E-E' \qquad (53.16)$$

である点 $r=r_0$ (すなわち，両方の状態の原子核の運動に相対的な運動量が同じ $p=p'$ である) の近傍が基本的な役割を果たしている．E の値が与えられたとき，(終りのエネルギー E' の関数としての) 遷移確率は差 $E-U$ および $E'-U'$ が小さければ小さいほど大きくなる．そして

$$E-U(r_0) = E'-U'(r_0) = 0 \qquad (35.17)$$

のときに極大になる．すなわち，≪遷移点≫ r_0 (方程式 (53.16) の根) は，古典的な停留点と一致する (第4図では E と最も起こり易い E' との関係を図示している)．わかり易く考えると，原子核が停滞する点，したがってその近くでは相対的に長い時間をすごす点の近くで遷移が最も起こり易いということになる[1]．



第 4 図

§54. 2原子分子の輻射．振動および回転スペクトル

前節で列挙した選択則や遷移確率の公式は，分子の電子状態が変わらないような遷移に対しても有効である[2]．ここで，これらの遷移の特色を詳しく調べよう．

まず第一に，選択則 (53.4) により，電子状態の変化のない (2重極) 遷移は同一原子の分子では禁止される．なぜかというと，このような遷移では電子項の偶奇性は不変のままであるからである．§53で述べられたことからわかるように，この禁止は原子核のスピンと電子との相互作用によって破られ，また同じ元素の異なる同位元素の分子に対しては，電子状態への回転の影響を考慮すると破られるだろう．

2重極モーメントの行列要素の計算は (III, §87の公式にしたがって)，分子とともに回転する座標系での計算に帰する．この系のなかで分子の波動関数は，与えられた原子核間の距離 r のときの電子の波動関数と，電子および原子核の有効場 $U(r)$ のなかでの原子核の振動運動の波動関数との積である．原子核の運動の電子状態への影響を完全に無視する

1) (準古典的近似で) この極大点の近くで，種々の遷移の確率の分布を見いだす問題は III, §90，問題3と同じである．ただ若干の記号のつけ変えがある点だけが異なっている．

2) 振動 (それとともに回転) 状態の変化を伴う遷移は，いわゆる分子の**振動スペクトル**を形成する．これは近赤外領域 (波長 $<20\mu$) にある．回転状態の変化だけを伴う遷移は**回転スペクトル**を形成する．これは遠赤外領域 (波長 $>20\mu$) にある．

と，考えられている遷移の始めと終りの電子の波動関数は同じである．したがって電子座標での積分は，行列要素のなかで単に分子の平均2重極モーメント $\bar{d}$ を距離 r の関数として与える（これは明らかに分子の軸方向を向く）．振動が小さいので，関数 $\bar{d}(r)$ は振動座標 $q=r-r_0$ の冪に展開することができる．振動状態の変化と結びついた遷移に当たって，展開の0次の項は，同じ場 $U(q)$ のなかの運動の波動関数の直交性のために落ちてしまい，したがって q に比例する項が残る．もしも振動を調和振動とみなせば，線型振動子のよく知られた性質（III, §23）にしたがって，行列要素は隣りあった振動状態のあいだの遷移に対してのみ0と異なる．言いかえれば，振動量子数 v に対して選択則

$$v'-v=\pm 1 \tag{54.1}$$

が成立する．しかしながら，非調和振動または関数 $\bar{d}(q)$ の展開のつぎの項を考えれば，この選択則は破られる．

純回転性遷移（振動状態の変化もない）のときは，2重極モーメントの動く軸 ζ への投影の行列要素は，単に分子の平均2重極モーメント $\bar{d}=\bar{d}(0)$ に等しいと置くことができる[1]．その結果，遷移 $J\longrightarrow J-1$ の確率に対して，公式

$$w(nJ\to n, J-1)=\frac{4\omega^3}{3\hbar c^3}\bar{d}^2\frac{J^2-\Omega^2}{J(2J+1)} \tag{54.2}$$

が得られる．これは確率の（(53.12) のように）相対値だけでなく，絶対値を計算することも可能にしている．（公式 (54.2) は a の場合に対して書かれている．b の場合に対しては，J，Ω の代りに K, Λ を書く必要がある）．

純回転性遷移の振動数は，回転エネルギー $BJ(J+1)$ の差として与えられ

$$\hbar\omega_{J,J-1}=2BJ \tag{54.3}$$

に等しい．相連なる線は互いに等間隔 $(2B)$ である．

§55. 原子核の輻射

原子核の γ-輻射に対しては普通，系の大きさ（原子核の半径 R）が光子の波長にくらべて小さいという条件は満足されている．しかしながら，原子核準位の間隔（したがって γ-量子のエネルギー）は普通，原子核内の1個の核子あたりのエネルギーにくらべて小さい．したがって，R/λ という量は核内核子の速度 v/c と直接関係はないが，一般にそれよ

1) 同じ原子の分子では，対称性の考察から明らかなように，$\bar{d}=0$ である．

りいちじるしく小さい．これに対応して，Ml-輻射の確率は一般に，E, $l+1$ - 輻射の確率よりも大きい（§50の初めとくらべよ）．

原子核の全角運動量(≪スピン≫)について，および偶奇性についての一般の選択則は，任意の系に対するものと同じである．核輻射の特色は高多重度の遷移が多いことである．普通2重極輻射だけがある原子と反対に，低エネルギーの原子核ではこのような遷移はまれであり，選択則で禁止されることがわかる．

もしも，原子核の輻射遷移が1粒子遷移，すなわち原子核の≪芯≫の状態が変わらないで一つの核子の状態が変わるとみなすことができるならば，その核子の角運動量についての選択則が付け加わる．しかしながら，実際にはこのような≪1粒子の≫選択則を守る精度は，非常に低い．

荷電スピンについての選択則は，原子核には特徴的である．荷電スピンの投影 T_3 は，原子核の質量数と原子番号のみによって定義されることを思い起こそう．すなわち

$$T_3 = \frac{1}{2}(Z-N) = Z-\frac{A}{2}$$

である．T_3 の値が与えられたとき，荷電スピンの絶対値は，$T \geqslant |T_3|$ の任意の値を取りうる．輻射遷移に対する量子数 T についての選択則が出てくるのは，核子の荷電スピンの演算子を使って表わされた原子核の電気的および磁気的モーメントの演算子が，荷電空間でのスカラーおよびベクトルの x_3- 成分の和になっていることと関連している（III, §115参照）．したがってその行列要素は，条件

$$T'-T = 0,\ \pm 1 \tag{55.1}$$

のときにのみ0と異なる．しかしながら，この法則自身は軽い核（これに対してのみ十分な精度で荷電スピンの保存について語ることができる）の遷移に特別な制限は課さない．これらの原子核の低い準位のなかには，実際には $T>1$ の準位はないという事情である．

電気的2重極モーメントに対しては，荷電スカラーの部分が落ちて，その演算子は荷電ベクトルの x_3- 成分になってしまうこと（III, §115参照）と関連して，$E1$- 遷移に対してはさらに付加的な選択則が存在する．したがって，もしも $T_3=0$ ならば，付加的に $\Delta T = 0$ の遷移が禁止される．言いかえれば，中性子と陽子の数が同じ原子核（$N=Z$, $A=2Z$）では $E1$- 遷移は

$$T'-T = \pm 1 \quad (T_3 = 0) \tag{55.2}$$

のときにだけ可能である．もちろんこの選択則が守られる度合は，原子核の荷電スピンが保存する度合に依存する．

個々の核子の運動に際し，核の残りの部分の反跳の効果も，核の$E1$-遷移の確率の大きさに影響がある．この効果の結果，2重極モーメントを作るのに陽子はeの代りに有効電荷 $e(1-Z/A)$ で参加し，中性子は0の代りに $-eZ/A$ の電荷で参加する（III, §117参照）．陽子の有効電荷の減少は，$E1$-遷移の確率の若干の抑制をもたらす．

非球形核のエネルギー準位は回転構造を持っている．これに関連して，これらの核に特有のγ-線の回転構造が現われる．

≪動かない≫非球形（軸性）原子核のなかで核子が運動する場の対称性は，同一原子からなる≪動かない≫2原子分子のなかで電子が運動する場の対称性と一致する（点群$C_{\infty h}$）．したがって，非球形核の準位の対称性（それとともに行列要素に対する選択則）は，2原子分子の準位の対称性と似ている（III, §118参照）．特に同一原子の2原子分子におけると同様に，同じ回転帯内部の電気的2重極遷移（原子核の内部状態の変化なしに）は禁止される（§54とくらべよ）．このような過程は，したがって，$E2$-あるいは$M1$-遷移で実現する．第一の場合，核の全角運動量は2あるいは1，第二の場合には1だけ変わることができる．

(46.9) にしたがって，終状態の核の全角運動量の投影M'について加えて，4重極遷移確率は

$$w_{E2}=\frac{\omega^5}{15\hbar c^5}\sum_{M'}|\langle J'\Omega M'|Q^{(\text{電})}_{2,-m}|J\Omega M\rangle|^2$$

となる（Jは核の全角運動量，Ωはその核の軸への投影で$m=M-M'$である）．(b.7)を使って，この和は与えられた量，すなわち核に固定された座標軸$\xi\eta\zeta$に関して定義された遷移の，対角型（原子核の内部状態について）の4重極モーメント$\overline{Q_{2\lambda}}$の2乗によって表わされる．この際$\lambda=\Omega-\Omega'$で，与えられた場合 ($\Omega'=\Omega$) は成分$\overline{Q_{20}}$だけが現われる．定義にしたがい

$$eQ_0=e\int\rho_{ii}(2\zeta^2-\xi^2-\eta^2)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta=-2e(\overline{Q_{20}})_{ii}$$

という量を，単に核の4重極モーメントと呼ぶ．したがって

$$w_{E2}(\Omega J\to\Omega J')=\frac{\omega^5}{60\hbar c^5}Q_0^2(2J'+1)\begin{pmatrix}J' & 2 & J\\ -\Omega & 0 & \Omega\end{pmatrix}^2. \qquad (55.3)$$

開いた形では

$$w_{E2}(\Omega J\to\Omega,\ J-1)=\frac{\omega^5}{20\hbar c^5}Q_0^2\frac{\Omega^2(J^2-\Omega^2)}{(J-1)J(J+1)(2J+1)},$$

$$w_{E2}(\Omega J\to\Omega,\ J-2)=\frac{\omega^5}{40\hbar c^5}Q_0^2\frac{(J^2-\Omega^2)[(J-1)^2-\Omega^2]}{(J-1)J(2J-1)(2J+1)}.$$

しかしながら，これらの公式に関してつぎのような注意をしよう．これらに使われた行列要素は

$$\psi_{J\Omega M}=\text{const}\cdot\chi_\Omega D^{(J)}_{\Omega M}(\boldsymbol{n})$$

の形の波動関数で計算された（χ_Ω は核の内部状態の波動関数である）．この関数は角運動量の ζ 軸への投影の一定（大きさおよび符号について）値に対応している．われわれは一定の偶奇性と，角運動量の投影の大きさのみ（以後いつも Ω であると考える）を持つ状態の核を扱っている．したがって $\Omega\neq 0$ のとき，始めおよび終りの波動関数として

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{J\Omega M}\pm\psi_{J,-\Omega,M}),$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{J'\Omega M'}\pm\psi_{J',-\Omega,M'})$$

の形の一次結合をとる必要がある．第1項の積および第2項の積は，4重極モーメントの行列要素の以前の値を与える．もしも $2\Omega\leqslant 2$ ならば，≪交叉≫積は0と異なる積分へと導く[1]．したがって，公式 (55.3) は厳密にいえば $\Omega=1/2$，1のときは役に立たない．これらの場合には，遷移確率のなかに4重極モーメントの平均値によっては表わされない付加項が現われる[2]．

(55.3) の導き方と同様にして，$M1$-遷移の確率に対して公式

$$w_{M1}(\Omega J\to\Omega,J-1)=\frac{4\omega^3}{3\hbar c^3}\mu^2(2J-1)\begin{pmatrix}J-1 & 1 & J\\ -\Omega & 0 & \Omega\end{pmatrix}^2=\frac{4\omega^3}{3\hbar c^3}\mu^2\frac{J^2-\Omega^2}{J(2J+1)}\tag{55.4}$$

---

1) 2^l 重極モーメントの行列要素に対し，被積分量のなかに

$$D^{(J')*}_{-\Omega M'}D^{(l)}_{q'q}D^{(J)}_{\Omega M}$$

の形の積が含まれる．角度積分は $q'=-2\Omega$ のとき0と異なる．ところが q' は $-l$ から $+l$ までの値だけをとるから，したがって $2\Omega\leqslant l$ でなければならない．

2) 事実，この項は $\Omega=1/2$ の場合にのみ本質的な補正を与える．このとき，核の回転と内部状態のあいだの結合が特別大きい（これについては III, §118 参照）．

を得る．ここで μ は核の磁気モーメントである（この公式は $\Omega=1/2$ のときには役に立たない）．

§56. 光電効果．非相対論的な場合

§49～§52 で，われわれは離散スペクトルの原子準位間の輻射遷移（光子の放出と吸収）を考察した．光電効果はこれらの過程と，終状態が連続スペクトルである点が異なっている．

光電効果の断面積は，水素原子に対して，あるいは（核電荷 $Z\ll 137$ の）水素類似イオンに対しては，完全に解析的な形で計算されうる．

始状態には離散準位 $\varepsilon_i\equiv -I$（I は原子の電離ポテンシャルである）の電子と，一定の運動量 $\boldsymbol{k}$ の光子がある．終状態では電子は運動量 $\boldsymbol{p}$（およびエネルギー $\varepsilon_f=\varepsilon$）を持つ．$\boldsymbol{p}$ は連続的な値を取るので，光電効果の断面積は公式

$$d\sigma=2\pi|V_{fi}|^2\delta(-I+\omega-\varepsilon)\frac{d^3p}{(2\pi)^3} \tag{56.1}$$

で与えられる（(44.3) とくらべよ）．ここで電子の終状態の波動関数は《体積 $V=1$ につき1粒子で》規格化されると仮定される．このようにして，前と同様に光子の波動関数も規格化される．この際，断面積 $d\sigma$ へ移るためには確率 dw を光子の流れの密度（$c/V=c$ に等しい）で割る必要がある．しかし相対論的単位では，公式 (56.1) の形には影響しない．

((45.2) のように) 3次元横波ゲージの光子を選ぼう．このときは

$$V_{fi}=-eAj_{fi}=-e\sqrt{4\pi}\frac{1}{\sqrt{2\omega}}M_{fi}$$

である．ここで

$$M_{fi}=\int\psi'^*(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{e})e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}\psi\,d^3x \tag{56.2}$$

と置いた（$\psi\equiv\psi_i$ および $\psi'\equiv\psi_f$ は電子の始めおよび終りの波動関数である）．(56.1) で $d^3p\longrightarrow \boldsymbol{p}^2d|\boldsymbol{p}|do=\varepsilon|\boldsymbol{p}|d\varepsilon\,do$ と置き換え，δ-関数を $d\varepsilon$ で積分し，この公式をつぎの形に書き直そう．

$$d\sigma=e^2\frac{\varepsilon|\boldsymbol{p}|}{2\pi\omega}|M_{fi}|^2do. \tag{56.3}$$

われわれは光子のエネルギーの大きさで区別される，二つの場合に計算を行なう．すな

わち，$\omega \gg I$ と $\omega \ll m$ の場合である．$I \sim me^4Z^2 \ll m$ であるから，これら二つの領域は部分的には交叉している（$I \ll \omega \ll m$ の場合）．したがって，これらの場合の研究は本来光電効果の完全な記述を与えることになる．

$$\omega \ll m \tag{56.4}$$

の場合から始めよう．このときは，電子の速度は始状態でも終状態でも小さい．したがって，電子に関しては問題は完全に非相対論的である．これに対応して，(56.2) で $\boldsymbol{\alpha}$ を非相対論的速度の演算子 $\mathbf{v} = -i\nabla/m$ に変えよう（§45 とくらべよ）．このほか，2 重極近似に移って $e^{i\boldsymbol{kr}} \approx 1$ に置き換えること，すなわち光子の運動量を電子の運動量に比較して無視することができる．このときは

$$d\sigma = e^2 \frac{m|\boldsymbol{p}|}{2\pi\omega} |\boldsymbol{e}\boldsymbol{v}_{fi}|^2 do, \quad \boldsymbol{v}_{fi} = -\frac{i}{m}\int \psi'^* \nabla \psi \cdot d^3x. \tag{56.5}$$

水素原子（あるいは水素類似イオン）の基底状態の光電効果を考察しよう．このときは

$$\psi = \frac{(Ze^2m)^{3/2}}{\sqrt{\pi}} e^{-Ze^2mr} \tag{56.6}$$

である（普通の単位で $me^2 \longrightarrow 1/a_0$，ここで $a_0 = \hbar^2/me^2$ はボーア半径である）．

ψ' としては，漸近形が平面波（$e^{i\boldsymbol{pr}}$），およびそれとともに収束球面波を含むような波動関数をとる必要がある（III, §134 参照，ここでこのような関数を $\psi_{\boldsymbol{p}}^-$ と置こう）．l についての選択則のために，s-状態からは p-状態だけが可能である（2 重極の場合！）．したがって，展開[1]

$$\psi'_p = \frac{1}{p}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) e^{-i\delta_l} R_{pl}(r) P_l(\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}_1) \tag{56.7}$$

($\boldsymbol{n} = \boldsymbol{p}/p$, $\boldsymbol{n}_1 = \boldsymbol{r}/r$) のなかで $l = 1$ の項だけを残せば十分である[2]．したがって，重要でない位相因子を落として

$$\psi' = i\frac{3}{p}\sqrt{\frac{\pi}{2}} (\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}_1) R_{p1}(r). \tag{56.8}$$

(56.6) と (56.8) の関数 ψ および ψ' を使って

---

1) 以下この節では $|\boldsymbol{p}|$ を p で表わす．

2) 上記の展開の共通の係数は，III (134.5) のなかの係数と $(2\pi)^{3/2}$ だけ違っている．これは平面波が《単位体積に 1 粒子で》規格化され，$\delta(\boldsymbol{p})$ にではないことに関連している．

$$ev_{fi} = \frac{3(Ze^2m)^{5/2}}{\sqrt{2mp}}\iint (\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}_1)(\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{e})\, e^{-Ze^2mr}R_{p1}(r)\,do_1\cdot r^2dr$$

$$= \frac{2^{3/2}\pi(Ze^2m)^{5/2}}{pm}(\boldsymbol{n}\boldsymbol{e})\int_0^\infty r^2e^{-Ze^2mr}R_{p1}(r)\,dr$$

となる．III (36.18) および III (36.24) にしたがって（ここで用いる単位で）動径関数は

$$R_{p1} = \frac{2Ze^2m}{3}\sqrt{\frac{1+\nu^2}{\nu(1-e^{-2\pi\nu})}}\,pre^{-ipr}F(2+i\nu,\ 4,\ 2ipr).$$

ここで

$$\nu = \frac{Ze^2m}{p}\left(=\frac{Ze^2}{v}\right) \tag{56.9}$$

と置く．われわれに必要な積分は公式

$$\int_0^\infty e^{-\lambda z}z^{\gamma-1}F(\alpha,\gamma,kz)\,dz = \Gamma(\gamma)\lambda^{\alpha-\gamma}(\lambda-k)^{-\alpha}$$

を使って計算される（III（f.3）参照）．また

$$\left(\frac{\nu+i}{\nu-i}\right)^{i\nu} = e^{-2\nu\,\mathrm{arccot}\,\nu}$$

であることに注意すれば

$$ev_{fi} = \frac{2^{7/2}\pi\nu^3(\boldsymbol{n}\boldsymbol{e})}{\sqrt{p}\,m(1+\nu^2)^{3/2}}\frac{e^{-2\nu\,\mathrm{arccot}\,\nu}}{\sqrt{1-e^{-2\pi\nu}}}.$$

水素原子（あるいは水素類似イオン）の基底状態の電離エネルギーは $I = Z^2e^4m/2$ である．したがって

$$\omega = \frac{p^2}{2m}+I = \frac{p^2}{2m}(1+\nu^2) \tag{56.10}$$

である．この関係式を考慮し，立体角要素 do 内に電子を放出する光電効果の断面積に対する最終的な式を書こう．

$$d\sigma = 2^7\pi\alpha a^2\left(\frac{I}{\hbar\omega}\right)^4\frac{e^{-4\nu\,\mathrm{arccot}\,\nu}}{1-e^{-2\pi\nu}}(\boldsymbol{n}\boldsymbol{e})^2\,do. \tag{56.11}$$

ここで $a = \hbar^2/mZe^2 = a_0/Z$ である（ここおよび以下では普通の単位である）．光電子の角度分布は因子 $(\boldsymbol{n}\boldsymbol{e})^2$ で決定されることを指摘しておこう．これは入射光子の偏りの方向に平行な方向で極大になり，$\boldsymbol{e}$ に垂直な方向では入射方向も含めて 0 になる．偏りのない光子に対して，公式 (56.11) は $\boldsymbol{e}$ の方向について平均しなければならない．それは

$$(\boldsymbol{ne})^2 \longrightarrow \frac{1}{2}[\boldsymbol{n}_0\boldsymbol{n}]^2$$

の置き換えに帰してしまう. ここで $\boldsymbol{n}_0 = \boldsymbol{k}/k$ である ((45.4b) 参照).

(56.11) を角度で積分すると, 光電効果の全断面を与える.

$$\sigma = \frac{2^9\pi^2}{3}\alpha a^2\left(\frac{I}{\hbar\omega}\right)^4 \frac{e^{-4\nu\,\mathrm{arccot}\,\nu}}{1-e^{-2\pi\nu}} \tag{56.12}$$

(M. Stobbe, 1930).

$\hbar\omega \to I$ (すなわち $\nu \to \infty$) のとき, σ の極限値は

$$\sigma = \frac{2^9\pi^2}{3e^4}\alpha a^2 = \frac{2^9\pi^2}{3e^4}\frac{\alpha a_0^2}{Z^2} \tag{56.13}$$

となる (分母で $e=2.71\cdots\cdots$ である!). 荷電粒子が形成されるような反応に対しては, 当然のことであるが(III, §144 参照), そのしきいの近くの光電効果は定数の極限に近づく.

$\hbar\omega \gg I$ の場合 (この際前と同様に $\hbar\omega \ll mc^2$ である) はボルン近似 ($\nu = Ze^2/\hbar v \ll 1$) に対応する. 公式 (56.12) は

$$\sigma = \frac{2^8\pi}{3}\alpha a_0^2 Z^5\left(\frac{I_0}{\hbar\omega}\right)^{7/2} \tag{56.14}$$

の形をとる ($I_0 = e^4m/2\hbar^2$ は水素原子の電離エネルギーである).

光電効果の逆過程は, 電子と動かないイオンとの輻射再結合である. この過程の断面積 ($\sigma_{再結}$) は光電効果の断面積 ($\sigma_{光}$) から, 個別つりあいの原理 (III, §141) を使って見いだせる. この原理にしたがって, $i \to f$ および $f \to i$ の過程 (状態 i および f のおのおのに2粒子がある) の断面積は, つぎの関係式で結ばれる.

$$g_i p_i^2 \sigma_{i\to f} = g_f p_f^2 \sigma_{f\to i}.$$

ここで p_i, p_f は粒子の相対運動の運動量で, g_i, g_f は i および f 状態のスピンの統計的重みである. また光子に対しては $g=2$ であること (偏りの二つの方向) を考慮して

$$\sigma_{再結} = \sigma_{光}\frac{2k^2}{p^2} \tag{56.15}$$

を得る ($p = mv$ は入射電子の運動量, k は放出される光子の運動量である).

問　題

原子核 (電荷 $Z \ll 137$) と速い非相対論的電子 ($I \ll mv^2 \ll mc^2$) の輻射再結合の全

断面積を求めよ.

解　K-殻への捕獲断面積（主量子数 $n=1$）は，(56.14) を (56.15) に代入することにより求まる.

$$\sigma_1^{\text{再結}}=\frac{2^7\pi}{3}Z^5\alpha^3a_0^2\left(\frac{I_0}{\varepsilon}\right)^{5/2}$$

（$\varepsilon=mv^2/2$ は入射電子のエネルギーで，$\hbar\omega\approx\varepsilon$ である）. 作られる原子の他の状態のなかで s-状態だけが重要である. なぜかというと，ボルン近似で行列要素を計算するとき，(§57 における計算からわかるように) 結合状態の波動関数の r の小さいときの値が効き，$l>0$ のときこの値は $l=0$ の関数の値にくらべて小さいからである. したがってこのとき，ψ の r による冪展開の最初の2項を考慮すれば十分である. $l=0$ の状態に対し，任意の n に対してこの項は

$$\psi=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,a^{3/2}n^{3/2}}\left(1-\frac{r}{a}\right)$$

である. すなわち，n は共通因子 $n^{-3/2}$ の形でのみ含まれている（上記の式は関数 III (36.13) の展開により得られる）. したがって，再結合の全断面積は

$$\sigma^{\text{再結}}=\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_n^{\text{再結}}=\sigma_1^{\text{再結}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}=\zeta(3)\sigma_1^{\text{再結}}$$

（ζ-関数の値は $\zeta(3)=1.202$ である）.

§57. 光電効果. 相対論的な場合

$$\omega\gg I \tag{57.1}$$

の場合にかかろう. このときはまた $\varepsilon=\omega-I\gg I$ である，したがって，波動関数 (ψ') への原子核のクーロン場の影響は，摂動論によって考慮することができる. ψ' を

$$\psi'=\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\left(u'e^{i\boldsymbol{pr}}+\psi^{(1)}\right) \tag{57.2}$$

の形に書こう. 光電子は相対論的であってもよい. したがって，(57.2) の非摂動関数は相対論的平面波 (23.1) の形に書かれる.

始状態で電子は非相対論的であるが，その波動関数 ψ はやはり（のちに明らかになる理由によって）相対論的な補正（$\sim Ze^2$）を考慮しなければならない. このような関数は，公式

$$\psi = \left(1-\frac{i}{2m}\gamma^0\boldsymbol{\gamma}\nabla\right)\frac{u}{\sqrt{2m}}\psi_{\text{非相}} \tag{57.3}$$

(§39 の問題参照) によって与えられる. ここで $\psi_{\text{非相}}$は結合状態の非相対論的波動関数 (56.6) で, uは静止電子の双スピノール振幅で, われわれが用いる条件 $\bar{u}u=2m$ により規格化されている.

関数 (57.2), (57.3) を行列要素 (56.2) に代入する[1].

$$M_{fi} = \frac{1}{2\sqrt{m\varepsilon}}\int\left\{\bar{u}'(\boldsymbol{\gamma e})\left[\left(1-\frac{i}{2m}\gamma^0\boldsymbol{\gamma}\nabla\right)u\psi_{\text{非相}}\right]e^{-i(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k})\boldsymbol{r}}\right.$$
$$\left.+\bar{\psi}^{(1)}(\boldsymbol{\gamma e})e^{i\boldsymbol{kr}}u\psi_{\text{非相}}\right\}d^3x. \tag{57.4}$$

この量の Ze^2 による展開の第1項を得ることを考えて, われわれは波括弧内の第2項では, $\psi_{\text{非相}}$ を単なる定数 $(Ze^2m)^{3/2}/\sqrt{\pi}$ で置き換えることができる. 第1項はこのような置き換えの結果 ($\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}\neq 0$ のときには) 0になるだろう (したがって ψ のなかで Ze^2 に比例する最初の相対論的補正もまた考慮する必要がある. $v\sim 1$ のときこの補正は断面積に, $\psi_{\text{非相}}$ の Ze^2 による展開のつぎの項と同程度の寄与を与える).

(57.4) の第1項で部分積分を行なって, $\psi_{\text{非相}}$ に働く演算子 ∇ を指数因子の方に移す. その結果

$$M_{fi} = \frac{(Ze^2m)^{3/2}}{2(\pi m\varepsilon)^{1/2}}\left\{\bar{u}'(\boldsymbol{\gamma e})\left[1+\frac{1}{2m}\gamma^0\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k})\right]u(e^{-Ze^2mr})_{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}}+\bar{\psi}^{(1)}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{\gamma e})u\right\} \tag{57.5}$$

を得る. ここでベクトル添字はフーリエの空間成分を意味する. $\sim Ze^2$の項までの精度ではつぎのようになる[2].

---

1) 関数 (57.3) は距離 $r\sim 1/mZe^2$ に対して求められた. そこでは補正項が量 Ze^2 の程度になる. しかし基底状態に対して (および, すべての一般の s-状態に対して) は, 公式(57.3) は任意の r に対して使える. なぜかというと, 純指数関数(56.6) の微係数は (これとともに (57.3) の補正項も), つねに Ze^2 に比例するからである. この事情は, 今考えている (あとで見るように) r が非常に小さい問題に, 公式 (57.3) を使うのを可能にする.

2) 等式

$$(\Delta-\lambda^2)\frac{e^{-\lambda r}}{r} = -4\pi\delta(\boldsymbol{r})$$

の両辺のフーリエ成分をとり

$$\left(\frac{e^{-\lambda r}}{r}\right)_{\boldsymbol{q}} = \frac{4\pi}{q^2+\lambda^2}. \tag{57.6a}$$

この式をパラメータ λ で微分すると

$$(e^{-\lambda r})_{\boldsymbol{q}} = \frac{8\pi\lambda}{(q^2+\lambda^2)^2}. \tag{57.6b}$$

$$(e^{-Ze^2mr})_{p-k} = \frac{8\pi Ze^2 m}{(p-k)^4}. \tag{57.6}$$

フーリエ成分 $\psi_k^{(1)}$ の計算のために，$\psi^{(1)}$ が満足する方程式

$$(\gamma^0\varepsilon + i\boldsymbol{\gamma}\nabla - m)\psi^{(1)} = e(\gamma^\mu A_\mu)u'e^{ipr} = -\frac{Ze^2}{r}\gamma^0 u'e^{ipr}$$

を書こう（これは (57.2) を (32.1) に代入して得られる）．この方程式の両辺に演算子 $(\gamma^0\varepsilon + i\boldsymbol{\gamma}\nabla + m)$ を作用させ

$$(\Delta + p^2)\psi^{(1)} = -Ze^2(\gamma^0\varepsilon + i\boldsymbol{\gamma}\nabla + m)(\gamma^0 u')\frac{1}{r}e^{ipr}$$

を得る．この方程式に e^{-ikr} を掛けて d^3x で積分する．この際 Δ および ∇ を持つ項は普通のように部分積分を行なう．すなわち

$$(p^2 - k^2)\psi_k^{(1)} = -Ze^2(\gamma^0\varepsilon - \boldsymbol{\gamma}k + m)(\gamma^0 u')\left(\frac{1}{r}\right)_{k-p}$$

$$= -Ze^2(2\varepsilon\gamma^0 - \boldsymbol{\gamma}(k-p))(\gamma^0 u')\frac{4\pi}{(k-p)^2}.$$

最後の行では振幅 u' が方程式

$$(\varepsilon\gamma^0 - p\boldsymbol{\gamma} - m)u' = 0 \quad \text{あるいは} \quad (\varepsilon\gamma^0 + p\boldsymbol{\gamma} - m)\gamma^0 u' = 0$$

を満足することを考慮した．これから

$$\bar{\psi}_k^{(1)} = \psi_k^{(1)*}\gamma^0 = 4\pi Ze^2\bar{u}'\frac{2\varepsilon\gamma^0 + \boldsymbol{\gamma}(k-p)}{(k^2-p^2)(k-p)^2}\gamma^0. \tag{57.7}$$

(57.6), (57.7) を行列要素 (57.5) に代入して，つぎの形に表わそう．

$$M_{fi} = \frac{4\pi^{1/2}(Ze^2m)^{5/2}}{(\varepsilon m)^{1/2}(k-p)^2}\bar{u}'Au.$$

ここで

$$A = a(\boldsymbol{\gamma}e) + (\boldsymbol{\gamma}e)\gamma^0(\boldsymbol{\gamma}b) + (\boldsymbol{\gamma}c)\gamma^0(\boldsymbol{\gamma}e),$$

$$a = \frac{1}{(k-p)^2} + \frac{\varepsilon}{m}\frac{1}{k^2-p^2}, \quad b = -\frac{k-p}{2m(k-p)^2}, \quad c = \frac{k-p}{2m(k^2-p^2)}.$$

断面積は

$$d\sigma = \frac{8e^2(Ze^2m)^5|p|}{\omega(k-p)^4 m}(\bar{u}'Au)(\bar{u}\bar{A}u')do.$$

ここで $\bar{A} = \gamma^0 A^+ \gamma^0$ である（§66 参照）．この式はさらにスピンの終りの方向についての和

をとり，始めの方向について平均する必要がある．この操作はのちに §66 で述べられる法則にしたがい，始めおよび終りの状態の偏りの密度行列，すなわち

$$\rho = \frac{m}{2}(\gamma^0+1), \quad \rho' = \frac{1}{2}(\gamma^0\varepsilon-\boldsymbol{\gamma p}+m)$$

（始状態では $\boldsymbol{p}=0$，$\varepsilon=m$ である）を使って実行される．その結果

$$d\sigma = \frac{16e^2(Ze^2m)^5|\boldsymbol{p}|}{m\omega(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p})^4}\mathrm{Sp}(\rho' \mathrm{A}\rho\bar{\mathrm{A}})do$$

になる．跡の計算は純代数的な演算で，つぎのような結果になる[1]．

$$\mathrm{Sp}(\rho' \mathrm{A}\rho\bar{\mathrm{A}}) = \frac{m}{\varepsilon+m}[\boldsymbol{ap}-(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})(\varepsilon+m)]^2+4m(\boldsymbol{be})[(\varepsilon+m)(\boldsymbol{ce})+\boldsymbol{a}(\boldsymbol{pe})]$$

（ベクトル $\boldsymbol{e}$ は実と仮定され，光子の直線的な偏りである）．

$\boldsymbol{k}$ 方向を z 軸，$\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{e}$ 面を xz 面とし，これに対して $\boldsymbol{p}$ 方向の天頂角 θ および方位角 φ を導入して（したがって，$\boldsymbol{pe}=|\boldsymbol{p}|\cos\varphi\sin\theta$ となる），光電効果の断面積に最終的な形を与えよう．$\omega \gg I$ のときエネルギー保存は（$\varepsilon-m=\omega-I$ の代りに）$\varepsilon-m=\omega$ の形に書くことができる．このとき

$$\boldsymbol{k}^2-\boldsymbol{p}^2 = -2m(\varepsilon-m), \quad (\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p})^2 = 2\varepsilon(\varepsilon-m)(1-v\cos\theta)$$

を容易に確かめることができる．ここで $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{p}/\varepsilon$ は光電子の速度である．簡単な計算ののち，最終的に

$$d\sigma = Z^5\alpha^4 r_e^2 \frac{v^3(1-v^2)^3\sin^2\theta}{(1-\sqrt{1-v^2})^5(1-v\cos\theta)^4}\left\{\frac{(1-\sqrt{1-v^2})^2}{2(1-v^2)^{3/2}}(1-v\cos\theta)\right.$$
$$\left.+\left[2-\frac{(1-\sqrt{1-v^2})(1-v\cos\theta)}{1-v^2}\right]\cos^2\varphi\right\}do \quad (57.8)$$

を得る．ここで $r_e=e^2/m$ である．

超相対論的場合（$\varepsilon \gg m$）には，光電効果の断面積は小さい角度（$\theta\sim\sqrt{1-v^2}$）のときに鋭い極大を持つ．すなわち，電子は圧倒的に光子の入射方向に放出される．極大の近くで

---

1) 跡の計算に対する3次元の公式は，§22 で行なわれたのと類似している．偶数個の因子 γ^0 および $\boldsymbol{\gamma}$ の積の跡のみが 0 と異なる．このとき，すべての因子 γ^0 は 1 になり，因子 $\boldsymbol{\gamma}$ の 2 および 4 個の積の跡は

$$\frac{1}{4}\mathrm{Sp}(\boldsymbol{a\gamma})(\boldsymbol{b\gamma}) = -\boldsymbol{ab},$$

$$\frac{1}{4}\mathrm{Sp}(\boldsymbol{a\gamma})(\boldsymbol{b\gamma})(\boldsymbol{c\gamma})(\boldsymbol{d\gamma}) = (\boldsymbol{ab})(\boldsymbol{cd})-(\boldsymbol{ac})(\boldsymbol{bd})+(\boldsymbol{ad})(\boldsymbol{bc}).$$

$$1-v\cos\theta \approx \frac{1}{2}[(1-v^2)+\theta^2]$$

と書き，(57.8) のおもな項は

$$d\sigma \approx 4Z^5\alpha^4 r_e^2 \frac{(1-v^2)^{3/2}\theta^3}{(1-v^2+\theta^2)^3}\,d\theta\,d\varphi. \tag{57.9}$$

式 (57.8) の角度についての非常に長いが初等的な積分の結果，全断面積に対するつぎのような式が導かれる (F. Sauter, 1931).

$$\sigma = 2\pi Z^5\alpha^4 r_e^2 \frac{(\gamma^2-1)^{3/2}}{(\gamma-1)^5}\left\{\frac{4}{3}+\frac{\gamma(\gamma-2)}{\gamma+1}\left(1-\frac{1}{2\gamma\sqrt{\gamma^2-1}}\ln\frac{\gamma+\sqrt{\gamma^2-1}}{\gamma-\sqrt{\gamma^2-1}}\right)\right\}. \tag{57.10}$$

ここで簡単のために≪ローレンツ因子≫

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{\varepsilon}{m} \approx \frac{m+\omega}{m} \tag{57.11}$$

を導入した．超相対論的な場合には，この公式は

$$\sigma = 2\pi Z^5\alpha^4 r_e^2 \frac{1}{\gamma} \tag{57.12}$$

という簡単な式になってしまう．$I \ll \omega \ll m$ の場合には，(57.10) で $\gamma-1$ の小さい極限に移ると，われわれがすでに知っている結果 (56.14) に帰してしまう．

§58. 重陽子の光分解

重陽子の特長は，その結合エネルギーが（ポテンシャルの穴の深さとくらべて）小さいことである． この事情は重陽子が加わって起こる反応を， 核力の様子の詳しい知識なしに，単に一つの結合エネルギーだけで記述することを可能にしている (III, §131 参照). この際，衝突粒子の波長が核力の作用半径 a にくらべて大きいと仮定される．

$ka \ll 1$ であるような γ-量子による重陽子の分解に対しても，このことは成り立っている．また $pa \ll 1$ も仮定される．ここで p は自由にされた中性子と陽子の相対運動の運動量である（この条件は前出のものよりずっと強い[1]).

光電効果の断面積に対する非相対論的公式から出発しよう．その方向について積分して

$$\sigma = \frac{e^2 p}{2\pi\omega}\frac{M}{2}\frac{4\pi}{3}|(\boldsymbol{v}_p)_{fi}|^2$$

---

1) $pa \approx 1$ ($a = 1.5\cdot 10^{-13}$cm) の光子のエネルギーは 15 MeV である．

となる．ここで $\boldsymbol{p}$ は陽子と中性子の相対運動の運動量である[1]．また (56.5) の質量 m はその換算質量 $M/2$ に置き換えられる（ここで M は核子の質量である）．陽子だけが光子と相互作用をするから，行列要素は陽子の速度 $\boldsymbol{v}_p$ からとる．$\boldsymbol{v}_p$ を運動量 $\boldsymbol{p}$ を使って表わして ($\boldsymbol{v}_p = \boldsymbol{v}/2 = \boldsymbol{p}/M$)

$$\sigma^{(電)} = \frac{e^2 p}{3M\omega}|\boldsymbol{p}_{fi}|^2 \tag{58.1}$$

を得る．添字（電）は，この公式が電気的 2 重極遷移に対応することを示している．すなわち，$e\boldsymbol{p}/M = e\boldsymbol{v}_p = \dot{\boldsymbol{d}}$ したがって $e\boldsymbol{p}_{fi}/M = i\omega\boldsymbol{d}_{fi}$ である．

重陽子の始めの状態（基底）の規格化された波動関数は

$$\psi = \sqrt{\frac{\kappa}{2\pi}}\frac{e^{-\kappa r}}{r}, \quad \kappa = \sqrt{MI} \tag{58.2}$$

である．ここで $I = 2.23\,\mathrm{MeV}$ は結合エネルギーである（III，§131 参照）[2]．終状態の波動関数として自由運動の波動関数，すなわち平面波

$$\psi' = e^{i\boldsymbol{pr}} \tag{58.3}$$

をとることができる．その原因はまとめると，いま考察している理論で《重陽子の大きさ》$1/\kappa$ は相互作用の有効半径 a にくらべて大きいことになる．したがって陽子と中性子のあいだの相互作用は，近距離で波動関数が小さい $l \neq 0$ の状態を無視して，S-状態だけを考慮する必要がある．しかし，選択則によって二つの S-状態（基底状態と連続スペクトルの S-状態）のあいだの電気的 2 重極遷移は禁止される．これは今の場合，終状態の核子の相互作用を無視する可能性を与えている．

部分積分により行列要素に対して

---

1) この節では p は $|\boldsymbol{p}|$ を表わす．

2) この関数は a が有限であることと結びついた補正を入れて，精密にすることができる．これは (58.2) の規格化係数を

$$\sqrt{\frac{\kappa}{2\pi(1-a\kappa)}}$$

で置き換えることによって，達せられる（III，§131，問題 1）．したがって，また断面積に対する公式に因子 $1/(1-a\kappa)$ が現われる．実際に，この補正が小さくないことを述べる必要がある．すなわち，重陽子の基底状態に対しては $a\kappa \approx 0.4$ であるからである．重陽子の基底状態は $^3D_1$ 状態のわずかな《混合》を含む $^3S_1$ 状態である．そしてこれはテンソル型核力の作用と関連している（III，§116 参照）．この混合を，したがってテンソル型核力をわれわれは無視する．

$$p_{fi} = -i\sqrt{\frac{\kappa}{2\pi}}\int e^{-i\mathbf{pr}}\nabla\frac{e^{-\kappa r}}{r}\,d^3x = \sqrt{\frac{\kappa}{2\pi}}\,\mathbf{p}\left(\frac{e^{-\kappa r}}{r}\right)_{\mathbf{p}} = \sqrt{\frac{\kappa}{2\pi}}\frac{4\pi\mathbf{p}}{p^2+\kappa^2}$$

を得る (237頁の脚注参照).

また，エネルギー保存則を表わす等式

$$\frac{1}{M}(\kappa^2+p^2) = I+\frac{p^2}{M} = \omega$$

に注意し，最終的な光分解の断面積が（普通の単位で）

$$\sigma^{(電)} = \frac{8\pi}{3}\alpha\frac{\hbar^2}{M}\frac{\sqrt{I}\,(\hbar\omega-I)^{3/2}}{(\hbar\omega)^3} \tag{58.4}$$

の形に求められる (H. A. Bethe, R. Peierls, 1935). これは $\hbar\omega = 2I$ のとき極大となり，$\hbar\omega\to I$ と $\hbar\omega\to\infty$ のとき0になる.

しかしながら，上記の公式 (58.4) によって，光子の電気的2重極吸収は，しきいの近くの光電効果 ($\hbar\omega$ が I の近く) の断面積のおもな寄与はしない. この領域でのおもな寄与は，電気的2重極吸収では起こらない S-状態への遷移からこなければならない. それはまた電気的4重極吸収でも起こらない. すなわち，これは偶奇性についての選択則とは矛盾しないが，軌道角運動量についての選択則で禁止される（われわれがテンソル力を無視したことを思い起こそう. それがなければ $\mathbf{L}$ および $\mathbf{S}$ は個々に保存されることになる). したがって，しきいの近くでの光分解の断面積を計算するためには，磁気的2重極吸収を考察する必要がある. これに対しては，選択則は S-状態間の遷移を許している (E. Fermi, 1935).

公式 (58.1) で，電気的モーメントを磁気モーメントに置き換えて

$$\sigma^{(磁)} = \frac{1}{3}\,\omega Mp|\boldsymbol{\mu}_{fi}|^2 \tag{58.5}$$

を得る. 軌道角運動量 $\mathbf{L}$ は S-状態間の遷移に対して行列要素を持たないので，軌道運動の磁気モーメントは $\boldsymbol{\mu}_{fi}$ に寄与しない. スピン磁気モーメントは

$$\boldsymbol{\mu} = 2\mu_p\mathbf{s}_p+2\mu_n\mathbf{s}_n = 2(\mu_p-\mu_n)\mathbf{s}_p+2\mu_n\mathbf{S}$$

である.

ここで $\mathbf{S} = \mathbf{s}_p+\mathbf{s}_n$ で，μ_p, μ_n は陽子および中性子の磁気モーメントである. テンソル型核力を無視すると，全スピンは保存する. したがって，その演算子は遷移を与えない. したがって

$$\boldsymbol{\mu}_{fi} = 2(\boldsymbol{s}_p)_{fi}(\mu_p - \mu_n)$$

である．この近似（テンソル力なしの）では，スピンと座標の変数は分離する．波動関数とともに行列要素もまた，スピン部分と座標部分の積の形

$$\boldsymbol{\mu}_{fi} = 2(\mu_p - \mu_n)\langle s_p S'M' | \boldsymbol{s}_p | s_p SM\rangle \int \psi'^*(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r})\, d^3x$$

に表わされる．スピン－スピンの核力が存在すると，その結果座標関数 $\psi(\boldsymbol{r})$ に対する波動方程式が，パラメータとしてスピン S の値を含むことになる．もしも $S' = S$ ならば，$\psi'(\boldsymbol{r})$ と $\psi(\boldsymbol{r})$ とは同一の演算子の固有関数となり，したがって，直交する．このようにして光分解は始状態 ${}^3S$ から連続スペクトルの ${}^1S$ 状態へだけ起こることになるだろう．

(58.5) のなかの平方 $|\boldsymbol{\mu}_{fi}|^2$ は，始状態のスピン $\boldsymbol{S}$ の投影 M について平均される必要がある．このようにして，問題は

$$\frac{1}{2S+1}\sum_M |\langle s_p S'M' | \boldsymbol{s}_p | s_p SM\rangle|^2$$

という量の計算に帰する．ここで $s_p = s_n = 1/2$，$S = 1$，$S' = 0$ である．角運動量の合成の際の行列要素に対する一般式にしたがって，この量は

$$\frac{1}{(2S+1)(2S'+1)}|\langle s_p S' \| s_p \| s_p S\rangle|^2 = \begin{Bmatrix} s_p & S' & s_n \\ S & s_p & 1 \end{Bmatrix}^2 |\langle s_p \| s_p \| s_p\rangle|^2$$
$$= \frac{1}{6}|\langle s_p \| s_p \| s_p\rangle|^2$$

に等しい（公式 III (107.11)，(109.3) が用いられた）．既約行列要素は

$$\langle s_p \| s_p \| s_p\rangle = \sqrt{s_p(s_p+1)(2s_p+1)} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

である．結果として，公式 (58.5) は

$$\sigma^{(磁)} = \frac{1}{3}\omega M p(\mu_p - \mu_n)^2 \left|\int \psi'^* \psi\, d^3x\right|^2 \qquad (58.6)$$

の形になる．

始めの関数 ψ は公式 (58.2) で与えられる．終りの関数は

$$\psi' = \frac{1}{p}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, R_{p0}(r)$$

である．これは，漸近的には平面波および発散球面波を含むような関数の，展開 (56.7) の第1項（$l = 0$）である．積分は核力の作用半径の外の領域で行なわれるので，動径関数は

$$R_{p0}(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(pr+\delta)}{r}$$

である．位相 δ は，≪陽子＋中性子≫ 系の $S=0$ の仮想的状態 ($I_1 = 0.067\,\mathrm{MeV}$) の量と結びついている．すなわち

$$\cot\delta = \frac{\kappa_1}{p}, \quad \kappa_1 = \sqrt{MI_1}$$

(III, §131 参照)．ここで

$$\int\psi'^*\psi\, d^3x = (2\pi)^{3/2}\frac{\sqrt{\kappa}}{p\pi}\,\mathrm{Im}\int e^{-\kappa r+ipr}\, e^{i\delta}\, dr = (2\pi)^{3/2}\frac{\sqrt{\kappa}}{p\pi}\,\mathrm{Im}\frac{e^{i\delta}}{\kappa-ip}.$$

簡単な代数変形ののちに，光分解の断面に対し（普通の単位で）最終式を得る．

$$\sigma^{(\text{磁})} = \frac{8\pi}{3\hbar c}(\mu_p-\mu_n)^2\frac{\sqrt{I(\hbar\omega-I)}\,(\sqrt{I}+\sqrt{I_1})^2}{\hbar\omega(\hbar\omega-I+I_1)}. \tag{58.7}$$

$\hbar\omega\to I$ のとき，この断面積は $\sqrt{\hbar\omega-I}$ のように 0 になる．これはしきいの近くでの反応断面積のふるまいの一般的性質に対応する (III, §144)．

中性子による陽子の輻射捕獲は，光分解の逆過程である．捕獲断面積 ($\sigma_{\text{捕}}$) は個別的つりあいの原理 ((56.15) の導き方とくらべよ) を使って，光電効果の断面積 ($\sigma_{\text{光}}$) から求められる．中性子および陽子のスピンの統計的重みは $2\times2=4$ である．重陽子 ($S=1$ の状態の) および光子の統計的重みは $3\times2=6$ である．したがって

$$\sigma_{\text{捕}} = \frac{3}{2}\frac{(\hbar\omega)^2}{c^2p^2}\sigma_{\text{光}} = \frac{3(\hbar\omega)^2}{2Mc^2(\hbar\omega-I)}\sigma_{\text{光}}. \tag{58.8}$$

§59. 磁気制動輻射[1]

古典理論によると (II, §74)，定磁場 $\boldsymbol{H}$ のなかを運動する超相対論的電子は，振動数

$$\omega \sim \omega_0\left(\frac{\varepsilon}{m}\right)^3 \tag{59.1}$$

に対応する極大を持つ，準連続スペクトルを輻射する．ここで

$$\omega_0 = \frac{veH}{|\boldsymbol{p}|} \approx \frac{eH}{\varepsilon} \tag{59.2}$$

はエネルギー ε の電子が，(磁場に垂直な平面内の) 円軌道に沿って回転する振動数であ

1) この節はベ・エヌ・バイエルとともに書いた．

る[1)].

磁気制動輻射への量子効果は二つの起源を持っている．すなわち，電子の運動の量子化と，光子放出の際の反跳の量子化とである．後者は比 $\hbar\omega/\varepsilon$ という量で決定され，古典論適用可能の条件はこれが小さいことである．この関係ではパラメータ

$$\chi=\frac{H}{H_0}\frac{|\boldsymbol{p}|}{m}\approx\frac{H\varepsilon}{H_0 m}\approx\frac{\hbar\omega_0}{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{m}\right)^3 \tag{59.3}$$

を導入すれば十分である．ここで $H_0=m^2/e\hbar(=m^2c^3/e\hbar)=4.4\cdot10^{13}$ ガウス．古典領域では $\chi\sim\hbar\omega/\varepsilon\ll1$ である．この逆の場合（$\chi\gg1$）は輻射される光子のエネルギーは $\hbar\omega\sim\varepsilon$ で，（先へいって見るように）スペクトルの重要な部分は，放出後の電子のエネルギーが

$$\varepsilon'\sim m\frac{H_0}{H} \tag{59.4}$$

になるような振動数のところまでひろがっている．電子が超相対論的のままで残るために，磁場は条件

$$\frac{H}{H_0}\ll1 \tag{59.5}$$

を満足しなければならない．

電子の運動自身の量子化に関しては，それは比 $\hbar\omega_0/\varepsilon$ によって特長づけられる．ここで $\hbar\omega_0$ は磁場内の運動の際の，電子の隣りあう準位間の距離である．

$$\frac{\hbar\omega_0}{\varepsilon}=\frac{H}{H_0}\left(\frac{m}{\varepsilon}\right)^2$$

であるから，(59.5) のために $\hbar\omega_0\ll\varepsilon$ である．すなわち，電子の運動は χ の値によらずに準古典的である．言いかえれば，同時にそれと光子場の演算子との非可換性（$\sim\hbar\omega/\varepsilon$ の量）[2)] は考慮するが，電子の力学変数の演算子どうしの非可換性（$\sim\hbar\omega_0/\varepsilon$ の量）は無視することができる．

---

1) この節では $c=1$ と置き，因子 $\hbar$ はそのままにしておく．

2) 磁気制動輻射の量子論の問題の完全な解は，最初にエヌ・ペ・クレピコフにより与えられた(1954)．しかし古典公式に対する1次の量子論的補正は，ア・ア・ソコロフ，エヌ・ペ・クレピコフおよびイ・エム・ツェルノフにより与えられた(1952)．この節で述べられる公式 (59.23) および (59.30) の，あらわな形で準古典的運動を使う導き方は，ヴェ・エヌ・バイエルおよびヴェ・エム・カムコフのものである(1967)．同様な方法は輻射強度に対する1次の量子論的補正を求めるためにシュヴィンガーにより使われた (J. Schwinger, 1954).

外場内の電子の定常状態の準古典的波動関数は，記号的に

$$\psi=\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{H}}}u(\mathrm{p})e^{-\frac{i}{\hbar}\mathrm{H}t}\varphi(\boldsymbol{r}) \tag{59.6}$$

で表わされる．ここで $\varphi(\boldsymbol{r})\sim\exp(iS/\hbar)$ はスピンのない粒子の準古典的波動関数である（$S(\boldsymbol{r})$ はその古典的作用である）．$u(\mathrm{p})$ は双スピノール演算子

$$u(\mathrm{p})=\begin{pmatrix}\sqrt{\mathrm{H}+m}\,w\\ \frac{1}{\sqrt{\mathrm{H}+m}}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})w\end{pmatrix}$$

であり，平面波の双スピノール振幅 $u(p)$ (23.9) から，$\boldsymbol{p}$ と ε を演算子で置き換えることにより求められる[1]．すなわち

$$\mathbf{p}=\mathbf{P}-e\boldsymbol{A}=-i\hbar\boldsymbol{\nabla}-e\boldsymbol{A},\quad \mathrm{H}=\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}$$

にである．$\boldsymbol{P}$ はベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ の場内の粒子の一般化された運動量である．演算子因子が ψ に掛かる順序は重要でない．なぜかというと，われわれはその非可換性を無視するからである．電子のスピン状態は3次元スピノール w で定義される．

光子 ω, $\boldsymbol{k}$ の放出の遷移行列要素は

$$V_{fi}=-\frac{e\sqrt{4\pi}}{\sqrt{2\hbar\omega}}\int dt\int d^3x\cdot\left[\varphi_f^* e^{\frac{i}{\hbar}\mathrm{H}t}\frac{u^+(\mathrm{p})}{\sqrt{2\mathrm{H}}}\right]e^{i\omega t-i\boldsymbol{kr}}(\boldsymbol{e}^*\boldsymbol{\alpha})\frac{u(\mathrm{p})}{\sqrt{2\mathrm{H}}}e^{-\frac{i}{\hbar}\mathrm{H}t}\varphi_i$$

である．ここで括弧［……］内の演算子は左に作用する．光子場は3次元横波ゲージに選んだ．因子 $\exp(\pm i\mathrm{H}t/\hbar)$ はそれらのあいだにあるシュレーディンガー演算子を，あらわに時間に依存するハイゼンベルク表示の演算子に変換する．V_{fi} を

$$V_{fi}=\frac{e\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\hbar\omega}}\langle f|\int e^{i\omega t}\mathrm{Q}(t)\,dt|i\rangle \tag{59.7}$$

の形に書こう．ここで $\mathrm{Q}(t)$ はハイゼンベルク演算子

$$\mathrm{Q}(t)=\frac{u_f^+(\mathrm{p})}{\sqrt{2\mathrm{H}}}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{e}^*)e^{-i\boldsymbol{kr}(t)}\frac{u_i(\mathrm{p})}{\sqrt{2\mathrm{H}}} \tag{59.8}$$

を表わし，行列要素 $\langle f|\cdots\cdots|i\rangle$ は関数 φ_f, φ_i に関するものである．

遷移の微分確率は

$$dw=\sum_f|V_{fi}|^2\frac{d^3k}{(2\pi)^3}$$

---

1) この節では（第4章と異なり）一般化された運動量は大文字 $\boldsymbol{P}$ で表わされる．記号 $\boldsymbol{p}$ は普通の（運動学的）運動量に使われる．

である．ここで和は波動関数 φ_f のすべての成分について行なわれる．これは φ_f の完全性を表わす等式[1)]

$$\sum_f \varphi_f^*(\boldsymbol{r}')\varphi_f(\boldsymbol{r}) = \delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})$$

を使って実現する．その結果

$$dw = \frac{e^2}{\hbar\omega}\frac{d^3k}{4\pi^2}\int dt_1\int dt_2\cdot e^{i\omega(t_1-t_2)}\langle i|\mathrm{Q}^+(t_2)\mathrm{Q}(t_1)|i\rangle \tag{59.9}$$

を得る．もしも積分が十分大きい時間間隔にわたって行なわれるならば，t_1，t_2 の代りに新変数

$$\tau = t_2-t_1,\quad t = \frac{t_1+t_2}{2}$$

を導入し，dt についての積分中で，被積分関数を単位時間の放出確率とみなすことができる．これに $\hbar\omega$ を掛けて強度を得る．

$$dI = \frac{e^2}{4\pi^2}d^3k\int e^{-i\omega\tau}\left\langle i\left|\mathrm{Q}^+\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{Q}\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right|i\right\rangle d\tau. \tag{59.10}$$

超相対論的電子はその速度 $\boldsymbol{v}$ に対して角度 $\theta\sim m/\varepsilon$ の狭い円錐内に輻射する．したがって，与えられた方向 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{k}/\omega$ の輻射は $\boldsymbol{v}$ が角度 $\sim m/\varepsilon$ だけ向きを変える軌道部分上で形成される．この部分は $\tau|\dot{\boldsymbol{v}}|\approx\tau\omega_0\sim m/\varepsilon\ll 1$ の時間 τ で通り過ぎる．すなわち，この領域が $d\tau$ の積分の基本的寄与を与える．したがって，先の計算ではすべての量を系統的に $\omega_0\tau$ の冪で展開しよう．しかしながらこの際，$1-\boldsymbol{nv}\sim\theta^2\sim(m/\varepsilon)^2$ のために小さくなることもあるので，展開の1次以上の高次の項も残しておく必要性が示されうる．

もしも演算子 $\mathrm{Q}^+\mathrm{Q}$ を（必要な精度で）可換な演算子の積の形にすれば，その対角要素 $\langle i|\cdots\cdots|i\rangle$ をとることは，これらの演算子を対応する量の（時間の関数としての）古典量に置き換えることに帰してしまう．この目的はつぎのようにして達せられる．

上に述べたことにしたがって，$\mathrm{Q}(t)$ に対する式で電子の演算子は，光子場と結びついた演算子 $\exp(-i\boldsymbol{k}\mathbf{r}(t))$ との非可換性のみを考慮する必要がある．すなわち

$$\mathbf{p}e^{-i\boldsymbol{k}\mathbf{r}} = e^{-i\boldsymbol{k}\mathbf{r}}(\mathbf{p}-\hbar\boldsymbol{k}), \tag{59.11}$$

$$\mathrm{H}e^{-i\boldsymbol{k}\mathbf{r}} = e^{-i\boldsymbol{k}\mathbf{r}}(\mathrm{H}-\hbar\omega) \tag{59.12}$$

---

1) (59.7)のなかで時間についての積分はいまだ行なわれない．したがってエネルギー保存は出てこない．そして φ_f による和は，なんらの条件によっても制限されない．

となる．これらの関係式の第一のものは，$e^{-i\mathbf{kr}}$ が運動量空間での変位演算子であることの結果であり，第二のものを導くためには

$$\{\mathrm{H},\ e^{-i\mathbf{kr}}\}_- = -i\hbar\frac{d}{dt}e^{-i\mathbf{kr}}$$

を考慮し，(59.7) で部分積分をする必要がある．(59.11) を使って (59.8) のなかで演算子 $e^{-i\mathbf{kr}(t)}$ を左へ移し，Q(t) を

$$\mathrm{Q}(t) = e^{-i\mathbf{kr}(t)}\mathrm{R}(t), \quad \mathrm{R}(t) = \frac{u_f^+(\mathrm{p}')}{\sqrt{2\mathrm{H}'}}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{e}^*)\frac{u_i(\mathrm{p})}{\sqrt{2\mathrm{H}}} \qquad (59.13)$$

の形に書く．ここで $\mathrm{H}' = \mathrm{H}-\hbar\omega$，$\mathbf{p}' = \mathbf{p}-\hbar\boldsymbol{k}$ である．

ここで

$$\mathrm{Q}_2^+\mathrm{Q}_1 = \mathrm{R}_2^+e^{i\mathbf{kr}_2}e^{-i\mathbf{kr}_1}\mathrm{R}_1 \qquad (59.14)$$

である（ここおよび以下では添字1および2は，$t_1 = t-\tau/2$ および $t_2 = t+\tau/2$ の瞬間のその量の値であることを表わす）．二つの非可換演算子 $e^{i\mathbf{kr}_2}$，$e^{-i\mathbf{kr}_1}$ の積の計算が残っている．この積自身は他の因子とは可換と考えることができる[1]．

$$\mathrm{L}(\xi) = e^{-i\omega\tau(\xi-1)}e^{i\xi\mathbf{kr}_2}e^{-i\xi\mathbf{kr}_1} \qquad (59.15)$$

と置こう．ここで ξ は付加的パラメータである．われわれに興味のある演算子は L(1) である．定義 (59.15) を ξ で微分して微分方程式

$$\frac{d\mathrm{L}}{d\xi} = \mathrm{L}(\xi)e^{i\xi\mathbf{kr}_2}\,\mathrm{b}e^{-i\xi\mathbf{kr}_1} \qquad (59.16)$$

を得る．ここで簡単のために

$$\mathrm{b} = i\boldsymbol{k}(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)-i\omega\tau$$

と置いた．量 b は $\boldsymbol{H}$ に垂直な平面内での古典的運動の方程式を使い，$\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}(t_1)$ により表わすことができる[2]．すなわち

$$\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1 = \frac{\boldsymbol{p}_1}{eH}\sin\frac{eH\tau}{\varepsilon}+\frac{[\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{H}]}{eH^2}\left(1-\cos\frac{eH\tau}{\varepsilon}\right)$$

である（II，§21 参照）．τ の冪で展開して

---

1) Hとの可換性は (59.12) から明らかである．$\mathbf{p}$ との交換関係を考察する際，関係式 (59.11) は同一時間に属する演算子に関するものであることを考慮する必要がある．適当な展開を行ない $\sim(m/\varepsilon)^2$ の項を落として，求める結果が得られる．

2) 磁場内での速度成分の非可換性は，相対的な大きさの程度が $\hbar\omega_0/\varepsilon$ の項へと導き，重要でないから，こうすることができる．

$$b(p_1) \approx i\omega\tau\left\{(v_1 n-1)+\tau\frac{en[p_1 H]}{2\varepsilon^2}-\tau^2\frac{e^2H^2}{6\varepsilon^2}\right\} \tag{59.17}$$

を得る（最後の項では $nv_1 \approx 1$ と置いた）．ふたたび p-空間での変位演算子としての e^{-ikr_1} の意味を考慮して

$$e^{i\xi kr_1}b(p_1)e^{-i\xi kr_1} = b(p_1-\xi\hbar k) \equiv b_-$$

を得る．添字の負号はここおよび以下では，その量が引数 $p_1-\xi\hbar k$ の関数であることを意味する．関数 $b(p)$ を (59.17) から取り b_- を変形しよう．第1項のなかで

$$v_-n-1 \approx \frac{1}{2}[(v_-n)^2-1] = \frac{1}{2\varepsilon_-^2}\{(p_1n-\xi\hbar\omega)^2-(p_1-\xi\hbar k)^2-m^2\}$$

$$= \frac{(p_1n)^2-\varepsilon^2}{2\varepsilon_-^2} \approx \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon_-^2}(v_1n-1)$$

と書く．(59.17)の残りの項の変形は，ただ分母のなかの ε を ε_- に置き換えることに帰してしまう．このようにして，$b_- = (\varepsilon/\varepsilon_-)^2 b$ となる．今 p と n の方向が接近していることと，$\varepsilon \approx p$ であることを考慮して必要な精度で，$\varepsilon_- \approx \varepsilon-\xi\hbar\omega$ と置くことができる．

最終的に方程式 (59.16) を

$$\frac{dL}{d\xi} = L(\xi)\frac{\varepsilon^2 b}{(\varepsilon-\hbar\xi\omega)^2}$$

の形に求める．ここでは因子の順序はすでに重要でなく，すべての量を古典的と考えることができる．この方程式を $L(0) = e^{i\omega\tau}$ の条件のもとに解いて

$$L(\xi) = \exp\left\{b\frac{\xi\varepsilon}{\varepsilon-\hbar\omega\xi}+i\omega\tau\right\}$$

を得る．したがって

$$L(1) = \exp\left\{i\omega\tau+i\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}(kr_2-kr_1-\omega\tau)\right\}. \tag{59.18}$$

ここで $\varepsilon' = \varepsilon-\hbar\omega$ である．

(59.14) のなかの残りの因子を変形しよう．$R(t)$（行列 α は (21.20) からとる）のなかの積を直接に展開して

$$R(t) = w_f^* e^*(A+i[B\sigma])w_i,$$

$$A = \frac{p}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon'}\right) = \frac{\varepsilon+\varepsilon'}{2\varepsilon'}v, \tag{59.19}$$

$$B = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{\varepsilon+m}-\frac{p'}{\varepsilon'+m}\right) \approx \frac{\hbar\omega}{2\varepsilon'}\left(n-v+v\frac{m}{\varepsilon}\right)$$

となる．ここで $\varepsilon' = \varepsilon - \hbar\omega$，$\boldsymbol{p}'(t) = \boldsymbol{p}(t) - \hbar\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}/\omega$ である．m/ε の高次の項を落とした．このようにして，最終的に

$$\langle i|\mathrm{Q}_2^+\mathrm{Q}_1|i\rangle = R_2^* R_1 \exp\left\{i\omega\tau + i\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}(\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{k}\boldsymbol{r}_1 - \omega\tau)\right\},$$
$$R_2^* R_1 = \mathrm{Sp}\,\frac{1+\boldsymbol{\zeta}_i\boldsymbol{\sigma}}{2}((\boldsymbol{A}_2 - i[\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{\sigma}])\boldsymbol{e})\frac{1+\boldsymbol{\zeta}_f\boldsymbol{\sigma}}{2}((\boldsymbol{A}_1 + i[\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{\sigma}])\boldsymbol{e}^*) \tag{59.20}$$

を得る．因子 $(1+\boldsymbol{\zeta\sigma})/2$ は電子の始および終状態の2行2列の偏りの密度行例である．

光子と終りの電子の偏りについて加え，始めの電子の偏りについて平均した輻射強度を考察しよう．上のような操作の結果，簡単な計算ののちに [1]

$$\frac{1}{2}\sum_{\text{偏り}} R_2^* R_1 = \frac{\varepsilon^2+\varepsilon'^2}{2\varepsilon'^2}(\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2 - 1) + \frac{1}{2}\left(\frac{\hbar\omega}{\varepsilon'}\right)^2\left(\frac{m}{\varepsilon}\right)^2$$

を得る．必要な精度で

$$\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2 = v^2 - \frac{\tau^2}{4}\dot{v}^2 + \frac{\tau^2}{4}v\ddot{v} = 1 - \frac{m^2}{\varepsilon^2} - \frac{1}{2}\omega_0^2\tau^2$$

である．これらの式を (59.20) に代入し，つぎに (59.10) に代入し

$$dI = -\frac{e^2}{4\pi^2}\omega^2 d\omega\, do_n \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{m^2}{\varepsilon\varepsilon'} + \frac{\varepsilon^2+\varepsilon'^2}{4\varepsilon'^2}\omega_0^2\tau^2\right)\exp\left\{-\frac{i\omega\tau\varepsilon}{\varepsilon'}\left(1 - \boldsymbol{n}\boldsymbol{v} + \frac{\tau^2}{24}\omega_0^2\right)\right\}d\tau \tag{59.21}$$

を得る．この公式は輻射強度のスペクトル分布，および角度分布を与える．

電子の軌道面と $\boldsymbol{n}$ のあいだの角度 ϑ，およびまたベクトル $\boldsymbol{n}$ のこの面への投影とベクトル $\boldsymbol{v}$ とのあいだの角度 ϕ を導入しよう．小さい角度が積分に基本的な寄与をすることを考慮して

$$\boldsymbol{n}\boldsymbol{v} = v\cos\vartheta\cos\phi \approx v\left(1 - \frac{\vartheta^2+\phi^2}{2}\right)$$

---

1) ここではまた，つぎの事情も使われる．$\boldsymbol{e}$ についての和をとると

$$\sum_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{e})(\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{e}^*) = \boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{n})(\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{n})$$

となる．(59.20) を (59.9) に代入するとき

$$(\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{n})\exp\left(-\frac{i\varepsilon}{\varepsilon'}\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}_1\right) = \frac{i\varepsilon'}{\varepsilon\omega}\frac{d}{dt_1}\exp\left(-\frac{i\varepsilon}{\varepsilon'}\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}_1\right),$$

および $\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{n}$ に対して同様な式に注意して，部分積分を行なうことができる．その結果，さらに積分するためには，$\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{n}$ および $\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{n}$ はここでは1に置き換えることができることがわかる．

と置くことができる．

公式 (59.21) を積分するために，τ, ϕ の代りに

$$\omega_0\tau=\left(\frac{2\omega_0\varepsilon'}{\varepsilon\omega}\right)^{1/3}(x+y),\quad \phi=\left(\frac{2\omega_0\varepsilon'}{\varepsilon\omega}\right)^{1/3}\frac{x-y}{2}$$

によって，新変数 x, y を導入すると便利である．このとき (59.21) のなかの指数は

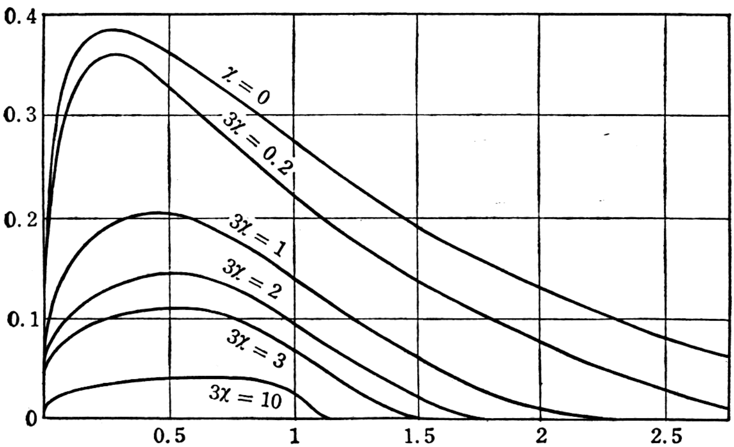
$$-i\left(x\eta+\frac{x^3}{3}+y\eta+\frac{y^3}{3}\right)$$

の形をとる．ここで記号

$$\eta=\left(\frac{u}{2\chi}\right)^{2/3}(1+\delta^2),\quad u=\frac{\hbar\omega}{\varepsilon'}=\frac{\hbar\omega}{\varepsilon-\hbar\omega},\quad \delta=\frac{\vartheta\varepsilon}{m} \tag{59.22}$$

が導入された．$dx\,dy$ についての積分はエアリ関数およびその微係数によって表わされる[1]．この結果スペクトル分布が積分

$$\frac{dI}{d\omega}=\frac{2e^2m^2}{\pi\hbar\varepsilon}\frac{u}{1+u}\left(\frac{u}{2\chi}\right)^{1/3}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{-\Phi^2(\eta)+(1+\delta^2)\left(1+\frac{u^2}{2(1+u)}\right)\right.$$
$$\left.\times\left[\Phi^2(\eta)+\frac{1}{\eta}\Phi'^2(\eta)\right]\right\}d\delta \tag{59.23}$$



第 5 図

1) エアリ関数の定義と，そのマクドナルド関数との関係についてはⅢ，§b；Ⅱ，§59 参照．

の形に求められる．角度 $\vartheta\sim m/\varepsilon$ $(\delta\sim 1)$ が積分に基本的寄与を与える．分布の極大は $\eta\sim(\hbar\omega/\varepsilon'\chi)^{2/3}\sim 1$ の振動数のところにある．$\chi\ll 1$ のときはこれから (59.1) が $\chi\gg 1$ のときは (59.4) が出てくる．

第5図は種々の χ の値のときのスペクトル分布を図示している[1]．

$$\frac{1}{\frac{3}{2}I_{古典}}\frac{dI}{d(\omega/\omega_c)}$$

という量が，ω/ω_c の関数として描かれている．ここで

$$\hbar\omega_c=\frac{\varepsilon\chi}{\frac{2}{3}+\chi},\quad I_{古典}=\frac{2e^2m^2\chi^2}{3\hbar^2}=\frac{2e^4H^2\varepsilon^2}{3m^4}$$

である．量 $I_{古典}$ は古典的全輻射強度である（II (74.2) とくらべよ）．

関係式

$$\Phi^2(\eta)+\frac{1}{\eta}\Phi'^2(\eta)=\frac{1}{2\eta}\frac{d^2}{d\eta^2}\Phi^2(\eta)$$

を使い，$(u/2\chi)^{2/3}\delta^2=t$ にしたがって変数 δ を置き換えて，(59.23) を

$$\frac{dI}{d\omega}=\frac{2e^2m^2}{\pi\hbar\varepsilon}\frac{u}{1+u}\left\{-1+\frac{2}{x}\left(1+\frac{u^2}{2(1+u)}\right)\frac{d^2}{dx^2}\right\}\int_0^\infty\frac{dt}{\sqrt{t}}\Phi^2(2^{-2/3}x+t)$$

の形に書き直そう．ここで $x=(u/\chi)^{2/3}$ である．さらに公式[2]

$$\int_0^\infty\frac{dt}{\sqrt{t}}\Phi^2(2^{-2/3}x+t)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_x^\infty\Phi(x)\,dx$$

を使って，スペクトル分布を

$$\frac{dI}{d\omega}=-\frac{e^2m^2}{\sqrt{\pi}\,\hbar\varepsilon}\frac{u}{1+u}\left\{\int_x^\infty\Phi(x)\,dx+\frac{2}{x}\left(1+\frac{u^2}{2(1+u)}\right)\Phi'(x)\right\}\tag{59.24}$$

の形に導こう (А. И. Никишов, В. И. Ритус 1967)．古典的極限の場合は $\hbar\omega\ll\varepsilon$ で，したがって $u\approx\hbar\omega/\varepsilon$，$x\approx(\omega/\omega_0)^{2/3}(m/\varepsilon)^2$ であり，(59.24) は古典式 II (74.13) に移ってしまう．

$$dI=\frac{dI}{d\omega}d\omega=\frac{dI}{d\omega}\frac{\varepsilon}{(1+u)^2\hbar}du$$

と書き，du について $0\to\infty$ の極限まで積分し（このとき (59.24) の第1項の積分を2度行ない）

1) 第5，6図のグラフはエヌ・ペ・クレピコフの計算によって作られた．

2) この公式の導き方はつぎの論文にある：D. E. Aspnes, *Phys. Rev.* **147**, 554 (1966).

$$I = -\frac{e^2 m^2 \chi^2}{2\sqrt{\pi}\hbar^2}\int_0^\infty \frac{4+5\chi x^{3/2}+4\chi^2 x^3}{(1+\chi x^{3/2})^4}\Phi'(x)\,x\,dx. \tag{59.25}$$

を得る (И. И. Гольдман, 1964). 第6図には関数 $I(\chi)/I_{古典}$ の図が描かれている.

$\chi \ll 1$ のとき積分のなかでは, $x \sim 1$ の領域が重要である. 被積分関数を χ について展開し, この展開を公式

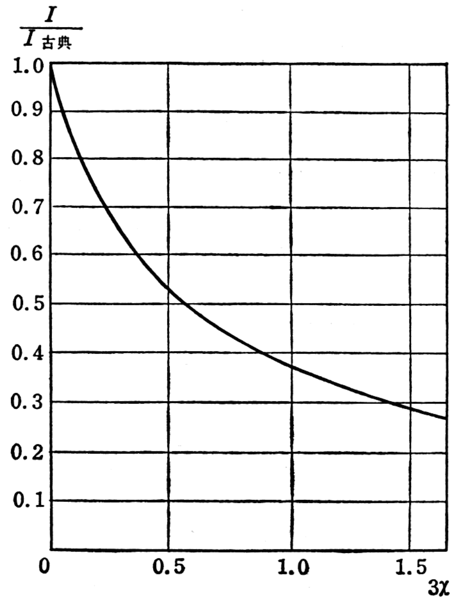
$$\int_0^\infty x^\nu \Phi'(x)\,dx = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}3^{(4\nu-1)/6}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{3}+1\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{3}+\frac{1}{3}\right)$$

を使って積分し

$$I = I_{古典}\left(1-\frac{55\sqrt{3}}{16}\chi+48\chi^2-\cdots\right). \tag{59.26}$$

$\chi \gg 1$ のとき積分のなかでは, $\chi x^{3/2} \sim 1$, すなわち $x \ll 1$ の領域が重要である. したがって, 1次近似では $\Phi'(x)$ を $\Phi'(0) = -3^{1/6}\Gamma(2/3)/2\sqrt{\pi}$ で置き換え, そのあとで積分すると

$$I = \frac{32\Gamma(2/3)e^2m^2}{243\hbar^2}(3\chi)^{2/3} = 0.82\frac{e^2m^2}{\hbar^2}\left(\frac{H\varepsilon}{H_0 m}\right)^{2/3}. \tag{59.27}$$



第 6 図

磁気的制動輻射の結果, 磁場内を運動する電子に偏りが発生する (A. A. Соколов, И. M. Тернов, 1963). この問題を考察するために, スピンの方向の回転を伴う輻射遷移の確率を見いだす必要がある.

(59.20) で $\boldsymbol{\zeta}_i = -\boldsymbol{\zeta}_f \equiv \boldsymbol{\zeta}, |\boldsymbol{\zeta}| = 1$ と置いて

$$R_2^* R_1 = (\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2) - (\boldsymbol{e}^*\boldsymbol{B}_1)(\boldsymbol{e}\boldsymbol{B}_2) - (\boldsymbol{e}^*[\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{\zeta}])(\boldsymbol{e}[\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{\zeta}]) - i(\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{e}^*)(\boldsymbol{e}[\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2])$$

を得る. 光子の偏りについての和は, 簡単な変形ののち, 次式を与える.

$$\sum_{e} R_2^* R_1 = (\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2)(1-(\boldsymbol{\zeta n})^2)+(\boldsymbol{\zeta n})(\boldsymbol{nB}_1)(\boldsymbol{\zeta B}_2) + (\boldsymbol{\zeta n})(\boldsymbol{nB}_2)(\boldsymbol{\zeta B}_1)-i(\boldsymbol{\zeta}-\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n\zeta}))[\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2]. \tag{59.28}$$

$\chi \ll 1$ と仮定しよう．そして確率の $\hbar$ の冪展開の主な項だけを求めよう．式 (59.28) ($\boldsymbol{B}$ は (59.19) からとる) はすでに $\hbar^2$ を含んでいるので，残りのすべての量のなかで ((59.20) のなかの指数も含めて) ε' は ε に置き換えることができる．

$$\boldsymbol{B}_1 = \frac{\omega}{2\varepsilon}\left(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{v}+\frac{\tau}{2}\dot{\boldsymbol{v}}+\boldsymbol{v}\frac{m}{\varepsilon}\right),$$

$$\boldsymbol{B}_2 = \frac{\omega}{2\varepsilon}\left(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{v}-\frac{\tau}{2}\dot{\boldsymbol{v}}+\boldsymbol{v}\frac{m}{\varepsilon}\right),$$

$$\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1 = \tau\boldsymbol{v}+\frac{\tau^3}{24}\ddot{\boldsymbol{v}}$$

と置き，(59.28) を (59.20) に代入し，その後 (59.10) に代入し，単位時間内の微分遷移確率 ($dw = dI/\hbar\omega$) を得る．その d^3k による積分は公式

$$\int f(k_\mu)e^{-ikx}\frac{d^3k}{\omega} = -f(i\partial_\mu)\frac{4\pi}{(x_0-i0)^2-\boldsymbol{x}^2} \tag{59.29}$$

を使って実行される．ここで今の場合

$$x_0 = \tau, \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1, \quad x^2 = x_0^2-\boldsymbol{x}^2 = \tau^2\left(\frac{m^2}{\varepsilon^2}+\frac{\tau^2\omega_0^2}{12}\right)$$

である．計算の結果

$$w = \frac{\alpha}{\pi}\frac{\hbar^2}{m^2}\left(\frac{\varepsilon}{m}\right)^5\omega_0^3\oint\frac{dz}{(1+z^2/12)^3}\left[\frac{3}{z^4}-\frac{5}{12z^2}+\left(\frac{1}{z^4}+\frac{5}{12z^2}\right)(\boldsymbol{\zeta v})^2-\frac{2i}{z^3\omega_0}(\boldsymbol{\zeta}[\dot{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{v}])\right]$$

となる．ここで $z = \tau\omega_0\varepsilon/m$ の置き換えが行なわれた．また dz による積分径路は，実軸の下を通り下半平面を回っている．この最後の積分を行なって，最終的にスピンの回転を伴う輻射遷移の全確率は

$$w = \frac{5\sqrt{3}\alpha}{16}\frac{\hbar^2}{m^2}\left(\frac{\varepsilon}{m}\right)^5\omega_0^3\left(1-\frac{2}{9}\zeta_\parallel^2-\frac{8\sqrt{3}}{15}\frac{e}{|e|}\zeta_\perp\right) \tag{59.30}$$

となる．ここで $\zeta_\parallel = \boldsymbol{\zeta v}$，$\zeta_\perp = \boldsymbol{\zeta H}/H$ である．この公式は電子に対しても ($e<0$)，陽電子に対しても ($e>0$) 役に立つ．

確率 (59.30) は縦方向の偏りの符号に依存しないが，$\zeta_\perp$ の符号には依存する．したが

って輻射の結果生じる偏りは横方向である[1]．電子に対して≪場に沿った≫スピンを持つ（$\zeta_\perp = 1$）状態から，≪場と逆向きの≫スピン状態への遷移確率は，この逆遷移の確率よりも大きい．したがって電子の輻射による偏りは場と逆向きであり，標準状態におけるその程度は（$\zeta_\parallel = 0$ のとき）

$$\frac{w(\zeta_\perp = -1) - w(\zeta_\perp = 1)}{w(\zeta_\perp = -1) + w(\zeta_\perp = 1)} = \frac{8\sqrt{3}}{15} = 0.93$$

に等しい．陽電子は場の方向に（同じ程度）偏る．

1）しかしこの結果は前から明らかである．なぜかというと，偏りを生じる軸性ベクトルは，問題にただ一つ現われる軸性ベクトル $\boldsymbol{H}$ 方向にのみ向くことができるからである．

第6章　光　の　散　乱

§60.　散乱のテンソル

電子系(簡単のために原子と呼ぼう)による光の散乱は，同時に他の光子 $\boldsymbol{k}'$ の放出を伴った光子 $\boldsymbol{k}$ の吸収である．この際，原子は始めの状態に留まってもよいし，どれかほかのエネルギーの離散準位に移ってもよい．第一の場合には，光子の振動数は変わらない(**レーリー散乱**あるいは**ずれない散乱**)．また第二の場合は

$$\omega'-\omega = E_1-E_2 \tag{60.1}$$

という量だけ変化する．ここで E_1, E_2 は原子の始め，および終りのエネルギーである(**結合散乱**あるいは**ずれる散乱**)[1]．

電磁的摂動の演算子は，同時に二つの光子占有数が変化する遷移に対する行列要素を持たないから，散乱の効果は2次近似の摂動論によってのみ現われる．それは一定の中間状態をへて起こると考える必要があり，その中間状態には二つの型が可能である．

I．光子 $\boldsymbol{k}$ が吸収され，原子は可能な状態の一つ E_n に移る．つぎの終状態への遷移で光子 $\boldsymbol{k}'$ が放出される．

II．光子 $\boldsymbol{k}'$ を放出して，原子は状態 E_n に移る．そして終状態へ移るに際して光子 $\boldsymbol{k}$ を吸収する．

散乱過程に対する行列要素の役割は，和

$$V_{21} = \sum_n{}' \left(\frac{V'_{2n} V_{n1}}{\mathcal{E}_1-\mathcal{E}_n^{\mathrm{I}}} + \frac{V_{2n} V'_{n1}}{\mathcal{E}_1-\mathcal{E}_n^{\mathrm{II}}} \right) \tag{60.2}$$

が果たしている(III(43.6)参照)．ここで≪原子＋光子≫の始めのエネルギーは $\mathcal{E}_1 = E_1 + \omega$ で，中間状態のエネルギーは

---

1)　この章では散乱体の始および終状態に関する量は，添字1および2で表わされる．

$$\mathcal{E}_n^{\mathrm{I}} = E_n, \quad \mathcal{E}_n^{\mathrm{II}} = E_n + \omega + \omega'$$

である．$V_{..}$ は光子 $\boldsymbol{k}$ を吸収する行列要素で，$V'_{..}$ は光子 $\boldsymbol{k}'$ を放出する行列要素である．始状態は n についての和からは落とされる（これは和の記号につけた ′ によって示される）．散乱断面積は

$$d\sigma = 2\pi |V_{21}|^2 \frac{\omega'^2 do'}{(2\pi)^3} \tag{60.3}$$

である．ここで do' は $\boldsymbol{k}'$ 方向に対する立体角要素である[1]．

始めおよび終りの光子の波長は散乱系の大きさにくらべて大きいと考えよう．それに対応して，すべての遷移を2重極近似で考察しよう．光子の状態を平面波で記述すれば，因子 $e^{i\boldsymbol{kr}}$ を1に置き換えることがこの近似に対応する．このとき，光子の波動関数は（3次元横波ゲージで）

$$\boldsymbol{A}_{e\omega} = \sqrt{4\pi}\frac{\boldsymbol{e}}{\sqrt{2\omega}}e^{-i\omega t}, \qquad \boldsymbol{A}_{e'\omega'} = \sqrt{4\pi}\frac{\boldsymbol{e}'}{\sqrt{2\omega'}}e^{-i\omega' t}.$$

いま考えられている条件では，電磁相互作用の演算子は

$$\mathrm{V} = -\mathbf{dE} \tag{60.4}$$

の形に書かれる．ここで $\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}}$ は電場の張力の演算子で，$\mathbf{d}$ は原子の2重極モーメントの演算子である．これは電場内の大きさの小さい系のエネルギーの古典式に類似している（II，§42参照）．この行列要素は

$$V_{n1} = -i\sqrt{2\pi\omega}\,(\boldsymbol{e}\boldsymbol{d}_{n1}), \quad V'_{2n} = i\sqrt{2\pi\omega'}\,(\boldsymbol{e}'^*\boldsymbol{d}_{2n})$$

である．これらの式を (60.2)，(60.3) に代入して，散乱断面積を得る（これを普通の単位で書こう）[2]．

$$d\sigma = \left|\sum_n \left\{\frac{(\boldsymbol{d}_{2n}\boldsymbol{e}'^*)\,(\boldsymbol{d}_{n1}\boldsymbol{e})}{\omega_{n1}-\omega} + \frac{(\boldsymbol{d}_{2n}\boldsymbol{e})\,(\boldsymbol{d}_{n1}\boldsymbol{e}'^*)}{\omega_{n2}+\omega}\right\}\right|^2 \frac{\omega\omega'^3}{\hbar^2 c^4}do',$$
$$\hbar\omega_{n1} = E_n - E_1, \quad \hbar\omega_{n2} = E_n - E_2. \tag{60.5}$$

---

1) 立体角 do' に（毎秒）散乱される光のエネルギー dI' は，入射光の強度 I（エネルギーの流れの密度）を使って表わされる．

$$dI' = I\frac{\omega'}{\omega}d\sigma.$$

2) この公式は最初にクラマースとハイゼンベルクにより求められた (H. A. Kramers, W. Heisenberg, 1925).

和は連続スペクトルの状態をも含めて，原子の可能な状態のすべてについて行なわれる(この際行列の対角要素 $\boldsymbol{d}_{11}=\boldsymbol{d}_{22}=0$ であるから，状態1および2は自動的に落ちてしまう)．記号

$$(c_{ik})_{21}=\sum_n\left[\frac{(d_i)_{2n}(d_k)_{n1}}{\omega_{n1}-\omega}+\frac{(d_k)_{2n}(d_i)_{n1}}{\omega_{n2}+\omega}\right] \tag{60.6}$$

を導入しよう[1] ($i,k=x,y,z$ は3次元ベクトル添字である)．これを使って，公式(60.5)は

$$d\sigma=\omega(\omega+\omega_{12})^3|(c_{ik})_{21}e'_i{}^*e_k|^2do' \tag{60.7}$$

の形に書き直される．

(60.6)の記法は，二，三のテンソルの行列要素が実際にこの和で表わされることから正当化される．このためには，対応する演算子が方程式

$$\left(i\frac{d}{dt}+\omega\right)\mathbf{b}=\mathbf{d}$$

を満足するような $\mathbf{b}$ を導入すると，一番簡単に確かめることができる．その行列要素は

$$b_{n1}=\frac{d_{n1}}{\omega-\omega_{n1}},\quad b_{2n}=\frac{d_{2n}}{\omega+\omega_{n2}}$$

となり，したがって

$$(c_{ik})_{21}=(b_kd_i-d_ib_k)_{21} \tag{60.8}$$

となる．行列要素 $(c_{ik})_{21}$ を光の**散乱テンソル**と呼ぼう．

上に述べたことから，散乱に対する選択則は，任意の2階のテンソルの行列要素に対する選択則と一致することが導かれる．もしも系が対称中心を持つ（したがって，その状態は偶奇性によって分類することができる）ならば，遷移は同じ偶奇性の状態のあいだで（そのなかには状態の変化のないのも含めて）のみ可能であることも指摘しておこう．

この選択則は（電気的2重極）輻射の際の偶奇性についての選択則とは逆で，二者択一で禁止が現われる．すなわち，輻射で許される遷移は散乱では禁止され，散乱で許されるのは輻射では禁止される．

テンソル c_{ik} を既約部分に分解する．

$$c_{ik}=c^0\delta_{ik}+c^s_{ik}+c^a_{ik}. \tag{60.9}$$

---

1) この先§60～§62に述べられている結果の大部分は，主としてプラチェックによるものである (G. Placzek, 1931～1933).

ここで

$$c^0 = \frac{1}{3}c_{ii},$$

$$c^s_{ik} = \frac{1}{2}(c_{ik}+c_{ki}) - c^0\delta_{ik}, \qquad (60.10)$$

$$c^a_{ik} = \frac{1}{2}(c_{ik}-c_{ki})$$

で，それぞれスカラー，(跡が0に等しい)対称テンソルおよび反対称テンソルである．その行列要素はつぎのとおりになる．

$$(c^0)_{21} = \frac{1}{3}\sum_n \frac{\omega_{n1}+\omega_{n2}}{(\omega_{n1}-\omega)(\omega_{n2}+\omega)}(d_i)_{2n}(d_i)_{n1}, \qquad (60.11)$$

$$(c^s_{ik})_{21} = \frac{1}{2}\sum_n \frac{\omega_{n1}+\omega_{n2}}{(\omega_{n1}-\omega)(\omega_{n2}+\omega)}[(d_i)_{2n}(d_k)_{n1}+(d_k)_{2n}(d_i)_{n1}] - (c^0)_{21}\delta_{ik}, \qquad (60.12)$$

$$(c^a_{ik})_{21} = \frac{2\omega+\omega_{12}}{2}\sum_n \frac{(d_i)_{2n}(d_k)_{n1}-(d_k)_{2n}(d_i)_{n1}}{(\omega_{n1}-\omega)(\omega_{n2}+\omega)}. \qquad (60.13)$$

光子の振動数が小さい，および大きい極限の場合に，散乱テンソルの若干の性質を考察しよう[1]．

ずれのない散乱 ($\omega_{12}=0$) に対して，((60.13) の和の前の因子 ω のために) $\omega\to 0$ のときに，テンソルの反対称部分は0になる．散乱テンソルのスカラーおよび対称部分は $\omega\to 0$ のとき有限の極限に近づく．したがって ω が小さいときの断面積は，ω^4 に比例する．

逆の場合，すなわち ω が (60.6) ですべての重要な ω_{n1}，ω_{n2} にくらべて大きい（しかし，前と同じように波長 $\gg a$) 場合には，古典論の公式へもどる必要がある．散乱テンソルの $1/\omega$ の冪展開の第1項は

$$\frac{1}{\omega}\sum_n [(d_k)_{2n}(d_i)_{n1}-(d_i)_{2n}(d_k)_{n1}] = \frac{1}{\omega}(\mathrm{d}_k\mathrm{d}_i-\mathrm{d}_i\mathrm{d}_k)_{21}$$

に等しく，演算子 d_i，d_k の可換性のために 0 になる．展開のつぎの項は

$$(c_{ik})_{21} = \frac{1}{\omega^2}\sum_n [\omega_{2n}(d_k)_{2n}(d_i)_{n1}-(d_i)_{2n}\omega_{n1}(d_k)_{n1}] = \frac{1}{i\omega^2}(\dot{\mathrm{d}}_k\mathrm{d}_i-\mathrm{d}_i\dot{\mathrm{d}}_k)_{21}$$

---

1) 共鳴の場合 (ω が振動数 ω_{n1} あるいは ω_{n2} のどれか一つに近いとき) は§64で考察される．

である．定義 $\boldsymbol{d}=\sum e\boldsymbol{r}$ (原子内のすべての電子についての和) および運動量と座標のあいだの交換則を使って

$$(c_{ik})_{11}=-\frac{Ze^2}{m\omega^2}\delta_{ik},\quad (c_{ik})_{21}=0 \tag{60.14}$$

を得る．ここでZは系内の電子の総数である．このようにして，振動数の大きい極限で，散乱テンソルのなかではスカラー部分だけが残る．このとき散乱は系の状態の変化なしに起こる（すなわち，散乱は完全に干渉性である．以下参照）．この場合の散乱断面積は

$$d\sigma=r_e^2Z^2|\boldsymbol{e}'^*\boldsymbol{e}|^2do' \tag{60.15}$$

であり，ここで $r_e=e^2/m$ である．終りの光子の偏りについて加えたのち，公式

$$d\sigma=r_e^2Z^2\{1-(\boldsymbol{e}\boldsymbol{n}')^2\}do'=r_e^2Z^2\sin^2\theta\cdot do' \tag{60.16}$$

を得る．これは実際にトムソンの古典式 II (80.7) と一致する（θ は散乱方向と入射光子の偏りのベクトルのあいだの角である）．

波長にくらべて小さい体積中に置かれた，N個の同一原子の集まりによる光の散乱を考えよう．このような集まりの散乱テンソルは，原子のおのおのの散乱テンソルの和である．しかしながらこのとき，つぎのことを考慮する必要がある．すなわち（2重極モーメントの行列要素の計算に使うべき）波動関数が，同時に考察される若干の原子に対して，簡単に同一と考えてはいけない．波動関数は，その本質上任意の位相因子以外は決定され，その因子は各原子に固有のものである．散乱断面積は各原子の位相因子について独立に平均しなければならない．

各原子の散乱テンソル $(c_{ik})_{21}$ は因子 $e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$ を持っている．ここで φ_1，φ_2 は始および終状態の波動関数の位相である．ずれる散乱に対しては状態 *1* および *2* は異なり，この因子は1と異なる．絶対値の2乗

$$|e_i'^*e_k\sum(c_{ik})_{21}|^2$$

（和はN個の原子すべてについて行なう）のなかで，異なる原子に関係する積の項は位相因子を含むはずで，それは各原子の位相についての独立な平均の際 0 になる．したがって，各項の絶対値の2乗だけが残る．これはN個の原子の全散乱断面積は，1個の散乱のN倍によって得られることを意味する（散乱は非干渉性である）．

原子の始および終状態が一致すると，因子 $e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}=1$ である．この場合には原子の集まりの散乱振幅は1個の原子の散乱振幅と因子Nだけ異なることとなり，したがって散

乱断面積は因子 N^2 だけ異なることになる(散乱は干渉性である)．もしも原子のエネルギー準位が縮退していないと，ずれない散乱は，このようにして，完全に干渉性である．もしもエネルギー準位が縮退していると，互いに縮退した異なる準位間の遷移によって起こる，非干渉性のずれない散乱もまた起こる．これが純量子効果であることを指摘しておこう．すなわち，古典論では振動数の変化のない散乱はそのまま干渉性であるからである．

干渉性散乱テンソルは，2重極行列の対角要素 $(c_{ik})_{11}$ で与えられる．これを α_{ik} で表わそう(長たらしくなるのを避けるために，原子状態を示すべき添字は落とした)．(60.6)にしたがって

$$\alpha_{ik}(\omega) \equiv (c_{ik})_{11} = \sum_n \left[\frac{(d_i)_{1n}(d_k)_{n1}}{\omega_{n1}-\omega} + \frac{(d_k)_{1n}(d_i)_{n1}}{\omega_{n1}+\omega}\right] \tag{60.17}$$

となる．$(d_i)_{1n} = (d_i)^*_{n1}$ に注意して，このテンソルがエルミートであることが容易にわかる[1]．

$$\alpha_{ik} = \alpha^*_{ki}. \tag{60.18}$$

これはそのスカラーおよび対称部分が実で，反対称部分が虚であることを意味している．原子が縮退のない状態にあれば，反対称部分がもちろん0になることに注目しよう．このような状態の波動関数は実であり[2]，それにより行列の対角要素は実である．

テンソル α_{ik} は外部電場内の原子の偏りに関係している．この関係を確立するために，もしも系が外部電場

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}e^{-i\omega t}+\boldsymbol{E}^*e^{i\omega t}) \tag{60.19}$$

のなかに持ち込まれたとするときの，系の2重極モーメントの平均値の補正を計算しよう．これは摂動論のよく知られた定理(III，§40参照)を使うことによって可能である．すなわち，系に摂動

---

1)　この結果は線の自然幅，それとともに入射波を吸収する可能性を無視したことに関連している(§64参照)．

2)　このことは時間の符号の変化に関する対称性(外部磁場にはないものとする)と関連していることを思い起こそう．t を $-t$ に変えると，標準状態の波動関数 ψ は ψ^* に変えられる．すなわち，ψ と ψ^* は二つとも同一エネルギーの可能な状態を記述している．これから，もしも準位が縮退していなければ，ψ と ψ^* は(重要でない位相因子を除いて)一致する必要があり，したがって，ψ はいつも実関数として定義することができるはずである．もしも準位が縮退していれば，複素共役をとると，与えられた準位の波動関数は互いに変換される．したがって，実である必要はない．

$$V = Fe^{-i\omega t} + F^{+}e^{i\omega t}$$

が働くと，ある量 f の対角要素に対する1次の補正は

$$f_{11}^{(1)}(t) = -\sum_n \left\{\left[\frac{f_{1n}^{(0)}F_{n1}}{\omega_{n1}-\omega} + \frac{f_{n1}^{(0)}F_{1n}}{\omega_{n1}+\omega}\right]e^{-i\omega t} + \left[\frac{f_{1n}^{(0)}F_{1n}^{*}}{\omega_{n1}+\omega} + \frac{f_{n1}^{(0)}F_{n1}^{*}}{\omega_{n1}-\omega}\right]e^{i\omega t}\right\}.$$

今の場合

$$F = -\frac{1}{2}\mathbf{d}E$$

である．2重極モーメントの対角要素に対する補正は

$$d_{11}^{(1)} = \frac{1}{2}(\bar{d}e^{-i\omega t} + \bar{d}^{*}e^{i\omega t}) \tag{60.20}$$

に等しいことがわかる．ここで $\bar{d}$ は成分

$$\bar{d}_i = \alpha_{ik}E_k \tag{60.21}$$

を持つベクトルである．

この最後の式から，ずれない干渉性散乱のテンソル $\alpha_{ik}(\omega)$ は，同時に振動数 ω の場のなかの原子の**分極率テンソル**であることがわかる．$\omega = 0$ のとき公式（60.21）は，定電場内の普通の摂動論で定義される形の，静分極率のテンソル $\alpha_{ik}(0)$ を使った公式III(76.6)に移っていく．

問　　題[1]

1. 原子から同時に2個の光子を放出する確率を計算せよ(M. Göppert-Mayer, 1931)[2]，

解 散乱と同様に，2光子放出は2次の摂動論の効果である．求める確率は（60.5）とつぎの点だけが異なっている．すなわち，1) $\omega \to -\omega$, $e \to e^{*}$ の置き換え（吸収の代りに光子 ω の放出)，2) 余計な因子

---

1) 問題では，普通の単位が使われる．

2) 2個の光子 ω および ω' を放出する確率は，普通，振動数 $\omega+\omega'$ の1個の光子を放出する確率にくらべて非常に小さい．第二の過程を禁止する選択則が，第一のを許す場合は例外である．たとえば，$J=0$ の二つの状態のあいだの遷移はこのようなものである．このとき光子放出の過程はすべて厳密に禁止されている．水素原子の第一励起状態 $(2s_{1/2})$ から基底状態 $(1s_{1/2})$ への遷移も，今一つの例である．$E1$-輻射に対しては，この遷移は偶奇性で厳密に禁止される．（非常に弱いスピン軌道相互作用を無視すると)，それは $M1$-輻射も禁止する．この場合 $(l=0)$，磁気モーメントは純粋にスピン性の量であり，主量子数の異なる軌道波動関数の直交性のために，この行列要素は 0 になる．2光子放出によって規定される，$2s_{1/2}$ 準位の寿命は 約 7 sec である．

$$\frac{d^3k}{(2\pi)^3}=\frac{\omega^2 d\omega do}{(2\pi)^3}$$

である．このようにして，（毎秒の）輻射確率は

$$dw=\left|\sum_n\left[\frac{(\boldsymbol{d}_{2n}\boldsymbol{e}'^*)\,(\boldsymbol{d}_{n1}\boldsymbol{e}^*)}{\omega_{1n}-\omega}+\frac{(\boldsymbol{d}_{2n}\boldsymbol{e}^*)\,(\boldsymbol{d}_{n1}\boldsymbol{e}'^*)}{\omega_{1n}-\omega'}\right]\right|^2\frac{\omega^3\omega'^3}{(2\pi)^3c^6\hbar^2}\,dodo'd\omega \qquad (1)$$

となる（振動数の和は $\omega+\omega'=\omega_{12}$ である）．この式を光子の偏りについて加え，その飛行方向について積分して

$$dw=\frac{8}{9\pi}\left|\sum_n\left[\frac{(d_i)_{2n}\,(d_k)_{n1}}{\omega_{1n}-\omega}+\frac{(d_i)_{2n}\,(d_k)_{n1}}{\omega_{1n}-\omega'}\right]\right|^2\frac{\omega^3\omega'^3}{\hbar^2c^6}\,d\omega.$$

2.　≪強制散乱≫の断面積を計算せよ．すなわち，入射光子 $\boldsymbol{k}$ は不変で，その影響下で原子が2光子，すなわち一つは同じ光子 $\boldsymbol{k}$ および≪散乱された≫光子 $\boldsymbol{k}'$ を放出する．

解　考察されている過程の確率は，問題1で求められた，同時に2光子放出の確率（1）と，因子 $2N_{\boldsymbol{k}e}$ だけ異なる．ここで $N_{\boldsymbol{k}e}$ は与えられた $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{e}$ の入射光の光子数である．因子2は，式(1)に現われる2光子中の，任意のものが，強制輻射されうることを考慮した．入射光子の流れの密度は

$$dI=cN_{\boldsymbol{k}e}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}=N_{\boldsymbol{k}e}\frac{\omega^2}{8\pi^3c^2}\,d\omega do$$

に等しい．これから $2N_{\boldsymbol{k}e}$ を dI を使って表わし，この過程の確率を dI で割ってその断面積を得る．

$$d\sigma=\left|\sum_n\left[\frac{(\boldsymbol{d}_{2n}\boldsymbol{e}'^*)\,(\boldsymbol{d}_{n1}\boldsymbol{e}^*)}{\omega_{1n}-\omega}+\frac{(\boldsymbol{d}_{2n}\boldsymbol{e}^*)\,(\boldsymbol{d}_{n1}\boldsymbol{e}'^*)}{\omega_{1n}-\omega'}\right]\right|^2\frac{2\omega\omega'^3}{\hbar^2c^4}\,do'.$$

ここで ω は入射および≪強制された≫光子の振動数で，ω' は散乱された光子の振動数である（$\omega+\omega'=\omega_{12}$）．

3.　ほとんど単色の光の停立波による（非相対論的）電子の弾性散乱の確率を計算せよ（П. Л. Капица, P. A. M. Dirac, 1933）．

解　停立波は運動量 $\boldsymbol{k}$ と $-\boldsymbol{k}$ の，（同じ偏りの）光子の集まりと考えることができる．光子 $\boldsymbol{k}$ を吸収し光子 $-\boldsymbol{k}$ を強制放出する電子の散乱の結果，電子の運動量 $\boldsymbol{p}$ は $2\hbar\boldsymbol{k}$ だけ増加し，（大きさの変更なしに）角度 θ だけ回転する．すなわち，$|\boldsymbol{p}|\sin(\theta/2)=\hbar\omega/c$ である．この過程の確率はトムソン散乱の断面積

$$d\sigma = r_e^2|\boldsymbol{e}'^*\boldsymbol{e}|^2 do' = r_e^2 do'$$

から，運動量 $\boldsymbol{k}$ の光子の流れの密度と運動量 $-\boldsymbol{k}$ の光子数を掛けて，求められる．

振動数が $d\omega$ の区間の，光子の流れの密度は

$$\frac{cU_\omega d\omega}{2\hbar\omega}$$

に等しい．ここで $U_\omega d\omega$ はスペクトル区間 $d\omega$ のなかにある停立波のエネルギー密度である（因子 1/2 は，波のエネルギーが逆向きの光子とのあいだで，半分に分けられることを考慮した）．停立波を作る全光子の運動量 $\boldsymbol{k}$ は，ある方向 $\boldsymbol{n}$ に平行である（停立波の《方向》）．言いかえれば，光子の振動数および方向 $\boldsymbol{n}'$ の関数としてのエネルギー密度は，$U_{\omega\boldsymbol{n}'} = U_\omega\delta^{(2)}(\boldsymbol{n}'-\boldsymbol{n})$ である．これに対応して，光子 $-\boldsymbol{k}$ の数は

$$\int N_{-\boldsymbol{k}} do' = \frac{8\pi^3c^3}{\hbar\omega^3}\frac{U_\omega}{2}$$

に等しい（(44.8) を見よ）．この結果電子の（1秒間の）散乱確率は

$$w = \frac{2\pi^3e^4}{m^2\hbar^2\omega^4}\int U_\omega^2\, d\omega$$

である．因子 ω^{-4} は，非単色度 $\Delta\omega$ が小さいと仮定されているので，積分記号のそとに出した．積分の大きさ（全強度が与えられたとき）は，$\Delta\omega$ に逆比例する．

§61. 勝手な向きを持つ系の散乱

もしも原子のエネルギー準位に縮退がなければ，干渉性散乱の分極率および強度は同一のテンソル $\alpha_{ik} \equiv (c_{ik})_{11}$ により決定される．もしも準位に縮退があれば，上記の量の観測値は，与えられた準位のすべての状態について平均することにより求められる．分極率は平均値

$$\alpha_{ik} = \overline{(c_{ik})_{11}}$$

として定義する必要がある [1]．観測される散乱強度は積

$$\overline{(c_{ik})_{11}\,(c_{lm})_{11}}$$

1) $(c_{ik})_{11}$ という量のおのおのは複素数かもしれないが，（外部磁場内にない系に対する）その平均値は実である．実際に，平均するとき（与えられた縮退準位に対応する）波動関数を任意に選ぶことができる，そしてその際，いつもすべての関数が実になるようにすることができる．

の値として定義される．したがって，分極率と散乱とのあいだの関係はそう直接的なものではない．

（外場内にない）自由な原子，あるいは分子に対しては，縮退準位は空間内で勝手な向きをとる角運動量と結びついている．散乱の際に始状態で角運動量 J_1，終状態で J_2 を持つとしよう．普通のように散乱断面積はすべての投影値 M_1 について平均し，M_2 の値について加える必要がある．第一の平均ののち，断面積は M_2 に依存しなくなる．したがって，それから先の和は $(2J_2+1)$ を掛けることになる．このようにして，平均された散乱断面積は

$$d\bar{\sigma} = \omega\omega'^3 c^{(21)}_{iklm} e'^*_i e_k e'_l e^*_m do' \tag{61.1}$$

となる．ここで

$$c^{(21)}_{iklm} = \frac{1}{2J_1+1}\sum_{M_1M_2}(c_{ik})_{21}(c_{lm})^*_{21} = (2J_2+1)\overline{(c_{ik})_{21}(c_{lm})^*_{21}}^{1} \tag{61.2}$$

である．添字1のついた横線は M_1 についての平均を意味する．

ずれない散乱に対して，状態 *1* および *2* は同一のエネルギー準位 $(\omega_{12}=0)$ である．もしも干渉性散乱のみを扱うならば，状態 *1* および *2* は完全に一致する．すなわち，$M_1 = M_2$ でなければならない．M_2 による和およびそれとともに (61.2) のなかの因子 $(2J_2+1)$ は落ちる．

$$c^{\text{干渉}}_{iklm} = \overline{(c_{ik})_{11}(c_{lm})^*_{11}}^{1}. \tag{61.3}$$

もしも M_1 についての平均が，系のすべての向きについての平均と同等であることを考慮すれば，平均の結果は特別の計算をしないで書くことができる．そのあとで，平均値は単位テンソル δ_{ik} のみによって表わすことができる．この際，散乱テンソルのスカラー成分，対称および反対称部分の個々の積の平均値だけが，0と異なることが可能である．その対称性から交叉積に相当する式を，単位テンソルを使って作ることができないことは明らかである．このようにして

$$c^{(21)}_{iklm} = G^0_{21}\delta_{ik}\delta_{lm} + c^{(21)s}_{iklm} + c^{(21)a}_{iklm} \tag{61.4}$$

となる．ここで

$$G^0_{21} = (2J_2+1)\overline{|(c^0)_{21}|^2}^{1},$$

$$c_{iklm}^{(21)s} = (2J_2+1)\overline{(c_{ik}^{s})_{21}(c_{lm}^{s})_{21}^{*}}^{1}, \tag{61.5}$$

$$c_{iklm}^{(21)a} = (2J_2+1)\overline{(c_{ik}^{a})_{21}(c_{lm}^{a})_{21}^{*}}^{1}$$

である．言いかえれば，勝手な向きを持つ系による散乱断面積(およびそれとともに強度)は，三つの独立な部分の和に分解することができる．これらをわれわれは**スカラー**，**対称**および**反対称散乱**と呼ぼう．

(61.4) のなかの 3 項のおのおのは，すべて一つの独立な量によって表わすことができる．スカラー散乱は量 G_{21}^{0} によって表わされ，対称および反対称散乱に対しては

$$\begin{aligned} c_{iklm}^{(21)s} &= \frac{1}{10} G_{21}^{s}(\delta_{il}\delta_{km}+\delta_{im}\delta_{kl}-\frac{2}{3}\delta_{ik}\delta_{lm}), \\ G_{21}^{s} &= (2J_2+1)\overline{(c_{ik}^{s})_{21}(c_{ik}^{s})_{21}}^{1}; \\ c_{iklm}^{(21)a} &= \frac{1}{6} G_{21}^{a}(\delta_{il}\delta_{km}-\delta_{im}\delta_{kl}), \\ G_{21}^{a} &= (2J_2+1)\overline{(c_{ik}^{a})_{21}(c_{ik}^{a})_{21}}^{1} \end{aligned} \tag{61.6}$$

となる(単位テンソルの結合はその対称性から作られる．その後，共通係数は添字 il および km の対についての縮約により求められる)．

公式 (61.4)～(61.6) を (61.1) に代入して，散乱断面積に対するつぎのような式に達する．

$$d\sigma = \omega\omega'^{3}\left\{G_{21}^{0}\,|e'^{*}e|^{2}+\frac{1}{10}G_{21}^{s}\left(1+|e'e|^{2}-\frac{2}{3}|e'^{*}e|^{2}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{6}G_{21}^{a}\,(1-|e'e|^{2})\right\}do. \tag{61.7}$$

この公式は散乱の角度依存性，および偏りの性質をあらわな形で定義している．

終りの光子の偏りについて加え，始めの光子の偏りと入射方向について平均した，全方向の散乱全断面積は，直接に (61.1) から容易に求められる．これに対して，もしも平均が光子の偏りについても，伝播方向についても行なわれる(和は $2\cdot4\pi$ 倍大きい結果を与える) ならば

$$\overline{e_i^{*}e_k} = \frac{1}{3}\delta_{ik}$$

であることに注意しよう．その結果

$$\bar{\sigma} = \frac{8\pi}{9}\omega\omega'^3 c^{(21)}_{ikik} = \frac{8\pi}{9}\omega\omega'^3(3G^0_{21} + G^s_{21} + G^a_{21}). \tag{61.8}$$

以前に，散乱の選択則が任意の2階のテンソルの行列要素の選択則と一致することがすでに示されている．散乱強度の三つの独立な部分への展開に関連して，その部分のおのおのに対する選択則を別々に定式化するとつごうがよい．

対称散乱に対する選択則は，電気的4重極輻射に対する選択則と一致する．なぜかというと，それは同じ既約対称テンソル（4重極モーメントのテンソル）で定義されるからである．また反対称散乱に対し選択則は，磁気的2重極輻射に対するそれと一致する．なぜならば，これは軸性ベクトルによって定義されるからである（反対称テンソルは軸性ベクトルと同等（対偶）であることを思い起こそう[1]．しかしながら，この際，つぎのような違いがある．すなわち，輻射の場合には電気的，あるいは磁気的モーメントの平均値を与える（そして輻射遷移に対応しない）対角要素が，散乱の場合には重要である．すなわち，それは干渉性散乱に関係している．

スカラー散乱に関しては，選択則はスカラー量の行列要素に対するそれと一致する．これは同じ対称性の状態間での遷移のみ可能であることを意味する．特に，全角運動量の値 J と，その投影 M が同じである必要がある(ここで M についての対角要素は M に依存しない．III(29.2)参照)．これにより，ずれない散乱に対しては，状態 1 および 2 は(エネルギーについてのみならずMについても）完全に一致する必要がある．したがって，ずれないスカラー散乱は完全に干渉性である．逆にスカラー散乱では，すべての状態はつねに自分自身と結合するので，干渉性散乱にはいつもスカラー部分がある．

空間で勝手な向きを持つ系による散乱断面積の上記の平均と同様に，分極率テンソルもまた角運動量 J_1 の方向について平均される必要がある．平均はまったく簡単に行なわれる．明らかに

$$\alpha_{ik} \equiv \overline{(c_{ik})_{11}}^{1} = \overline{(c^0)_{11}}^{1}\delta_{ik}$$

となる．散乱テンソルの対称および反対称部分は平均するときに落ちる．すなわち，δ_{ik} は2階の単位等方テンソルであるからである．

前に，スカラーの対角要素は M_1 によらないことを指摘した．したがって，$(c^0)_{11}$ の上

1) 結局，対称性と関係し，輻射の場合の軸性ベクトルの具体的な形には関係しないような，選択則を言っているわけである．すなわち，磁気モーメントのベクトルはスピンを含んでいる．しかしながら散乱の場合には，純軌道的（座標的）性質の行列要素が問題になるわけである．

の平均の記号は一般に落とし（そして任意の M_1 の値で計算し）てもよい．したがって，分極率は

$$\alpha_{ik} = (c^0)_{11}\,\delta_{ik} \tag{61.9}$$

である．同じ理由で，G^0_{11} という量のなかで平均の記号を落としてよい．これは干渉性散乱のスカラー部分を定義している．すなわち

$$G^0_{11} = \overline{|(c^0)_{11}|^2}^{\,1} = (c^0)^2_{11} \tag{61.10}$$

である（因子 $2J_2+1$ は (61.3) に対応して落とした）．このようにして，平均分極率と干渉性散乱のスカラー部分とのあいだに簡単な関係がある．これらは

$$(c^0)_{11} = \frac{2}{3}\sum_n \frac{\omega_{n1}}{\omega^2_{n1}-\omega^2}\,|\boldsymbol{d}_{n1}|^2 \tag{61.11}$$

で定義される．

問　　題

1. 直線偏光の散乱の際の角度分布と減極率を見いだせ．

解　θ を散乱方向 $\boldsymbol{n}'$ と，入射光の偏りの方向 $\boldsymbol{e}$ とのあいだの角度としよう．散乱光は二つの独立な成分，すなわち $\boldsymbol{n}'$，$\boldsymbol{e}$ の平面内に偏った成分（強度 I_1），およびそれに垂直な成分（強度 I_2）を含んでいる．減極率は比 I_2/I_1 で与えられる．強度 I_1 および I_2 は，それぞれに対応した方向 $\boldsymbol{e}'$ を持つ公式 (61.7) で与えられる．

スカラー散乱のとき，光は同じ面内で完全に偏っている（$I_2=0$）．そして強度の角度分布は

$$I = \frac{3}{2}\sin^2\theta$$

である．（ここおよび以下で，$I=I_1+I_2$ に対する式は方向について平均すると 1 を与えるように規格化されている）．対称散乱のときは

$$I = \frac{3}{20}(6+\sin^2\theta),\quad \frac{I_2}{I_1} = \frac{3}{3+\sin^2\theta}.$$

反対称散乱のときには

$$I = \frac{3}{4}(1+\cos^2\theta),\qquad \frac{I_2}{I_1} = \frac{1}{\cos^2\theta}.$$

2. 同じことを自然光に対して行なえ.

解 公式 (61.7) で自然（偏りのない）入射光へ移るのは

$$e_i e_k^* \longrightarrow \frac{1}{2}(\delta_{ik} - n_i n_k)$$

の置き換えにより実現される. これは入射方向 $\boldsymbol{n}$ が与えられたときの, 偏り $\boldsymbol{e}$ の方向についての平均に対応している. 散乱光は部分偏光であり, 対称性の考察からその二つの独立な成分は散乱面 $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n}'$ 内の直線偏光（強度 $I_{\parallel}$）と, それに垂直な成分（強度 $I_{\perp}$）である. 散乱角（$\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{n}'$ のあいだの角）を ϑ で表わそう.

スカラー散乱に対しては

$$I = I_{\perp} + I_{\parallel} = \frac{3}{4}(1+\cos^2\vartheta), \quad \frac{I_{\parallel}}{I_{\perp}} = \cos^2\vartheta.$$

対称散乱に対しては

$$I = \frac{3}{40}(13+\cos^2\vartheta), \quad \frac{I_{\parallel}}{I_{\perp}} = \frac{6+\cos^2\vartheta}{7}.$$

反対称散乱に対しては

$$I = \frac{3}{8}(2+\sin^2\vartheta), \quad \frac{I_{\parallel}}{I_{\perp}} = 1+\sin^2\vartheta.$$

3. 円偏光の散乱に対して, 回転係数（≪反転≫方向の円偏光の成分の強度と, ≪正規≫の方向の円偏光の成分の強度との比）を決定せよ.

解 円偏光の入射光のときは, 角度分布と減極率（比 $I_{\parallel}/I_{\perp}$）は自然光の散乱のときとまったく同じである.

入射光のベクトル $\boldsymbol{e}$ が（散乱面と一致し, z 軸を $\boldsymbol{n}$ 方向にした xz 面を持つ座標系で）成分 $\boldsymbol{e} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,\ i,\ 0)$ を持つとする. このとき散乱光の≪反転≫および≪正規の≫円偏光成分に対して, 偏りのベクトルは

$$\boldsymbol{e}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\vartheta,\ -i,\ -\sin\vartheta) \quad \text{あるいは} \quad \boldsymbol{e}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\vartheta,\ i,\ -\sin\vartheta)$$

である. (61.7)を使って強度を計算し, 三つの型の散乱に対して, (ϑ を散乱角として)つぎの回転係数 P が求まる.

$$P^0 = \tan^4\frac{\vartheta}{2},$$

$$P^s = \frac{13+\cos^2\vartheta+10\cos\vartheta}{13+\cos^2\vartheta-10\cos\vartheta},$$

$$P^a = \frac{1-\cos^4\dfrac{\vartheta}{2}}{1-\sin^4\dfrac{\vartheta}{2}}.$$

4. γ 線の重陽子による弾性散乱の断面積を計算せよ (H. A. Bethe, R. Peierls, 1935).

解 重陽子の基底状態と，その連続スペクトル状態の（分解した重陽子の）波動関数は

$$\psi_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{2\pi}}\frac{e^{-\kappa r}}{r}, \quad \psi_p = e^{i\boldsymbol{pr}}, \quad \kappa = \sqrt{MI}$$

((58.2), (58.3) 参照). 2重極モーメントは $\boldsymbol{d} = e\boldsymbol{r}/2$ である(電荷は陽子だけが持ち，その動径は $\boldsymbol{r}/2$ である). 行列要素は

$$\boldsymbol{d}_{p0} = \int \psi_p^* \boldsymbol{d}\psi_0 d^3x = e\sqrt{\frac{\kappa}{2\pi}}\frac{\partial}{i\partial\boldsymbol{p}}\int\frac{d^3x}{r}e^{-\kappa r+i\boldsymbol{pr}} = 8\pi ie\sqrt{\frac{\kappa}{2\pi}}\frac{\boldsymbol{p}}{(\kappa^2+p^2)^2}$$

である（積分の計算には (57.6 a) を使った).

分極率テンソルは

$$\alpha_{ik} = \int\frac{2\omega_{p0}}{\omega_{p0}^2-\omega^2}(d_i)_{0p}(d_k)_{p0}\frac{d^3p}{(2\pi)^3}-\frac{e^2}{2M\omega^2}\delta_{ik}$$

$$= \left\{\frac{2}{3}\int\frac{\omega_{p0}}{\omega_{p0}^2-\omega^2}\,|\boldsymbol{d}_{0p}|^2\frac{d^3p}{(2\pi)^3}-\frac{e^2}{2M\omega^2}\right\}\delta_{ik}$$

となる. 第1項は重陽子の内部自由度の仮想励起と関係している. これは (61.11) の形に書かれる. そのときに $\omega_{p0} = (p^2+\kappa^2)/M$ である. 第2項は重陽子全体としての前進運動への波の場の作用と関係している. この運動は準古典的であるから，散乱テンソルの対応する部分は m として重陽子の質量 $2M$ を入れた）公式 (60.14) によって与えられる.

α_{ik} の計算は積分

$$J = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{z^4\,dz}{(z^2+1)^3[(z^2+1)^2-\gamma^2]}, \quad z = \frac{p}{\kappa}, \quad \gamma = \frac{M\omega}{\kappa^2} = \frac{\omega}{I}$$

をとることに帰する. つまり

$$J = \frac{1}{8}\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{dJ_0}{d\lambda}\right)\Big|_{\lambda=1},$$

$$J_0=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{z^4dz}{(z^2+\lambda^2)\,[(z^2+1)^2-\gamma^2]}$$

となる．$\gamma<1$ のとき被積分関数は，複素変数 z の上半平面で $i\lambda$, $i\sqrt{1+\gamma}$, $i\sqrt{1-\gamma}$ の点に極を持つ．積分 J_0 はこれらの極での留数を計算することによって求められる．その結果

$$J=\pi\left\{\frac{(1+\gamma)^{3/2}}{2\gamma^4}+\frac{(1-\gamma)^{3/2}}{2\gamma^4}-\left(\frac{3}{8\gamma^2}+\frac{1}{\gamma^4}\right)\right\}.$$

全散乱断面積は (61.8) にしたがって α_{ik} を使って表わされ（普通の単位で）

$$\sigma=\frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{Mc^2}\right)^2\left|-1-\frac{4}{3\gamma^2}+\frac{2}{3\gamma^2}\,[(1+\gamma)^{3/2}+(1-\gamma)^{3/2}]\right|^2$$

$$\left(\gamma=\frac{\hbar\omega}{I}<1\ \text{のとき}\right)$$

に等しい．$\gamma>1$ の（重陽子の分解のしきいより上で）散乱振幅は，$\gamma<1$ の振幅から解析接続によって求められる．このとき，そのなかに虚部が現われるが，これは正にする必要がある．すなわち

$$\sigma=\frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{Mc^2}\right)^2\left|-1-\frac{4}{3\gamma^2}+\frac{2}{3\gamma^2}\,(\gamma+1)^{3/2}+i\,\frac{2}{3\gamma^2}(\gamma-1)^{3/2}\right|^2\qquad(\gamma>1)$$

となる．$\gamma\gg1$ では$\sigma=\dfrac{8\pi}{3}\left(\dfrac{e^2}{Mc^2}\right)^2$ が得られる．そしてこれは当然のことながら自由陽子による（非相対論的）散乱に対応する．

輻射の角度分布は

$$d\sigma=\sigma\frac{3}{4}(1+\cos^2\theta)\,\frac{do}{4\pi}$$

となる．ここで θ は散乱角である．$d\sigma=|f|^2\,do$ になるように散乱振幅を決めて

$$\mathrm{Im}f(0)=\frac{2e^2}{3Mc^2}\frac{(\gamma-1)^{3/2}}{\gamma^2}\quad(\gamma>1\ \text{のとき})$$

となる．光学定理によるとこの量は $\omega\sigma_t/4\pi$ と一致しなければならない．ここで σ_t は非弾性（光分解）および弾性散乱の全断面積である．今の場合，弾性散乱断面積（$\sim e^4$）は分解断面積（$\sim e^2$, (58.4)参照）よりもずっと高次である．したがって $\mathrm{Im}f(0)\approx\omega\sigma_{\text{光分}}/4\pi$ である．この理由で，今考えられている近似では，$\gamma<1$（すなわち，分解のしきいの下）では，散乱振幅は実数になることがわかる．

§62. 分子による散乱

分子による散乱の特色は，一般に分子スペクトルの基礎になる分子の性質，すなわち原子核を動かないとしたときの電子状態，および電子のつくる有効場内での原子核の運動を，別々に考察することが可能なことと関連している．

入射光の振動数 ω が，第一電子励起エネルギー ω_e より小さいとしよう．このとき散乱の際電子項は励起されない．散乱は，ずれない散乱か，回転あるいは振動準位の励起によるずれる散乱かである．

さらに分子の基底項に縮退がない（そして微細構造を持たない）と仮定しよう．言いかえると，電子の全スピンと，その全軌道角運動量の（対称こま型の分子に対し）分子軸への投影が0に等しいと仮定する．したがって2原子分子に対して，これは基底電子項が $^1\Sigma$ でなければならないことを意味する．よく知られているように，大多数の分子の基底状態に対して，これらの条件は満足されている[1]．

最後に，振動数 ω は基底項の原子核による（回転および振動の構造の）間隔にくらべて大きく，そして差 $\omega_e-\omega$ は励起電子項の原子核による構造とも，このような関係にあると仮定しよう．言いかえれば，入射光の振動数は共鳴から十分に離れている必要がある．すなわち，これらの条件は散乱テンソルの計算に当たって，まず原子核の配位は与えられた問題と考え，原子核の運動から離れることを可能にしている．

このような問題では，散乱テンソルは分極率テンソル $\alpha_{ik}\equiv(c_{ik})_{11}$ と一致し，原理的に一般式(60.17)によって計算される．このとき，和はすべての電子励起項について行なわれる．このようにして得られた量 α_{ik} は，原子核の配位 q の関数となるはずである（電子項のエネルギーおよび波動関数はパラメータとしてこれに依存する）．状態に縮退がないので，テンソル $\alpha_{ik}(q)$ は実であり，したがって対称である．

テンソル $\alpha_{ik}(q)$ は分子の原子核の与えられた配位の電子的分極率である．散乱に関する現実の問題を解くためには，さらに始および終状態の原子核の運動を考慮する必要がある．$\psi_{s1}(q)$ および $\psi_{s2}(q)$ をこれらの状態における原子核の波動関数としよう（したがっ

---

1) しかしながら，あとで述べられる結果は，電子項の縮退が0と異なるスピンに関係し，スピン軌道相互作用が小さい（したがって，それによって生じる微細構造が無視できるような）場合にも，（ある精度で）成立するはずである．この近似では，スピンの向きの異なる状態は結合せず，この意味では縮退がないようにふるまう．たとえば，基底項 $^3\Sigma$ を持つ O_2 分子はこの例である．

て，s_1，s_2 は振動および回転量子数の組である）．求める散乱テンソルは，これらの波動関数によって計算された，テンソル $\alpha_{ik}(q)$ の行列要素である．すなわち

$$\langle s_2 | \alpha_{ik} | s_1 \rangle = \int \psi^*_{s2}(q)\, \alpha_{ik}(q)\, \psi_{s1}(q)\, dq \qquad (62.1)$$

である．テンソル $\alpha_{ik}(q)$ が対称であるから，テンソル (62.1) も（s_1，s_2 が一致しても違っていても）また対称である．このようにして，今考察されている条件のもとでは，ずれない散乱でもずれる散乱でも，反対称部分は存在しないという結果に到達する．散乱はスカラーおよび対称部分のみを含むはずである．

分極率のスカラー部分 $\alpha^0(q)$ は分子の方向には依存しないで，そのなかの原子の内部配置にのみ依存する．分子の振動量子数の全体を $\boldsymbol{v}$，磁気量子数 $\boldsymbol{m}$ 以外の回転量子数の全体を $\boldsymbol{r}$ としよう．このとき行列要素は

$$\langle v_2 r_2 m_2 | \alpha^0 | v_1 r_1 m_1 \rangle = \langle v_2 | \alpha^0 | v_1 \rangle \delta_{r_1 r_2} \delta_{m_1 m_2} \qquad (62.2)$$

となる．量子数 $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{m}$ について対角型であるのは，すべてのスカラーの性質である．今の場合に，これらの要素がこれらの量子数に依存しないのは (62.2) の特色である．このようにして，スカラー散乱は純振動遷移だけを持ち，回転状態には依存しない．

対称散乱はテンソル α^s_{ik} の行列要素によって決定される．動かない座標系 xyz に対するその要素は，分子座標系 $\xi\eta\zeta$ に結合した成分 $\bar{\alpha}^s_{i'k'}$ を使い

$$\alpha^s_{ik} = \sum_{i'k'} \bar{\alpha}^s_{i'k'} D_{i'i} D_{k'k} \qquad (62.3)$$

によって表わされる．ここで $D_{i'i}$ は古い軸に対する新しい軸の方向余弦である．$\bar{\alpha}^s_{i'k'}$ という量は分子の向きに依存しない．また $D_{i'i}$ はその内部座標には依存しない．したがって

$$\langle v_2 r_2 m_2 | \alpha^s_{ik} | v_1 r_1 m_1 \rangle$$
$$= \sum_{i'k'} \langle v_2 | \bar{\alpha}^s_{i'k'} | v_1 \rangle \langle r_2 m_2 | D_{i'i} | r_1 m_1 \rangle \langle r_2 m_2 | D_{k'k} | r_1 m_1 \rangle$$

となる．これらの量の絶対値の二乗の，$r_2 m_2$ による和は，容易に確かめられるように

$$\sum_{m_2 r_2} \sum_{ik} |\langle v_2 r_2 m_2 | \alpha^s_{ik} | v_1 r_1 m_1 \rangle|^2 = \sum_{i'k'} |\langle v_2 | \bar{\alpha}^s_{i'k'} | v_1 \rangle|^2 \qquad (62.4)$$

に等しい[1]．これは，与えられた振動-回転状態 $v_1 r_1$ から，振動状態 v_2 のすべての回転状態への遷移を伴う全散乱強度は，r_1 に依存しないことを意味する．

対称こま型の分子に対しては，さらに進んで $v_1 r_1 \longrightarrow v_2 r_2$ の遷移のおのおのに対し，散乱強度の回転量子数への依存性を確立することができる．量子数 r はこの場合には角運動量 J と，その分子軸への投影 k である．デカルト成分 α^s_{ik} の代りに対応する2階の球面テンソルを導入しよう．そしてこの成分を $\alpha_\lambda(\lambda=0,\ \pm 1,\ \pm 2)$ で表わそう．(b.6) にしたがって，その行列要素の絶対値の二乗は

$$|\langle v_2 J_2 k_2 m_2 \,|\, \alpha_\lambda \,|\, v_1 J_1 k_1 m_1 \rangle|^2$$

$$= (2J_1+1)(2J_2+1)\begin{pmatrix} J_2 & 2 & J_1 \\ -k_2 & \lambda' & k_1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} J_2 & 2 & J_1 \\ -m_2 & \lambda & m_1 \end{pmatrix}^2 |\langle v_2 \,|\, \bar{\alpha}_{\lambda'} \,|\, v_1 \rangle|^2$$

である．ここで $\bar{\alpha}_{\lambda'}(q)$ は分子に固定した軸に関する偏りの球面テンソルであり，$\lambda' = k_2 - k_1$ である．m_2 および $\lambda = m_2 - m_1$ について加えて（m_1 が与えられたとき）

$$\sum_{m_2 \lambda} |\langle v_2 J_2 k_2 m_2 \,|\, \alpha_\lambda \,|\, v_1 J_1 k_1 m_1 \rangle|^2$$

$$= (2J_2+1)\begin{pmatrix} J_2 & 2 & J_1 \\ -k_2 & \lambda' & k_1 \end{pmatrix}^2 |\langle v_2 \,|\, \bar{\alpha}_{\lambda'} \,|\, v_1 \rangle|^2 \qquad (62.5)$$

を得る（(b.7) とくらべよ）．この量によって振動-回転性遷移 $v_1 J_1 k_1 \longrightarrow v_2 J_2 k_2$ を伴う散乱強度が定義される．行列要素 $\langle v_2 \,|\, \bar{\alpha}_{\lambda'} \,|\, v_1 \rangle$ は一般に分子の回転に依存しないので，それによって，強度の量子数 J_1，J_2 および k_1，k_2 への依存性が決定される．(62.5) の右辺のなかに分極率のテンソルの球面成分が，1個現われることを指摘しておこう．

もしも等式 (62.5) を J_2 および k_2 で加えると

$$\sum_{\lambda} \sum_{J_2 k_2 m_2} |\langle v_2 J_2 k_2 m_2 \,|\, \alpha_\lambda \,|\, v_1 J_1 k_1 m_1 \rangle|^2 = \sum_{\lambda'} |\langle v_2 \,|\, \bar{\alpha}_{\lambda'} \,|\, v_1 \rangle|^2$$

---

1) 和の変形にはつぎの等式が使われた．

$$\sum_{i} \sum_{r_2 m_2} \langle r_1 m_1 \,|\, D_{ii'} \,|\, r_2 m_2 \rangle \langle r_2 m_2 \,|\, D_{ik'} \,|\, r_1 m_1 \rangle$$

$$= \langle r_1 m_1 \,|\, \sum_i D_{ii'} D_{ik'} \,|\, r_1 m_1 \rangle = \langle r_1 m_1 \,|\, \delta_{i'k'} \,|\, r_1 m_1 \rangle = \delta_{i'k'}.$$

を得る[1]．すなわちわれわれは総和則にもどったわけである．

回転体，すなわち（特に2原子分子の）線型分子は対称独楽の特別な場合である．このような分子軸への角運動量の投影は，（0に等しい電子の軌道角運動量を持った非縮退電子状態では）0に等しい[2]．したがって，この場合（62.5）のなかで $k_1=k_2=0$ と置く必要がある．

最後に，振動型の結合散乱の選択則についての問題と，分子の放出（あるいは吸収）の振動型スペクトルに対する類似の問題について考察しよう[3]．

散乱に対して問題は，振動波動関数 $\psi_v(q)$ に関するテンソル $\alpha_{ik}(q)$ の行列要素が，0と異なるような条件を見いだすことに帰してしまう．このとき（スカラー散乱に対しては）スカラー α^0 および（対称散乱に対しては）既約対称テンソル α^s_{ik} を別々に考察する必要がある．放出（あるいは吸収）では，ベクトル $\boldsymbol{d}(q)$——原子核の位置が与えられたとき，電子の状態について平均された分子の2重極モーメント（2原子分子に対してはこれはすでに§54で示してある）——の行列要素が同様な役割を果たしている．

多原子分子の振動は対称性の型，すなわち対応する点群の既約表現 D_a によって分類される．ここで a は表現の番号である（III，§100参照）．これらの表現にしたがって分子の振動状態の波動関数の対称性も決定される（III，§101参照）．第一振動状態（量子数 $v_a=1$）の波動関数の対称性は D_a 型振動の対称性と一致する．高い状態（$v_a>1$）の対称性は表現 $[D_a^{v_a}]$，すなわち表現 D_a 自身の v_a 個の対称積によって与えられる．最後に同時に異なる振動 a および b が励起された状態の対称性は直積 $[D_a^{v_a}]\times[D_b^{v_b}]$ によって与えられる[4]．いろいろな量（スカラー，ベクトル，テンソル）の対称型についての選択則は III，§97に述べられている．

---

1) k_1 および λ' が（したがって $k_2=k_1+\lambda'$ が）与えられて III（106.13）により J_2 について加えるとき

$$\sum_{J_2}(2J_2+1)\begin{pmatrix} J_2 & 2 & J_1 \\ -k_2 & \lambda' & k_1 \end{pmatrix}^2=1$$

である．このあとに与えられた k_1 に対し，k_2（あるいはまったく同じことだが $\lambda'=k_2-k_1$）についての和が行なわれる．

2) われわれはここでは，分子の振動と回転の相互作用と関連した効果は考察しない（III，§104参照）．

3) これらのスペクトルは赤外領域に属し，普通吸収で観測される．

4) 振動型波動関数の対称性は，もちろん，振動のポテンシャル・エネルギーの具体的な形にはよらない．特に，III，§101で行なった振動の調和性についての仮定には依存しない．

分子の対称性に基づいた選択則は厳密である．振動の調和性についての仮定，および関数 $\alpha_{ik}(q)$ あるいは $d(q)$ の座標 q についての展開と関連した，近似的な選択則もまた存在する．これらはよく知られた調和振動子に対する選択則の結果として生じる．それによると，その座標 q の行列要素は振動量子数の変化 $\Delta v = \pm 1$ の遷移に対してのみ 0 と異なっている[1]．

§63. スペクトル線の自然幅

今まで光の放出や散乱を調べるにあたって，われわれは系（たとえば原子）のすべての準位が厳密に離散的であるとみなしてきた．しかしながら，励起状態は光を出す確率を持つので有限の寿命を持っている．量子力学の一般原理にしたがって，準位は準離散的となり，有限の（小さい）幅を持つことになる(III，§132 参照)．それは $E-\frac{1}{2}i\Gamma$ の形に記述される．ここで $\Gamma(=\Gamma/\hbar)$ は与えられた状態のすべての可能な≪崩壊≫過程の（1 秒間の）全確率である．

この事情をいかにして輻射過程に反映させるかという問題を考察しよう(V. Weisskopf, E. Wigner, 1930)．準位の幅が有限なために，放出される光は厳密に単色でないことは前から明らかであった．すなわち，振動数は $\Delta\omega \sim \Gamma(=\Gamma/\hbar)$ の区間に散らばってしまうはずである．しかし，光子の振動数についての分布をこのような精度で測定するには，$T \gg 1/\Delta\omega \sim 1/\Gamma$ の時間が必要である．この時間に準位が光を出す確率が非常に大きい．したがって，問題にすべきは与えられた振動数の光子の全放出確率についてであって，毎秒の確率についてではない．まず第一にある励起状態

$$E_1 - \frac{i}{2}\Gamma_1$$

を持つ原子が，無限の寿命を持ち厳密に離散的である基底状態 E_2 への遷移の場合に対する，この確率を計算しよう．

Ψ を原子と光子場の波動関数，$\mathrm{H} = \mathrm{H}^{(0)} + \mathrm{V}$ をこの系のハミルトニアンとしよう．ここで V は原子と光子場の相互作用の演算子である．シュレーディンガー方程式

---

1) この節で触れた問題の理論のより詳しい記述は，つぎの著述中に見いだすことができる；G. プラチェック≪レーリー散乱とラマン効果≫ハリコフ，1935；G. ヘルツベルグ≪多原子分子の振動および回転スペクトル≫ И. Л. 1949；エム・ア・エリヤシェビッチ≪原子および分子分光学≫ Физматгиз, 1962.

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t}=(\mathrm{H}^{(0)}+\mathrm{V})\Psi \tag{63.1}$$

の解を，系の非摂動状態の波動関数による展開

$$\Psi=\sum_{\nu}a_{\nu}(t)\Psi_{\nu}^{(0)}=\sum_{\nu}a_{\nu}(t)e^{-i\mathcal{E}_{\nu}t}\psi_{\nu}^{(0)} \tag{63.2}$$

の形で求めよう．係数 $a_\nu(t)$ に対してつぎの連立方程式を得る．

$$i\frac{\partial a_{\nu}}{\partial t}=\sum_{\nu'}\langle\nu|\mathrm{V}|\nu'\rangle a_{\nu'}\exp\{i(\mathcal{E}_{\nu}-\mathcal{E}_{\nu'})t\} \tag{63.3}$$

$|\nu\rangle$ はエネルギーが $\mathcal{E}_\nu=E_2+\omega$ で，原子が基底状態 E_2 にあり，一定の振動数 ω の光子が1個存在する状態としよう．この状態を記号 $|\omega 2\rangle$ で表わそう．始めの瞬間に系は原子が E_1 状態にあり，光子は存在しない $|1\rangle$ 状態にあった．言いかえれば，$t=0$ のときは

$$a_1=1,\ a_{\nu'}=0\qquad(|\nu'\rangle\neq|1\rangle\text{ のとき}) \tag{63.4}$$

でなければならない．この初期条件から出発して，方程式 (63.3) の解は（波動関数の適当な規格化で）時間 t に，振動数区間 $d\omega$ への光子の放出を伴う，原子の遷移 $1\to2$ の確率を与える．すなわち

$$|a_{\omega2}(t)|^2d\omega.$$

われわれは $t=\infty$ の最終的な確率に興味がある．

$$dw=|a_{\omega2}(\infty)|^2d\omega. \tag{63.5}$$

問題の設定をより明らかにするために，遷移 $1\to2$ を伴う（1秒間の）普通の輻射確率を見いだす際には，1次近似ではその右辺のすべての $a_{\nu'}(t)$ を (63.4) で置き換えて，方程式 (63.3) を解く必要があることを思い起こそう．得られた答は，つぎにより大きい t のときに考察される（III，§42 を見よ）．われわれは今この操作の意味をはっきりさせることができる．すなわち，これは励起状態の寿命にくらべて小さい時間のことである．このときのより大きい t とは，$1/(E_1-E_2)$ の期間にくらべて大きいが，$1/\Gamma_1$ にくらべると小さいことを意味している．

今の場合に $1/\Gamma_1$ と同程度の時間が考察されるので，関数 $a_1(t)$ は時間とともに

$$a_1(t)=e^{-\Gamma_1t/2} \tag{63.6}$$

の法則にしたがい減衰する．原子の発光とともに生じうる状態 $|\nu'\rangle$ に対する関数 $a_{\nu'}(t)$ は時間とともに増大する．もしも与えられた状態 E_1 の（E_2 以外の）他の原子準位に移る発光が可能ならば，たくさんの増加関数 $a_{\nu'}(t)$ があることになる．そのおのおのは，原子がそれ自身の準位の一つにあり，対応するエネルギーの光子が一つある状態に対応する．しかしながら，(63.3) の右辺には前と同じように一つの $|\nu'\rangle = |1\rangle$ に対応する項だけが残る．実際に，行列要素はあるエネルギーを持つ光子の数が1だけ変わる遷移に対してのみ0と異なるから，それは異なるエネルギーの1個の光子を持つ状態間の遷移に対しては，もちろん0に等しい．

このようにして，$a_{\omega 2}(t)$ に対して方程式

$$i\frac{da_{\omega 2}}{dt} = \langle\omega 2|V|1\rangle e^{i(E_2+\omega-E_1)t}a_1$$

$$= \langle\omega 2|V|1\rangle \exp\left\{i(\omega-\omega_{12})t - \frac{\Gamma_1}{2}t\right\} \tag{63.7}$$

を得る（ここで $\omega_{12} = E_1 - E_2$ である）．$a_{\omega 2}(0) = 0$ の条件で積分すると

$$a_{\omega 2} = \langle\omega 2|V|1\rangle \frac{1-\exp\left\{i(\omega-\omega_{12})t - \frac{\Gamma_1}{2}t\right\}}{\omega-\omega_{12}+\frac{i}{2}\Gamma_1}. \tag{63.8}$$

これから確率 dw (63.5) は

$$dw = |\langle\omega 2|V|1\rangle|^2 \frac{d\omega}{(\omega-\omega_{12})^2+\frac{1}{4}\Gamma_1^2}.$$

幅 $\Gamma_1 \ll \omega_{12}$ であるから，因子 $|\langle\omega 2|V|1\rangle|^2$ では $\omega=\omega_{12}$ と置くことができる．このとき量 $2\pi|\langle\omega 2|V|1\rangle|^2$ は振動数 ω_{12} およびわれわれが簡単のためにその記号を省略してきた他の（振動数以外の）性質（運動方向，偏り）を持った，光子の普通の（毎秒の）輻射確率である．確率のこれらの性質への依存性が，因子 $|\langle\omega 2|V|1\rangle|^2$ によって完全に決定されることを指摘しよう．言いかえれば，準位の幅の考慮は偏りの性質や輻射の角度分布を変えない．

光子の偏りや運動方向についての和

$$\Gamma_{1\to 2} = 2\pi\sum|\langle\omega 2|V|1\rangle|^2 \tag{63.9}$$

は普通の全輻射確率である．これは同時に準位 E_1 の幅のなかの，遷移 $1\to 2$ に結びついた部分（部分幅）で，全体の幅 Γ_1 と異なっている．そして Γ_1 は与えられた準定常状

態の，あらゆる可能な《崩壊》のしかたからの寄与から成り立っている[1]．

確率 dw のこのような和をとって，放出される光子の振動数分布に対する，つぎのような最終的な式を得る．

$$dw = w_{全}\frac{\Gamma_1}{2\pi}\frac{d\omega}{(\omega_{12}-\omega)^2+\frac{\Gamma_1^2}{4}}. \tag{63.10}$$

ここで $w_{全}=\Gamma_{1\to 2}/\Gamma_1$ は与えられた遷移 $1\to 2$ の全相対的確率である．これは分散型の分布である．公式 (63.10) で記述されるスペクトル線の形は，孤立した動かない原子に特有のものである．これを**自然幅**と呼ぶ[2]．

今度は，原子準位 E_2 がまた励起状態で有限の幅 Γ_2 を持つとしよう．方程式 (63.3) のなかで≪非摂動≫ハミルトニアンのなかに，状態 2 への崩壊へ導くすべての項（すなわち行列要素）が含まれているものと仮定して，この事情を考慮しよう．ここで方程式 (63.7) の右辺でエネルギー E_2 は $E_2-\frac{1}{2}i\Gamma_2$ に置き換えられる．要求される近似で $H^{(0)}$ の（Γ_2 が小さいので）小さい変化は行列要素 $\langle\omega 2|V|1\rangle$ には反映しない．このようにして，(63.8) の代りに次式を得る．

$$a_{\omega 2}(t) = \langle\omega 2|V|1\rangle\frac{1-\exp\left\{i(\omega-\omega_{12})t-\frac{1}{2}(\Gamma_1-\Gamma_2)t\right\}}{\omega-\omega_{12}+\frac{i}{2}(\Gamma_1-\Gamma_2)}. \tag{63.11}$$

有限の寿命を持つ状態 2 自身は，ある振動数 ω' の光子を放出して発光する．そして原子は結局基底状態 E_0 に遷移する（したがって，原子が状態 2 に見いだされる確率は $|a_{\omega 2}(t)\exp(-\Gamma_2 t/2)|^2$ に等しく，$t\to\infty$ では 0 に近づく）[3]．このようにして，この系の最終状態では，原子は基底状態にあり，振動数 ω および ω' を持った光子が一つずつ存在する．この状態の振幅 $a_{\omega\omega' 0}(t)$ は，(63.7) と記号だけが違った方程式を満足する．すなわち

---

1) 準位の最終的な幅を規定する連続スペクトル状態への遷移は，必ずしも光子の放出と結びつかないことを指摘しよう．強く励起された（レントゲン）準位は，電子の放出と基底状態にある正イオンの形成を伴う崩壊が可能である（オージェ効果）．

2) 原子と他の原子との相互作用と結びついた幅（衝突による幅），あるいは光源のなかに種々の速度で運動する原子の存在と結びついた幅（ドップラー幅）と区別している．

3) 簡単のために，原子の遷移 $2\to 0$ は中間の段階なしに直接に起こると仮定しよう．この仮定は原理的な性質は持たず，最終的な結果 (63.13) には影響しない．

$$i\frac{da_{\omega\omega'0}}{dt}=a_{\omega 2}\langle\omega\omega'0|V|\omega 2\rangle\exp\left\{i(E_0+\omega+\omega')t-i(E_2+\omega)t-\frac{\Gamma_2}{2}t\right\}$$
$$=a_{\omega 2}\langle\omega\omega'0|V|\omega 2\rangle\exp\left\{i(\omega'-\omega_{20})t-\frac{\Gamma_2}{2}t\right\}.$$

この方程式の右辺に (63.11) から $a_{\omega 2}(t)$ を代入し，(初期条件 $a_{\omega 2}(0)=0$ で) 積分し，続いて $t\to\infty$ として次式を得る．

$$a_{\omega\omega'0}(\infty)=\frac{\langle\omega 2|V|1\rangle\langle\omega\omega'0|V|\omega 2\rangle}{\omega-\omega_{12}+\frac{i}{2}(\Gamma_1-\Gamma_2)}\times\left\{\frac{1}{\omega'-\omega_{20}+\frac{i}{2}\Gamma_2}-\frac{1}{\omega+\omega'-\omega_{10}+\frac{i}{2}\Gamma_1}\right\}$$
$$=\frac{\langle\omega\omega'0|V|\omega 2\rangle\langle\omega 2|V|1\rangle}{\left(\omega'-\omega_{20}+\frac{i}{2}\Gamma_2\right)\left(\omega+\omega'-\omega_{10}+\frac{i}{2}\Gamma_1\right)}.$$

光子 ω および ω' を放出する確率は

$$dw=|a_{\omega\omega'0}(\infty)|^2\,d\omega\,d\omega'$$
$$=\frac{\Gamma_{1\to2}}{2\pi}\frac{\Gamma_{2\to0}}{2\pi}\frac{d\omega\,d\omega'}{\left[(\omega'-\omega_{20})^2+\frac{1}{4}\Gamma_2^2\right]\left[(\omega+\omega'-\omega_{10})^2+\frac{1}{4}\Gamma_1^2\right]}.\tag{63.12}$$

当然のことながら，この式は $\omega'\approx\omega_{20}$, $\omega\approx\omega_{12}$ で鋭い極大を持つ．

遷移 $1\to2$ に対応するスペクトル線の求める形は，(63.12) を $d\omega'$ で積分して得られる（この積分は $-\infty$ から $+\infty$ までの全領域にわたっている）．積分は留数の定理を使うと，最も簡単に計算される．その結果次式を得る[1]．

$$dw=w_{全}\frac{\Gamma_1+\Gamma_2}{2\pi}\frac{d\omega}{(\omega-\omega_{12})^2+\frac{1}{4}(\Gamma_1+\Gamma_2)^2}.\tag{63.13}$$

---

1) 積分は，ω' の実軸と上半平面の無限遠の半円からなる径路に沿って行なわれる．被積分関数は上半平面に二つの極がある．すなわち

$$\omega'=\omega_{20}+\frac{i}{2}\Gamma_2 \quad および \quad \omega'=\omega_{10}-\omega+\frac{i}{2}\Gamma_1$$

であり，その留数は

$$\frac{1}{i\Gamma_2}\left[(\omega-\omega_{12}+\frac{i}{2}\Gamma_2)^2+\frac{\Gamma_1^2}{4}\right]^{-1} および \frac{1}{i\Gamma_1}\left[(\omega-\omega_{12}-\frac{i}{2}\Gamma_1)^2+\frac{\Gamma_2^2}{4}\right]^{-1}.$$

ここで $w_{全}=\dfrac{\Gamma_{1\to2}\Gamma_{2\to0}}{\Gamma_1\Gamma_2}$ は $1\to2\to0$ の2重遷移の全確率である[1].

(63.13) の線の形は，(63.10) と Γ_1 を $\Gamma_1+\Gamma_2$ に変える点だけが異なっている．すなわち線の幅は，始および終状態の幅の和に等しい．

一般的に言って，線の幅は同じ遷移 $1\to2$ の確率 $\Gamma_{1\to2}$ には等しくない．すなわち（古典論でもそうであるように）線の強度には比例しない．$\Gamma_1+\Gamma_2>\Gamma_{1\to2}$ であるので，線は強度が比較的小さいときにも大きい幅を持つことができる．

§64. 共鳴螢光

光の散乱の問題で最終的な幅の計算は，入射光の振動数 ω が≪中間状態の≫振動数 ω_{n1} あるいは ω_{n2} の一つに近い場合（**共鳴螢光**と呼ばれる[2]）に重要である．

基底状態にある系（たとえば原子）によるずれない散乱を考えよう．したがって，始および終状態は一致し厳密に離散的である．光の振動数が，ある振動数 ω_{n1} に近いとしよう．ここで準位 n は励起準位で，したがって準離散的である．

この問題は前節で記述された方法で解くことができる．しかしながら，ここでは必要はない．なぜならば，問題は III，§132 で考察された，準離散準位による非相対論的共鳴散乱の問題とまったく同様だからである．そこで得られた結果にしたがって，散乱振幅は極を持つ因子

$$\frac{1}{\omega-\left(E_n-i\dfrac{\Gamma_n}{2}-E_1\right)}$$

を含まねばならない．他面 $|\omega-\omega_{n1}|\gg\Gamma_n$ のときには，公式は非共鳴型の式 (60.5) に移る必要がある．これから求める散乱断面積は公式 (60.5) のなかで，単に E_n を $E_n-\dfrac{i}{2}\Gamma_n$ に置き換えることによって得られる．ここで n についての和では共鳴項だけに限ることができる．すなわち

$$d\sigma=\frac{\left|\sum\limits_{M_n}(\boldsymbol{d}_{2n}\boldsymbol{e}'^*)(\boldsymbol{d}_{n1}\boldsymbol{e})\right|^2}{(\omega_{n1}-\omega)^2+\dfrac{1}{4}\Gamma_n^2}\omega^4do' \tag{64.1}$$

である．和は共鳴準位 E_n に対応する（角運動量の投影 M_n が異なる）すべての状態に

1) さらに複雑な場合（280頁の脚注3）を見よ），$w_{全}$ は $1\to2$ の遷移で始まり準位 0 で終る，すべてのカスケードの全確率である．

2) この問題は最初にワイスコップによって考察された (V. Weisskopf, 1931).

ついて行なわれる．状態 1 および 2 は同一の準位に関するものだが，M_1 および M_2 が異なる値を持ってもよい．

断面積（64.1）は $\omega=\omega_{n1}$ のときに極大になる．極大におけるその値の大きさの程度は，$\sigma_{\max}\sim\omega^4 d^4/\Gamma_n^2$ に等しい．自発遷移 $n\rightarrow 1$ の確率，およびそれとともに幅は $\Gamma_n\sim\omega^3 d^2$ であるので，この値は

$$\sigma_{\max}\sim\frac{1}{\omega^2}\sim\lambda^2 \tag{64.2}$$

である．すなわち，光の波長の平方の程度で，その微細構造定数には依存しない．

原子が散乱の前後に厳密な離散（基底）状態にあるので，1次および2次光子の振動数は厳密に一致することを強調しよう．したがって，単色光が照射されると散乱線も単色になるだろう．もしも入射光が強度のスペクトル分布 $I(\omega)$ を持ち，関数 $I(\omega)$ が幅 Γ_n のあいだですこししか変化しないとすれば，散乱光の強度は

$$\frac{I(\omega_{n1})\,d\omega}{(\omega-\omega_{n1})^2+\frac{1}{4}\Gamma_n^2} \tag{64.3}$$

に比例する．言いかえれば，散乱線の形は準位 E_n の自然放出の際の線の自然の形と一致するだろう．

断面積（64.1）は散乱テンソル

$$(c_{ik})_{21}=\frac{\sum\limits_{M_n}(d_i)_{2n}(d_k)_{n1}}{\omega_{n1}-\omega-\frac{i}{2}\Gamma_n} \tag{64.4}$$

に対応する．特に分極率テンソルは

$$\alpha_{ik}=(c_{ik})_{11}=\frac{\sum\limits_{M_n}(d_i)_{1n}(d_k)_{n1}}{\omega_{n1}-\omega-\frac{i}{2}\Gamma_n}. \tag{64.5}$$

中間状態のエネルギー準位に虚部を付け加えることは，分極率テンソルのエルミート性を壊すことをここで指摘しよう．そのなかに反エルミート部分が現われ，これは今われわれが示すように，光の吸収と直接関係している．

原子は光量子を吸収して，遅かれ早かれ，1個あるいは数個の光子を放出して基底状態に移る．

したがって，このような観点から吸収断面積は，単にすべての可能な散乱過程の全断面積 σ_t に等しい[1]．他の面から，光学定理（§72）にしたがって，断面積は角度 0 の弾性散乱の振幅 $f(0)$ の虚部によって

$$\sigma_t = \frac{4\pi}{\omega} \operatorname{Im} f(0)$$

のように表わされる．光子の弾性散乱の振幅は（60.7）から見られるように

$$f = \omega^2 \alpha_{ik} e_i'^* e_k$$

である．《角度0の》散乱は，今の場合光子の運動量および偏りの変化のない散乱，すなわち $\boldsymbol{e}' = \boldsymbol{e}$ を意味している．このようにして，光子の吸収断面積は

$$\sigma_{吸} = 4\pi\omega \operatorname{Im}(\alpha_{ik} e_i^* e_k) = 4\pi\omega e_i^* e_k \frac{\alpha_{ik} - \alpha_{ki}^*}{2i} \tag{64.6}$$

に等しい．これによりこれと分極率テンソルの反対称部分との関係が決定される．

公式（64.6）は簡単な古典的意味を持っている．電場 $\boldsymbol{E}$ は，電荷系に（毎秒）$\sum e\boldsymbol{v}\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{d}}$ に等しい仕事をする．電場を(60.19)の形に，2重極モーメントを(60.20)，(60.21)の形に表わし，この仕事を時間で平均して

$$\frac{1}{2}\omega |E|^2 e_i^* e_k \frac{\alpha_{ik} - \alpha_{ki}^*}{2i}$$

を得る（$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}E$）．他面では，もしも $\boldsymbol{E}$ を入射光の電場とすれば，そのなかのエネルギーの流れの密度の平均は $\frac{1}{8\pi}|E|^2$ に等しい．そして（毎秒）原子に吸収されるエネルギーは

$$\frac{1}{8\pi}|E|^2 \sigma_{吸}$$

に等しい．得られた二つの式をくらべて，公式（64.6）を得る．

（64.6）に（64.5）の分極率テンソルを代入し，ω_{n1} の近くの振動数 ω を持つ光子の吸収断面積に対する，つぎのような式を得る．

$$\sigma_{吸} = 4\pi^2 \sum_{M_n} |\boldsymbol{d}_{n1}\boldsymbol{e}|^2 \omega \frac{\Gamma_n/2}{\pi\left[(\omega-\omega_{n1})^2 + \frac{1}{4}\Gamma_n^2\right]}. \tag{64.7}$$

1）安定な基底状態にある系の吸収について語っていることを強調しよう．実験時間が有限であるために，励起状態に対する問題の設定は別のものになるだろう．

$\Gamma_n \to 0$ の極限では，この式の最後の因子は δ-関数 $\delta(\omega-\omega_{n1})$ に近づく．それはこの場合には，厳密に一定の振動数の光子のみが吸収されうることに対応している．エネルギーの流れのスペクトル，および角度密度 I_{ke}((44.7) を見よ) を持つ光子が入射するとしよう．このとき光子数の流れの密度は $\frac{I_{ke}}{\omega}d\omega\,do$ に等しく，吸収確率は

$$dw_{吸} = \sigma_{吸}\frac{I_{ke}}{\omega}d\omega\,do. \tag{64.8}$$

もしも関数 $I_{ke}(\omega)$ が幅 Γ_n のあいだで，少ししか変わらなければ，振動数で積分したあとで次式を得る．

$$dw_{吸} = 4\pi^2\sum_{M_n}|d_{n1}e|^2 I_{ke}(\omega_{n1})\,do.$$

他方 (45.5) にしたがって

$$dw_{自} = \frac{\omega^3}{2\pi}\sum_{M_n}|d_{1n}e^*|^2 do = \frac{\omega^3}{2\pi}\sum_{M_n}|d_{n1}e|^2 do$$

が振動数 ω_{n1} の光子を自発放出する確率であることに注意すれば，公式 (44.9) にもどることになる．

問　題

終りの光子の偏りと方向，および終りの原子の角運動量の投影 M_2 について加え（始めの光子の偏りと始めの M_1 について平均して），共鳴散乱の全断面積を求めよ．

解 (61.8)，(61.2) および (64.4) にしたがって求める断面積は

$$\sigma = \frac{8\pi\omega^4}{9}\frac{1}{(\omega-\omega_{n1})^2+\frac{1}{4}\Gamma_n^2}\left\{(2J_1+1)\overline{\left|\sum_{M_n}(d_i)_{2n}(d_k)_{n1}\right|^2}^{1}\right\} \tag{1}$$

である（状態 *1* および *2* はただ M_1 と M_2 の値だけが異なっているので，$J_2=J_1$ である）．波括弧のなかを

$$\left\{\cdots\right\} = \frac{1}{2J_1+1}\sum_{M_1M_2}\sum_{M_nM_n'}(d_{2n}d_{n'2})(d_{1n'}d_{n1})$$

の形に書き直そう（M_n についての和の平方を，M_n および $M_{n'}$ による2重和の形に表わした）．和

$$\sum_{M_2}(d_{n'2}\,d_{2n}) = \sum_{M_1}(d_{n1}\,d_{1n'})$$

はただ $M_n = M_{n'}$ のときにのみ0と異なり，$3\Gamma_{n\to1}/4\omega^3$ という量と一致する——ここで $\Gamma_{n\to1}$ は $n\to1$ の遷移確率である（これは準位 E_n の部分幅である）．したがって

$$\left\{\cdots\right\} = \frac{1}{2J_1+1}(2J_n+1)\left(\frac{3}{4\omega^3}\Gamma_{n\to1}\right)^2$$

となり，全断面積は[1]

$$\sigma = g\frac{\pi}{\omega^2}\frac{\Gamma_{n1}^2}{(\omega-\omega_{n1})^2+\frac{1}{4}\Gamma_n^2} \tag{2}$$

となる．ここで

$$g = \frac{2J_n+1}{2(2J_1+1)}.$$

もしもわれわれにとって散乱の干渉性部分（状態 *1* および *2* が一致する，すなわち $M_1 = M_2$）だけが興味があるならば，(1)のなかで波括弧中の因子は

$$\overline{\left\{\left|\sum_{M_n}(d_i)_{1n}(d_k)_{n1}\right|^2\right\}} = \frac{1}{2J_1+1}\sum_{M_1}\sum_{M_nM_n'}(d_{1n}\,d_{n'1})(d_{1n'}\,d_{n1})$$

で置き換えられる必要がある（(61.3) を見よ）．球面ベクトル成分を使うとスカラー乗積は

$$d_{1n}\,d_{n'1} = \sum_{\lambda}(-1)^{1-\lambda}(d_\lambda)_{1n}(d_{-\lambda})_{n'1}$$

である．これは $M_n = M_{n'}$ のときだけ0と異なる．行列要素を既約行列要素で表わしてふたたび部分幅

$$\Gamma_{n\to1} = \frac{4\omega^3}{3}\frac{1}{2J_n+1}|\langle n\|d\|1\rangle|^2$$

---

1) （問題の形式的類似性から）当然期待できるように，この公式は原子核による緩中性子の弾性共鳴散乱に対する，ブライト＝ウイグナーの公式と形は一致する（III (142.16)，(142.18) 参照）．因子 g は始めの原子と分子の角運動量の任意の合成のときに，与えられた J_n を得る確率である．

を導入し，$\sigma_{\mp}$ に対し

$$g=\frac{(2J_n+1)^2}{2(2J_1+1)}\sum_{M_1M_n}\begin{pmatrix} J_n & 1 & J_1 \\ -M_n & \lambda & M_1\end{pmatrix}^4$$

を持つ公式(2)を得る．二つの可能な場合

$$J_n=J_1,\quad J_1\pm 1$$

に対して，和の直接の計算は次式を与える．

$$g=\begin{cases}\dfrac{7J_1(J_1+1)+1}{30J_1(J_1+1)}, & J_n=J_1\neq 0;\\[2ex] \dfrac{(2J_1+3)\,[16(J_1+1)^2-1]}{30(2J_1+1)^2(J_1+1)}, & J_n=J_1+1;\\[2ex] \dfrac{(2J_1-1)\;(16J_1^2-1)}{30J_1(2J_1+1)^2}, & J_n=J_1-1,\ J_1\geqslant 1.\end{cases}$$

第7章 散乱行列

§65. 散乱振幅

衝突問題の一般的設定は，つぎのようになる．すなわち，系の与えられた始状態（自由粒子のある集合）ごとに，種々の可能な終状態（自由粒子の他の集合）の確率を見いださねばならない．もしも記号 $|i\rangle$ が始状態を表わすと，衝突の結果は

$$\sum_f |f\rangle\langle f|\mathrm{S}|i\rangle \tag{65.1}$$

の重ね合わせとして表わすことができる．ここで和は異なる可能な終状態 $|f\rangle$ について行なわれる．この展開係数 $\langle f|\mathrm{S}|i\rangle$（あるいは簡単な記号で S_{fi}）は**散乱行列**あるいはS-**行列**[1] を形成している．平方 $|S_{fi}|^2$ は一定の状態 $|f\rangle$ への遷移確率を与える．

粒子間の相互作用がないと，系の状態は変わらないであろう．単位 S-行列（散乱のない）はこれに対応するはずである．散乱行列をいつも

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i(2\pi)^4\delta^{(4)}(P_f - P_i)\,T_{fi} \tag{65.2}$$

の形に表わして，この単位行列を分離するのが便利である．ここで T_{fi} は新しい行列である．第2項には 4-運動量の保存則を表わす4次元 δ-関数が分離される(P_i および P_f は始および終状態のすべての粒子の 4-運動量の和である．残りの因子は将来の便利のために導入された．非対角要素では (65.2) の第1項は落ちる．したがって，遷移 $i\to f$ に対して S および T の行列要素は

$$S_{fi} = i(2\pi)^4\delta^{(4)}(P_f - P_i)\,T_{fi} \tag{65.3}$$

によって，互いに結ばれる．δ-関数を分離したあとに残る行列要素 T_{fi} を**散乱振幅**と呼ぶ．

絶対値 $|S_{fi}|$ の2乗冪に際し，δ-関数の平方が現われる．これはつぎのように理解する必要がある．δ-関数は積分

---

1) 英語の Scattering あるいはドイツ語の Streuung からとった．

$$\delta^{(4)}(P_f - P_i) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{i(P_f - P_i)x}d^4x \tag{65.4}$$

から生じる．もしも他のこのような積分を（すでに一つ δ-関数が存在するので）$P_f = P_i$ で計算する．そのとき，大きいけれど有限なある体積 V および時間間隔 t にわたって積分を行なうとすれば，$Vt/(2\pi)^4$ を得る [1]．したがって

$$|S_{fi}|^2 = (2\pi)^4\,\delta^{(4)}(P_f - P_i)\,|T_{fi}|^2 Vt$$

と書くことができる．t で割り，単位時間の遷移確率を得る．

$$w_{f\leftarrow i} = (2\pi)^4\,\delta^{(4)}(P_f - P_i)\,|T_{fi}|^2 V. \tag{65.5}$$

（始めおよび終りの）自由粒子はどれも固有の波動関数，すなわちある振幅 u（電子に対しては双スピノール，光子に対しては 4-ベクトル，その他）を持つ平面波で記述される．散乱振幅 T_{fi} は

$$T_{fi} = u_1^* u_2^* \cdots\cdots Q u_1 u_2 \cdots\cdots \tag{65.6}$$

の形の構造を持つ．ここで左には終りの，右には始めの粒子の波動関数がくる．Q は（すべての粒子の波動振幅の成分の添字についての）行列である．

始状態に合計1あるいは2個の粒子がある場合が最も重要である．第一の場合は崩壊といい，第二の場合は粒子の衝突という．

まず始めに，粒子が運動量空間要素 $\prod_a d^3p'_a$ 内の運動量 p'_a を持つ，任意個の粒子への崩壊を考えよう（a は終状態の粒子を番号づける．したがって，$\sum_a p'_a = P_f$ である）．この要素に対応し（体積 V [2] で規格化された）状態の数は

$$\prod_a \frac{Vd^3p'_a}{(2\pi)^3}$$

である．この量を (65.5) に掛ける必要がある．すなわち

$$dw = (2\pi)^4\,\delta^{(4)}(P_f - P_i)\,|T_{fi}|^2\,V \prod_a \frac{Vd^3p'_a}{(2\pi)^3}. \tag{65.7}$$

---

1)　始めに (65.4) の各座標について有限の限界で積分を計算し，続いて公式III (42.4)

$$\lim_{\xi\to\infty} \frac{\sin^2 \alpha\xi}{\xi\alpha^2} = \pi\delta(\alpha)$$

を使って極限に近づくことによって，別の方法でこれを示すこともできる．

2)　非常にわかりやすくするために，この節の計算でわれわれは1に等しい体積で規格化されるとは仮定しない．

このとき行列要素の計算に使われるすべての粒子の波動関数は，《体積Vに1粒子で》規格化されねばならない[1]．したがって，電子に対しては平面波(23.1)，スピン1の粒子に対しては (14.12)，光子に対しては (4.3) である．これらすべての関数は $\sqrt{2\varepsilon V}$ を含んでいる．ここで ε は粒子のエネルギーである．しかしながら，先へいくと粒子の波動関数のあらゆる計算の際は，これらの因子を書かないようにした方がつごうがよい（これらは確率の式に含ませよう）．このようにして，電子の平面波は

$$\psi = ue^{-ipx}, \quad \bar{u}u = 2m. \tag{65.8}$$

光子波は

$$A=\sqrt{4\pi}\, ee^{-ikx}, \quad ee^* = -1,\ ek = 0. \tag{65.9}$$

このような波動関数を使って計算された散乱振幅を（T_{fi} と区別して）M_{fi} としよう．明らかに

$$T_{fi} = \frac{M_{fi}}{(2\varepsilon_1 V\cdots 2\varepsilon_1' V\cdots)^{1/2}} \tag{65.10}$$

である．分母には，始めあるいは終りの粒子のおのおの一つずつの $\sqrt{2\varepsilon V}$ が現われる．

特に崩壊確率に対しては (65.7) の代りに

$$dw = (2\pi)^4\,\delta^{(4)}\,(P_f - P_i)\,|\,M_{fi}\,|^2\,\frac{1}{2\varepsilon}\prod_a \frac{d^3p_a'}{(2\pi)^3 2\varepsilon_a'} \tag{65.11}$$

を得る．ここで ε は崩壊粒子のエネルギーである．当然のことながら，規格化の体積はこの公式からは落ちる[2]．

（運動量 $\boldsymbol{p}_1'$，$\boldsymbol{p}_2'$ およびエネルギー ε_1'，ε_2'の）2粒子への崩壊の場合について（そのなかの δ-関数を落とした）最終的な形を与えよう．崩壊粒子の静止系では $\boldsymbol{p}_1' = -\boldsymbol{p}_2' \equiv \boldsymbol{p}'$，$\varepsilon_1' + \varepsilon_2' = m$ である．

---

1) このような規格化の方法は，終りの核子の波動関数が $\delta(\boldsymbol{p})$ に規格化され，確率が d^3p_1'……についてのものになるような方法と同等であることを思い出そう（184頁の脚注を見よ）．

2) もしも終りの粒子のなかに N 個の同一粒子があるとき，（積分された確率を求めるために）その運動量で積分する際，粒子の交換により区別される状態が同一であることを考慮した因子 $1/N!$ を導入する必要がある．

$$dw = \frac{1}{(2\pi)^2} |M_{fi}|^2 \frac{1}{2m} \frac{1}{4\varepsilon'_1 \varepsilon'_2} \delta(\boldsymbol{p}'_1 + \boldsymbol{p}'_2)\delta(\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 - m) d^3p'_1 d^3p'_2$$

となる．第一の δ-関数は $d^3p'_2$ についての積分で落ちる．微分 $d^3p'_1$ は

$$d^3p' = \boldsymbol{p}'^2 d|\boldsymbol{p}'|do = |\boldsymbol{p}'|do \frac{\varepsilon'_1 \varepsilon'_2 d(\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2)}{\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2} \tag{65.12}$$

の形に書き直す（$\varepsilon'^2_1 - m'^2_1 = \varepsilon'^2_2 - m'^2_2 = \boldsymbol{p}'^2$ であることに注意すれば，この書き方が正しいことが容易に確かめられる）．$d(\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2)$ による積分は第二の δ-関数を落とし

$$dw = \frac{1}{32\pi^2 m^2} |M_{fi}|^2 |\boldsymbol{p}'| do'. \tag{65.13}$$

今度は（運動量 $\boldsymbol{p}_1$，および $\boldsymbol{p}_2$，エネルギー ε_1 および ε_2 を持つ）2粒子の衝突と，それに伴う運動量 $\boldsymbol{p}'_a$ を持つ任意の個数の粒子の集まりへの変換を考察しよう．(65.11) の代りに，今は

$$dw = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) |M_{fi}|^2 \frac{1}{4\varepsilon_1 \varepsilon_2 V} \prod_a \frac{d^3p'_a}{(2\pi)^3 2\varepsilon'_a}.$$

しかしながらこの場合，われわれに興味のある量は確率でなくて断面積 $d\sigma$ である．（ローレンツ変換に対して不変の）断面積 $d\sigma$ は

$$j = \frac{I}{V\varepsilon_1 \varepsilon_2} \tag{65.14}$$

という量で割って dw から求められる．ここで I は4-スカラー

$$I = \sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} \tag{65.15}$$

を表わす（II，§12参照）[1]．重心系（$\boldsymbol{p}_1 = -\boldsymbol{p}_2 \equiv \boldsymbol{p}$）では

$$I = |\boldsymbol{p}|(\varepsilon_1 + \varepsilon_2). \tag{65.16}$$

したがって

$$j = \frac{|\boldsymbol{p}|}{V}\left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2}\right) = \frac{v_1 + v_2}{V}. \tag{65.17}$$

---

1)　将来の引用のために I の式もまた

$$I^2 = \frac{1}{4}[s - (m_1 + m_2)^2][s - (m_1 - m_2)^2] \tag{65.15a}$$

の形に書こう．ここで $s = (p_1 + p_2)^2$ である．

これは衝突粒子の流れの密度の普通の定義と一致する (v_1, v_2 はそれらの速度である)[1].
このようにして，断面積に対してつぎの公式を得る.

$$d\sigma = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i)\,|M_{fi}|^2 \frac{1}{4I} \prod_a \frac{d^3p'_a}{(2\pi)^3 2\varepsilon'_a}. \tag{65.18}$$

終状態にもまた合計2個の粒子がある場合に対し，δ-関数を消去してこの公式に最終的な形を与えよう．重心系での過程を考察し，$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2$ を全エネルギー，$\boldsymbol{p}_1 = -\boldsymbol{p}_2 \equiv \boldsymbol{p}$ および $\boldsymbol{p}'_1 = -\boldsymbol{p}'_2 \equiv \boldsymbol{p}'$ を，始めおよび終りの運動量としよう．δ-関数の消去は (65.13) を導くときと同様に行なわれ

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi^2}\,|M_{fi}|^2 \frac{|\boldsymbol{p}'|}{|\boldsymbol{p}|\,\varepsilon^2}\,do' \tag{65.19}$$

が得られる (粒子の種類が衝突で変わらない弾性散乱の特別な場合には，$|\boldsymbol{p}'| = |\boldsymbol{p}|$ である).

つぎの不変量を導入して，この公式を別の形に書き直そう．すなわち

$$\begin{aligned} t \equiv (p_1 - p'_1)^2 &= m_1^2 + m'^2_1 - 2(p_1 p'_1) \\ &= m_1^2 + m'^2_1 - 2\varepsilon_1\varepsilon'_1 + 2|\boldsymbol{p}_1|\,|\boldsymbol{p}'_1|\cos\theta. \end{aligned} \tag{65.20}$$

ここで θ は $\boldsymbol{p}_1$ と $\boldsymbol{p}'_1$ とのあいだの角である．重心系では運動量 $|\boldsymbol{p}_1| \equiv |\boldsymbol{p}|$ および $|\boldsymbol{p}'_1| \equiv |\boldsymbol{p}'|$ は全エネルギーだけで決定される．そして与えられた ε に対して

$$dt = 2\,|\boldsymbol{p}|\,|\boldsymbol{p}'|\,d\cos\theta \tag{65.21}$$

である．したがって (65.19) のなかでつぎの置き換えをすることができる.

$$do' = -\,d\varphi\, d\cos\theta = \frac{d\varphi\, d(-t)}{2\,|\boldsymbol{p}|\,|\boldsymbol{p}'|}.$$

ここで φ は $\boldsymbol{p}_1$ に対する $\boldsymbol{p}'_1$ の方位角である[2]．このようにして

---

1) 任意の基準系で

$$j = \frac{1}{V}\sqrt{(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2)^2 - [\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2]^2}$$

である．この式は $\boldsymbol{v}_1 \parallel \boldsymbol{v}_2$ である場合はいつも，普通の流れの密度 $j = \dfrac{(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2)}{V}$ になってしまう.

2) 同様な場合の微分の正しい符号は明らかなので，以下簡単のために $d(-t)$ の代りに dt と書くことにしよう.

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi}|M_{fi}|^2\frac{dt}{I^2}\frac{d\varphi}{2\pi} \tag{65.22}$$

となる（われわれはふたたび (65.16) にしたがって不変量 I を導入した）．方位角 φ およびそれとともに (65.22) の形の断面積は，粒子の相対運動の方向を変えないローレンツ変換に関して不変量である．もしも断面積が方位角によらないならば，公式 (65.22) は特別簡単な形をとる．

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi}|M_{fi}|^2\frac{dt}{I^2}. \tag{65.23}$$

もしも衝突粒子の一つが十分重く(その状態が衝突の結果変わらないならば)，この過程でのその役割は，他の粒子が散乱される定場の不動の源の役割に帰してしまう．定場中で系のエネルギーは不変である（しかし運動量は違う！）ことに対応して，衝突過程のこのような議論に際して S-行列の要素を

$$S_{fi} = i\,2\pi\delta(E_f - E_i)T_{fi} \tag{65.24}$$

の形に表わそう．

$|S_{fi}|^2$ の式のなかで1次元 δ-関数の平方は

$$[\delta(E_f - E_i)]^2 \longrightarrow \frac{1}{2\pi}\delta(E_f - E_i)t$$

と考えねばならない．続いて（(65.11) の導出の際と同様に），T_{fi} の代りに振幅 M_{fi} に移り，定場で散乱された粒子が終状態で若干個の粒子を作る過程の確率としてつぎのような式を得る．

$$dw = 2\pi\delta(E_f - \varepsilon)|M_{fi}|^2\frac{1}{2\varepsilon V}\prod_a \frac{d^3p_a}{(2\pi)^3 2\varepsilon'_a}$$

ここでふたたび $\varepsilon(=E_i)$ は始めの粒子のエネルギー，p_a および ε'_a は終りの粒子の運動量およびエネルギーである．散乱断面積は dw を流れの密度 $j = v/V$ で割ることによって得られる．ここで $v = |\boldsymbol{p}|/\varepsilon$ は散乱粒子の速度である．当然のことながら，その結果規格化の体積は落ちて

$$d\sigma = 2\pi\delta(E_f - \varepsilon)\,|M_{fi}|^2\frac{1}{2|\boldsymbol{p}|}\prod_a \frac{d^3p'_a}{(2\pi)^3 2\varepsilon'_a}. \tag{65.25}$$

弾性散乱の特別の場合は，終状態にも同じ（大きさの）運動量と同じエネルギーを持つ，

ただ一つの粒子がある. $d^3p' \longrightarrow p'^2 d|\mathbf{p}'|do' = |\mathbf{p}'|\varepsilon' d\varepsilon' do'$ と置き換え, $\delta(\varepsilon'-\varepsilon)$ を $d\varepsilon'$ の積分で落として

$$d\sigma = \frac{1}{16\pi^2}|M_{fi}|^2 do' \tag{65.26}$$

の形の断面積を得る.

§66. 偏りのある粒子の反応

この節でわれわれは, 散乱断面積の計算にあたり, 反応に加わる粒子の偏りの状態がどのように考慮されるかを, 簡単な例で示そう.

始および終状態に電子が1個ずつあるとしよう. このとき散乱振幅は

$$M_{fi} = \bar{u}'\mathrm{A}u(\equiv \bar{u}'_i A_{ik} u_k) \tag{66.1}$$

の形になる. ここで u および u' は始めおよび終りの電子の双スピノール振幅であり, A は (反応に参加する他の粒子がもしあれば, その運動量および偏りに依存する) 行列である.

散乱断面積は $|M_{fi}|^2$ に比例する. すなわち

$$(\bar{u}'\mathrm{A}u)^* = u'\gamma^{0*}\mathrm{A}^*u^* = u^*\mathrm{A}^+\gamma^{0+}u'$$

あるいは

$$(\bar{u}'\mathrm{A}u)^* = \bar{u}\bar{\mathrm{A}}u' \tag{66.2}$$

である. ここで

$$\bar{\mathrm{A}} = \gamma^0\mathrm{A}^+\gamma^0$$

である[1]. このようにして

$$|M_{fi}|^2 = (\bar{u}'\mathrm{A}u)(\bar{u}\bar{\mathrm{A}}u') \equiv u'_i\bar{u}'_k A_{kl} u_l \bar{u}_m \bar{\mathrm{A}}_{mi}. \tag{66.3}$$

もしも始めの電子が密度行列 ρ の混合 (部分的に偏った) 状態にあるならば, そしてもしもわれわれが, あらかじめ与えられた一定の偏りの状態 ρ′ にある終りの電子を作る過程の断面積に興味を持つならば, 双スピノール振幅の成分の積を

$$u'_i\bar{u}'_k \longrightarrow \rho'_{ik}, \quad u_l\bar{u}_m \longrightarrow \rho_{lm}$$

---

1) 行列 $\bar{\mathrm{A}}$ を作る必要と関連して, 将来のためにつぎのような容易に確かめられる等式をあげておこう.

$$\overline{\gamma^\mu} = \gamma^\mu, \quad \overline{\gamma^\mu\gamma^\nu\cdots\gamma^\rho} = \gamma^\rho\cdots\gamma^\nu\gamma^\mu, \quad \overline{\gamma^5} = -\gamma^5, \quad \overline{\gamma^5\gamma^\mu} = \gamma^5\gamma^\mu. \tag{66.2a}$$

に置き換える必要がある．このとき

$$|M_{fi}|^2 = \mathrm{Sp}\,(\rho' \mathrm{A} \rho \bar{\mathrm{A}}) \tag{66.4}$$

である．密度行列 ρ および ρ' は公式 (29.13) によって与えられる．すなわち

$$\rho = \frac{1}{2}(\hat{p} + m)(1 - \gamma^5 \hat{a}) \tag{66.5}$$

である（および ρ' に対しても同様）．

もしも始めの電子が偏っていなければ

$$\rho = \frac{1}{2}(\hat{p} + m). \tag{66.6}$$

この式を代入することは，電子の偏りについての平均と同等である．もしも終りの電子が任意に偏っている散乱断面積の決定が要求されれば，$\rho' = (\hat{p}' + m)/2$ と置いて結果を2倍する必要がある．この操作は電子の偏りについての和と同等である．このようにして

$$\frac{1}{2}\sum_{\text{偏り}} |M_{fi}|^2 = \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\,\{(\hat{p}' + m)\,\mathrm{A}\,(\hat{p} + m)\,\bar{\mathrm{A}}\}, \tag{66.7}$$

を得る．ここで $\sum$ は始め，および終りの偏りについての和を意味し，因子1/2は和のなかの一つを平均に変えている．

(66.4) のなかの密度行列 ρ' は，もともと散乱の過程そのものではなく（終りの電子のいろいろの偏りを分離する）検出器の性質を特長づける補助的な概念である．散乱過程そのものによってもたらされる，電子の偏りの状態についての問題が起こる．もしも $\rho^{(f)}$ がこの状態の密度行列とすれば，電子を状態 ρ' に見いだす確率は $\rho^{(f)}$ を ρ' に投影すること，すなわち跡 $\mathrm{Sp}(\rho^{(f)}\rho')$ を作ることにより得られる．この量が対応する断面積，すなわち，平方 $|M_{fi}|^2$ に比例するだろう．(66.4) とくらべて

$$\rho^{(f)} \sim \mathrm{A}\rho\bar{\mathrm{A}} \tag{66.8}$$

であると結論する．$\rho^{(f)}$ は4－ベクトル $a^{(f)}$ を使った (66.5) の形を持つ必要があることは前からわかっているので，問題は $a^{(f)}$ の決定になる．これは公式 (29.14) によって行なうことができるが，以下に示されるようにした方がより簡単である．

われわれは§29で，4－ベクトル a の成分は3－ベクトル $\boldsymbol{\zeta}$，すなわち静止系での電子のスピンの平均値（の2倍）の成分を使って表わしうることを見てきた．電子の偏りの状態はこのベクトルにより完全に定義され，散乱断面積もこれを使って表わすのがつごうが

よい．平方 $|M_{fi}|^2$ は始めおよび終りの電子に関するベクトル $\boldsymbol{\zeta}$ および $\boldsymbol{\zeta}'$ について線型である．$\boldsymbol{\zeta}'$ の関数としてそれは

$$|M_{fi}|^2 = \alpha + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\zeta}' \qquad (66.9)$$

の形を持つ．ここで α および $\boldsymbol{\beta}$ 自身は $\boldsymbol{\zeta}$ の線型関数である．

(66.9) のなかのベクトル $\boldsymbol{\zeta}'$ は，検出器で分離される終りの電子の与えられた偏りである．密度行列 $\rho^{(f)}$ に対応するベクトル $\boldsymbol{\zeta}^{(f)}$ は，つぎのようにして容易に見いだされる．上記により

$$|M_{fi}|^2 \sim \mathrm{Sp}\,(\rho'\rho^{(f)})$$

である．相対論的不変性のために，この量は任意の基準系で計算できる．終りの電子の静止系では，(29.20) にしたがい

$$\rho'\rho^{(f)} \sim (1+\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\zeta}')(1+\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\zeta}^{(f)})$$

となる．したがって

$$|M_{fi}|^2 \sim 1 + \boldsymbol{\zeta}'\boldsymbol{\zeta}^{(f)}$$

であり，(66.9) とくらべて

$$\boldsymbol{\zeta}^{(f)} = \frac{\boldsymbol{\beta}}{\alpha} \qquad (66.10)$$

であることがわかる．このようにして，パラメータ $\boldsymbol{\zeta}'$ の関数として断面積を計算し，それにより偏り $\boldsymbol{\zeta}^{(f)}$ を決定する．

始めと終りの電子が1個よりも多い，さらに複雑な場合には，計算は上に述べた方式にしたがって同様に行なわれる．

したがって，もしも始めと終りに2個ずつ電子があるとすれば，散乱振幅は

$$M_{fi} = (\bar{u}'_1 \mathrm{A} u_1)(\bar{u}'_2 \mathrm{B} u_2) + (\bar{u}'_2 \mathrm{C} u_1)(\bar{u}'_1 \mathrm{D} u_2)$$

の形になる．ここで u_1，u_2 は始めの，u'_1，u'_2 は終りの電子の双スピノール振幅である．平方 $|M_{fi}|^2$ の変形にあたって

$$|\bar{u}'_1 \mathrm{A} u_1|^2 \, |\bar{u}'_2 \mathrm{B} u_2|^2$$

の形，および

$$(\bar{u}'_1 \mathrm{A} u_1)(\bar{u}'_2 \mathrm{B} u_2)(\bar{u}'_2 \mathrm{C} u_1)^*(\bar{u}'_1 \mathrm{D} u_2)^*$$

の形の項が現われる．1番目は (66.4) の形の二つの跡の積になり，2番目は

$$\mathrm{Sp}\,(\rho_1' A \rho_1 \overline{C} \rho_2' B \rho_2 \overline{D})$$

の形の跡になる.

陽電子は≪負の振動数≫の振幅 $u(-p)$ で記述される. 陽電子の参加する反応に対して, 前に述べられたものとの違いはつぎの点に帰する. すなわち密度行列として(66.5), (66.6) と, ただ m の前の符号を変える点だけが異なっている式を使う必要があることである ((29.16), (29.17) を見よ).

反応に参加する光子の偏りの状態へ移ろう.

始めの各光子の偏りは4-ベクトル e に, 終りの各光子は e^* に線型に散乱振幅中に現われる. どちらの場合にも断面積 (すなわち平方 $|M_{fi}|^2$) のなかには 4-テンソル $e_\mu e_\nu^*$ が入っている. 任意の部分的偏りの場合に移るために, このテンソルは4次元の密度行列, すなわち4-テンソル $\rho_{\mu\nu}$ に置き換える必要がある. すなわち

$$e_\mu e_\nu^* \longrightarrow \rho_{\mu\nu} \tag{66.11}$$

である. 特に偏りのない光子に対しては, (8.15) にしたがい

$$\rho_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \tag{66.12}$$

である. このようにして, 光子の偏りについての平均は, $|M_{fi}|^2$ のなかで対応する二つのテンソル添字 $\mu\nu$ について縮約することに帰してしまう[1].

もしも光子の偏りについての平均でなく和が要求されるならば, $e_\mu e_\nu^*$ を2倍の式に置き換える必要がある.

$$e_\mu e_\nu^* \longrightarrow -g_{\mu\nu}. \tag{66.13}$$

偏りのある光子の密度行列は公式(8.17)によって与えられる. この式に現われる 4-ベクトル $e^{(1)}$, $e^{(2)}$ の選択は, 普通は問題の具体的な条件によって指定される. ある場合には, これらのベクトルはある基準系で空間の一定方向に結びついていてもよい. また別の場合には, 問題の条件中に現われる特長的な 4-ベクトル, すなわち粒子の 4-運動量とこれを結びつけた方がつごうがよい.

(8.17) では, 光子の偏りは≪ベクトル≫ $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ を形成する, ストークスの

---

1) (66.12) は光子の二つの可能な偏りについて平均を, 4-ベクトル e の四つの独立な方向についての平均に帰している.

パラメータで記述される．電子の場合と同様に，終りの光子の偏り $\boldsymbol{\xi}^{(f)}$ を検出器で分離される偏り $\boldsymbol{\xi}'$ と区別する必要がある．もしも散乱振幅がパラメータ $\boldsymbol{\xi}'$ の関数として既知ならば，すなわち

$$|M_{fi}|^2 = \alpha + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\xi}'$$

ならば，公式（66.10）とまったく同様に，偏りは $\boldsymbol{\xi}^{(f)} = \boldsymbol{\beta}/\alpha$ である．

§67. 運動学的不変量

始めの状態にも終りの状態にも，合計2個ずつの粒子が存在する散乱過程に対する，若干の運動学的関係を考察しよう．われわれは一般の保存則のみからの結果であり，したがって粒子の性質や，その相互作用の法則によらずに成立する関係を考えよう．

4-運動量の保存則を一般的な形で書こう．これは粒子の始めおよび終りの状態の運動量に関するもので

$$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 0 \tag{67.1}$$

である．ここで $\pm q_a$ は運動量の4-ベクトルで，ここでこのなかの二つは入射粒子に，二つは散乱粒子に対応する．後者の運動量は $-q_a$ である．言いかえれば，q_a のなかの二つでは時間成分が $q_a^0 > 0$ であり，他の二つでは $q_a^0 < 0$ である．

4-運動量の保存と並んで，電荷の保存則も守られねばならない．ここで，電荷という言葉を，電気的な電荷のみならず，粒子と反粒子とで符号が異なる他の保存量のことであると理解することもできる．

この過程に参加する粒子の形が与えられると，4-ベクトル q_a の2乗は粒子の質量の2乗で与えられる（$q_a^2 = m_a^2$）．時間成分 q_a^0 の取る値，および電荷の値に依存して，われわれは三つの異なる反応の型を得る．これら三つの過程を

$$\begin{aligned} &\text{I)}\quad 1 + 2 \longrightarrow 3 + 4,\\ &\text{II)}\quad 1 + \bar{3} \longrightarrow \bar{2} + 4,\\ &\text{III)}\quad 1 + \bar{4} \longrightarrow \bar{2} + 3 \end{aligned} \tag{67.2}$$

のように書こう．ここで数字は粒子の番号を表わし，そして数字の上の横線は粒子と反粒子を区別する．反応の一つから他への移行，すなわち公式の一方の辺から他辺への粒子の移動には，対応する時間成分 q_a^0 の符号の変化，および電荷の変化，すなわち粒子の反粒子による置き換えが対応する（過程（67.2）と並んで逆の反応も，もちろん可能である）．

三つの過程（67.2）を，一つの（一般的）反応の三つの**交叉**（あるいは**クロス**）チャネ

ルという．

いくつかの例をあげよう．もしも粒子1と3が電子で，2と4が光子とすれば，チャネルⅠは電子による光子の散乱である．光子は真正中性であるためにチャネルⅢはⅠと同じである．チャネルⅡは電子－陽電子対の2光子への変換である．もしも四つの粒子が電子ならば，チャネルⅠは電子による電子の散乱，そしてチャネルⅡおよびⅢは電子による陽電子の散乱である．もしも粒子1および3が電子で，2および4が μ－中間子ならば，チャネルⅠは e の μ による散乱，チャネルⅢは e の $\bar{\mu}$ による散乱，チャネルⅡは $e\bar{e}$ 対の $\mu\bar{\mu}$ 対への変換である．

散乱過程の考察に際して，4－運動量から作ることができる不変量が重要な役割を果たす．不変散乱振幅はそれらの関数である．

四つの 4－運動量から二つの独立な不変量を作ることができる．実際に，(67.1)のために，三つの 4－ベクトル q_a が独立である．これらを q_1，q_2，q_3 としよう．これらから六つの不変量を作ることができる．すなわち，三つの平方 q_1^2，q_2^2，q_3^2 および三つの積 q_1q_2，q_1q_3，q_2q_3 である．始めの三つは与えられた質量の平方である．残りの三つは等式[1]

$$(q_1 + q_2 + q_3)^2 = q_4^2 = m_4^2$$

から出る一つの関係式で結ばれている．

しかしながら，対称性をよくするために，二つの代りに三つの不変量を考察しよう．そういうものとしては，つぎのように選ぶことにする．

$$\begin{aligned} s &= (q_1 + q_2)^2 = (q_3 + q_4)^2, \\ t &= (q_1 + q_3)^2 = (q_2 + q_4)^2, \\ u &= (q_1 + q_4)^2 = (q_2 + q_3)^2. \end{aligned} \tag{67.3}$$

容易にわかるように，これらは関係式

$$s + t + u = h \tag{67.4}$$

---

1) $n \geqslant 4$ 個の粒子が反応に参加する一般の場合には，関数的に独立な不変変数の数は $n-10$ である．実際に全部で $4n$ 個の量，すなわち n 個の 4－運動量 q_a の成分がある．これらのあいだには n 個の関数関係 $q_a^2 = m_a^2$，および4個の保存則 $\sum_{a=1}^{n} q_a = 0$ が成立する．6個の量，一般のローレンツ変換（一般の4次元回転）を定義するパラメータの数に対応した6個の量には任意の値を与えることができる．したがって独立不変変数の数は $4n-n-4-6 = 3n-10$ に等しい．

で結ばれる．ここで

$$h = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2. \tag{67.5}$$

基本チャネル（I）では不変量 s は簡単な物理的意味を持つ．これは重心系で衝突粒子（1および2）の全エネルギーの平方である（$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0$ のときは $s = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2$ である）．チャネルIIでは不変量 t が，またチャネルIIIでは不変量 u が同様な役割を演じている．この関係でチャネルI，II，IIIをしばしば s-，t-，u- チャネルと呼ぶ．

すべての不変量 s, t, u を，各チャネルの衝突粒子のエネルギーと運動量を使って表わすのは困難ではない．粒子1と2の重心系で，4-ベクトル q_a の時空間成分は

$$\begin{aligned} q_1 = p_1 = (\varepsilon_1,\ \mathbf{p}_s), \qquad & q_2 = p_2 = (\varepsilon_2,\ -\mathbf{p}_s), \\ q_3 = -p_3 = (-\varepsilon_3,\ -\mathbf{p}'_s), \qquad & q_4 = -p_4 = (-\varepsilon_4,\ \mathbf{p}'_s). \end{aligned} \tag{67.6}$$

（$\mathbf{p}_s$, $\mathbf{p}'_s$ の添字 s は，これらの運動量が s-チャネルの反応に関するものであることを示している）．ここで

$$s = \varepsilon_s^2, \qquad \varepsilon_s = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_3 + \varepsilon_4; \tag{67.7}$$

$$\begin{aligned} 4sp_s^2 &= [s - (m_1 + m_2)^2]\,[s - (m_1 - m_2)^2], \\ 4sp_s'^2 &= [s - (m_3 + m_4)^2]\,[s - (m_3 - m_4)^2]; \end{aligned} \tag{67.8}$$

$$\begin{aligned} 2t &= h - s + 4\mathbf{p}_s\mathbf{p}'_s - \frac{1}{s}(m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2), \\ 2u &= h - s - 4\mathbf{p}_s\mathbf{p}'_s + \frac{1}{s}(m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2). \end{aligned} \tag{67.9}$$

弾性散乱の場合（$m_1 = m_3$, $m_2 = m_4$）には $|\mathbf{p}_s| = |\mathbf{p}'_s|$ である．したがって $\varepsilon_1 = \varepsilon_3$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_4$ である．このときは (67.9) の代りにもっと簡単な公式を得る．

$$\begin{aligned} t &= -(\mathbf{p}_s - \mathbf{p}'_s)^2 = -2p_s^2\,(1 - \cos\theta_s), \\ u &= -2p_s^2(1 + \cos\theta_s) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2. \end{aligned} \tag{67.10}$$

ここで θ_s は $\mathbf{p}_s$ と $\mathbf{p}'_s$ のあいだの角である．ここで不変量 $-t$ は，衝突の際に渡される（3次元の）運動量の平方である．

他のチャネルに対する同様な公式は，簡単な記号の変更によって得られる．t-チャネルへ移るためには (67.6)～(67.10) のなかで $s \leftrightarrow t$, $2 \leftrightarrow 3$ の置き換えを，u-チャネルへ移るためには $s \leftrightarrow u$, $2 \leftrightarrow 4$ の置き換えをする必要がある．

§68. 物理的領域

散乱振幅を（関係式 $s + t + u = h$ だけで結びつけられている）独立変数 s, t, u の

関数と考えると，われわれはその値の物理的に許される領域と，許されない領域を区別する必要に突き当たる．物理的散乱過程に対応できる値は，4-運動量の保存則と，4-ベクトル q_a のおのおのの平方が与えられた量 $q_a^2 = m_a^2$ であるという事実の結果である，一定の条件を満足しなければならない．

二つの 4-運動量の積は

$$p_a p_b \geqslant m_a m_b. \tag{68.1}$$

したがって，もしも $q_a = p_a$，$q_b = p_b$（あるいは $q_a = -p_a$，$q_b = -p_b$）であれば

$$(q_a + q_b)^2 = (p_a + p_b)^2 \geqslant (m_a + m_b)^2.$$

もしも $q_a = p_a$，$q_b = -p_b$ であれば

$$(q_a + q_b)^2 = (p_a - p_b)^2 \leqslant (m_a - m_b)^2.$$

これから s-チャネルの反応に対しては

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)^2 \leqslant s \geqslant (m_3 + m_4)^2, \\ (m_1 - m_3)^2 \geqslant t \leqslant (m_2 - m_4)^2, \\ (m_1 - m_4)^2 \geqslant u \leqslant (m_2 - m_3)^2 \end{aligned} \tag{68.2}$$

（t-および u-チャネルにも同様な不等式）が出てくる．

残りの条件を見いだすために，4-ベクトル q_a のなかのどれか三つの対偶積，たとえば

$$L_\lambda = e_{\lambda\mu\nu\rho} q_1^\mu q_2^\nu q_3^\rho \tag{68.3}$$

であるような 4-ベクトル L を作ろう．粒子中の一つ（たとえば粒子1）の静止系では $q_1 = (q_1^0,\ 0)$ である．このとき L は空間成分だけを持ち，すなわち

$$L_i = e_{i0kl} q_1^0 q_2^k q_3^l$$

である．言いかえれば，L は空間性ベクトルで，あらゆる基準系で $L^2 \leqslant 0$ となる．L^2 を展開してつぎの条件を得る．

$$\begin{vmatrix} q_1^2 & q_1 q_2 & q_1 q_3 \\ q_2 q_1 & q_2^2 & q_2 q_3 \\ q_3 q_1 & q_3 q_2 & q_3^2 \end{vmatrix} \geqslant 0. \tag{68.4}$$

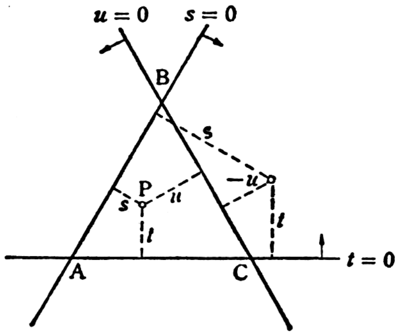
これは不変量 s，t，u を使って，すべてのチャネルに対して唯一の形

$$stu \geqslant as + bt + cu \tag{68.5}$$

に表わされる．ここで

$$ah = (m_1^2 m_2^2 - m_3^2 m_4^2)(m_1^2 + m_2^2 - m_3^2 - m_4^2),$$
$$bh = (m_1^2 m_3^2 - m_2^2 m_4^2)(m_1^2 + m_3^2 - m_2^2 - m_4^2), \qquad (68.6)$$
$$ch = (m_1^2 m_4^2 - m_2^2 m_3^2)(m_1^2 + m_4^2 - m_2^2 - m_3^2)$$

である (T. W. B. Kibble, 1960).



第7図

変数 s, t, u の変域を図に描くためには，平面上のいわゆる三角座標を使うのが便利である（マンデルシュタム面，S. Mandelstam, 1958）．この座標軸は，交わって正三角形を作るような3本の直線である．座標 s, t, u はこれら3本の直線に垂直な方向に沿って（第7図の矢印に示されるように三角形の内側の方向を正として）目盛られる．言いかえれば，面上の各点は3軸へ下した垂線の長さで（対応する符号をつけて）表わされる s, t, u の値に対応している．このとき条件 $s+t+u=h$ を満足することは，（もしも正三角形の高さが h に等しければ）よく知られた三角形の定理で保証される[1]．

基本チャネル (s) が弾性散乱に対応する，重要な場合を考察しよう．このとき粒子の質量は対ごとに同一である．すなわち

$$m_1 = m_3 \equiv m, \quad m_2 = m_4 \equiv \mu. \qquad (68.7)$$

$m > \mu$ としよう．条件(68.5) で

$$h = 2(m^2 + \mu^2), \quad a = c = 0, \quad b = (m^2 - \mu^2)^2$$

となり，したがって

$$sut \geqslant (m^2 - \mu^2)^2 t. \qquad (68.8)$$

これらの不等式により決定される領域の境界は，直線 $t=0$ と双曲線

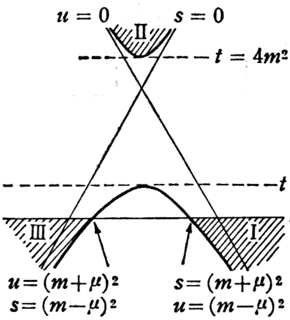
1) たとえば第7図の点 P と，三角形 ABC の三つの頂点を結んで，われわれはこれを高さが s, t, u の三つの三角形に分けよう．これらの面積の和と三角形 ABC の面積を等しいと置いて，求める等式が得られる．点 P が三角形 ABC の外にある場合にも，同様にしてこれを証明することができる．

$$su = (m^2 - \mu^2)^2 \tag{68.9}$$

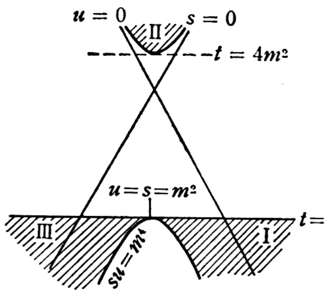
であり，その二分枝は扇形領域 $u<0$, $s<0$ および $s>0$, $u>0$ に存在する．軸 $s=0$ および $u=0$ は双曲線の漸近線である．(68.8) の代りに

$$t>0,\quad su>(m^2-\mu^2)^2 \quad あるいは \quad t<0,\quad su<(m^2-\mu^2)^2$$

と書くことができる．このほか条件 (68.2) から付加的に，s-チャネルでは不等式 $s>(m+\mu)^2$ を，また u-チャネルでは $u>(m+\mu)^2$ を考慮する必要がある．この結果，チャネル I，II，III (s, t, u) は第8図の斜線を施したいわゆる**物理的領域**に対応する．

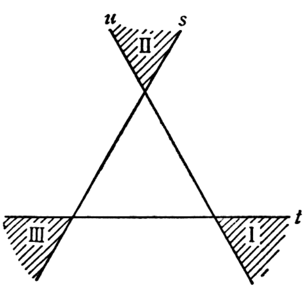


第8図



第9図

もしも $\mu=0$ (粒子 2,4 が光子) であると，双曲線の下の枝は $t=0$ の軸に接する．そして物理的領域は第9図に示されるようになる．



第10図

もしも $m=\mu$ ならば，領域 (68.8) の境界は座標軸と重なり，物理的領域は第10図に示された扇形になる．

四つの質量が異なる一般の場合には，方程式

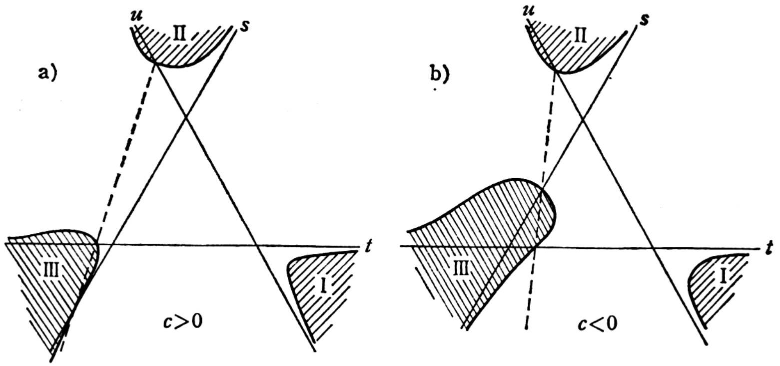
$$stu = as + bt + cu \tag{68.10}$$

は，3次曲線を決定し，その各枝は第11図に示されるように，三つのチャネルの物理的領域の境になっている．

$$m_1 \geqslant m_2 \geqslant m_3 \geqslant m_4.$$

としよう．このとき

$$a \geqslant b \geqslant c,\quad a>0,\quad b>0.$$



第11図

曲線（68.10）は直線

$$as+bt+cu=0$$

の上の点で座標軸と交わっている．この直線は c の符号に依存して，第11図の a), b) に示されるように走っている．$c<0$ のとき，u-チャネルの物理的領域は座標三角形の面積の一部を捕えている．言いかえれば，この場合に s, t, u という量は同時に正になることができる．境界線の合計三つの枝の漸近線は，対応する座標軸である（方程式（68.10）から関係式 $s+t+u=h$ を使い，変数の一つを消去し，その後，残りの変数のなかの一つを無限遠に持ってゆくことにより，これは容易に確かめられる）．一般の場合に，条件（68.2）は，方程式(68.10)によって確定される境界にくらべてなんら新しいものをもたらさない．（68.2）のなかの等式に対応する直線は，第11図の a), b) で斜線を施した物理的領域とは交わらない．これらのなかの若干のものが，変数 s, t あるいは u の対応するチャネルでの極限値に対応して，これらの領域に接することはある．

粒子中の一つの質量が残りの三つの質量の和より大きい（$m_1>m_2+m_3+m_4$）場合には，チャネルＩ，II，IIIと並んで，さらに崩壊

$$\text{IV)}\quad 1\longrightarrow\bar{2}+3+4 \tag{68.11}$$

に対応する４番目のチャネルが可能になるのである．このチャネルに対して，崩壊粒子の静止系で

$$q_1=(m_1,\ 0),\quad q_2=(-\varepsilon_2,\ \ -\boldsymbol{p}_2),\quad q_3=(-\varepsilon_3,-\boldsymbol{p}_3),\quad q_4=(-\varepsilon_4,\ \ -\boldsymbol{p}_4),$$

$$\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4=m_1,\qquad \boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{p}_3+\boldsymbol{p}_4=0.$$

不変量は

$$\begin{aligned}s&=m_1^2+m_2^2-2m_1\varepsilon_2,\\ t&=m_1^2+m_3^2-2m_1\varepsilon_3,\\ u&=m_1^2+m_4^2-2m_1\varepsilon_4\end{aligned}\tag{68.12}$$

である．今度は（68.1）から

$$\begin{aligned}(m_3+m_4)^2&\leqslant s\leqslant(m_1-m_2)^2,\\ (m_2+m_4)^2&\leqslant t\leqslant(m_1-m_3)^2,\\ (m_2+m_3)^2&\leqslant u\leqslant(m_1-m_4)^2\end{aligned}\tag{68.13}$$

を得る．このようにして，三つの不変量はすべて正である．すなわち，崩壊チャネルの物理的領域は座標三角形の内側にある．それは（68.13）のなかの等号に対応する直線によって形成される六角形に内接する（（68.10）から得られる）閉曲線により限られる．

問　　題

1.　三つが同一質量の場合の物理的領域を見いだせ．すなわち $m_1\equiv m, m_2=m_3=m_4\equiv\mu$ である（たとえば，反応 $K+\pi\longrightarrow\pi+\pi$）．

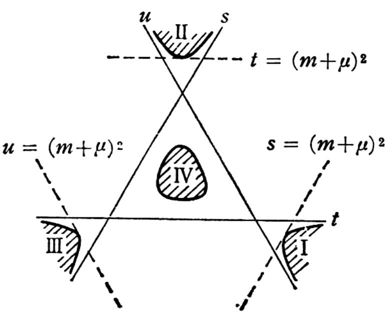
解　方程式（68.10）は

$$stu=\mu^2(m^2-\mu^2)^2 \qquad (1)$$

の形になる．このとき

$$s+t+u=3\mu^2+m^2.$$

領域 I，II，III は形の同じ曲線（I に対しては $s>0,\ t<0,\ u<0$，そして II および III に対しても同様）によって限られる．もしも $m>3\mu$ ならば，(1) はまた $s>0,\ t>0,\ u>0$ を持つ枝（閉曲線），すなわち，チャネル IV の領域の境界を持っている（第12図）．



第12図

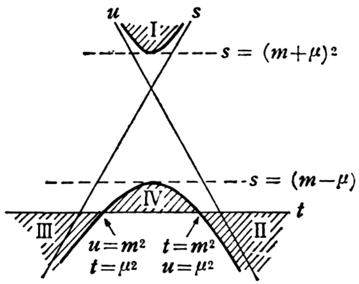
2.　$m_1\equiv m,\ m_2=\mu,\ m_3=m_4=0,\ m>\mu$ のときに同じことをせよ（たとえば反応

$\mu+\nu \longrightarrow e+\nu$).

解　条件 (68.5) はつぎの形になる.

$$stu \geqslant m^2\mu^2 s.$$

このとき $s+t+u=m^2+\mu^2$ である. 物理的領域は軸 $s=0$ と双曲線 $tu=m^2\mu^2$ の二つの枝で限られる (第13図).



第13図

3. $m_1=m_3\equiv m$, $m_2=0$, $m_4\equiv\mu$ で $m>2\mu$ のときに同じことをせよ (たとえば $p+\gamma \longrightarrow p+\pi^0$).

解　境界の方程式 (68.10) は

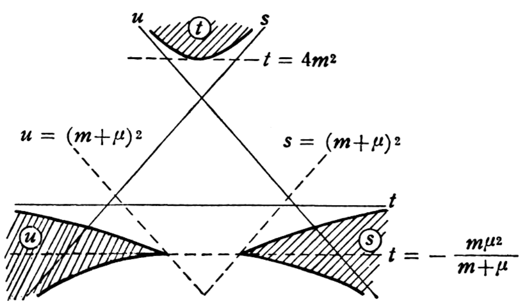
$$stu=a(s+a)+bt,$$

$$ah=m^2\mu^4,\quad bh=m^4(2m^2-\mu^2),\quad h=2m^2+\mu^2$$

の形をとる. u を消去すると

$$t^2+\left(\frac{b-a}{s}+s-h\right)t+\frac{ah}{s}=0$$

を得る. s が与えられると, これは t の2次方程式である. $s>(m+\mu)^2$ のとき (s-チャネルの領域), s のおのおのに対して t の二つの負の値が対応する. $s=(m+\mu)^2$ のときこの二つの2次方程式の根は一つに重なる. すなわち, $t=-m\mu^2/(m+\mu)$ である. s-チャネルの領域の境界は第14図に描かれている. 境界の曲線の下の枝は漸近的に軸 $u=0$ で近似され, 上の枝はこの軸と $t=\mu^4/(\mu^2-m^2)$ の点で交わる. u-チャネルの領域は, s-チャネルの領域に対して対称である. しかし t-チャネルは図に示されているように配置される.



第14図

§69. 部分振幅展開

散乱振幅の部分振幅による展開は

$$a+b\longrightarrow c+d \tag{69.1}$$

の形の反応の解析の重要な段階である．この各部分振幅は，（全エネルギー ε が与えられたとき）粒子の重心系での全角運動量の一定値 J に対応する[1]．

言いかえればこの部分振幅は，角運動量表示における S-行列の要素

$$\langle\varepsilon J'M'|\mathrm{S}|\varepsilon JM\rangle$$

にほかならない．角運動量 J と，与えられた z 軸への投影 M は保存するので，S-行列はこれらの量子数について（エネルギー ε についてと同様）対角型である．このとき空間の等方性により，対角要素は M の値に依存しない．J, M, ε が与えられたとき，散乱行列はまだスピン量子数に関しては行列である．この行列の要素を，簡単に

$$\langle\varepsilon JM\lambda'|\mathrm{S}|\varepsilon JM\lambda\rangle\equiv\langle\lambda'|\mathrm{S}^J(\varepsilon)|\lambda\rangle \tag{69.2}$$

の形に書こう．ここで λ および λ' はスピン量子数の組である．スピン量子数として，われわれは粒子の螺線度を使おう．（任意の空間軸へのスピンの投影と違って）螺線度は自由粒子に対しては保存すること，またそれは粒子の運動量とも角運動量とも交換することを思い起こそう（§16）．したがって，螺線度は散乱行列の運動量表示にも，角運動量表示にも使うことができる．

螺線度の添字についての S-行列要素を，われわれは散乱の**螺線振幅**と呼ぼう．このようにして，λ および λ' を始めおよび終りの粒子の螺線度の組と了解しよう．すなわち $\lambda=(\lambda_a,\ \lambda_b)$，$\lambda'=(\lambda_c,\ \lambda_d)$ である．

散乱行列要素は，運動量表示では状態 $|\varepsilon\boldsymbol{n}\lambda\rangle$（ここで $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}|$ は重心系での相対運動の運動量の方向である）に関して，また角運動量表示では状態 $|\varepsilon JM\lambda\rangle$ に関して定義される．これらは互いに，展開

$$|JM\lambda\rangle=\int|\boldsymbol{n}\lambda\rangle\langle\boldsymbol{n}\lambda|JM\lambda\rangle do_{\boldsymbol{n}} \tag{69.3}$$

の形で表わされる．ここで積分は方向 $\boldsymbol{n}$（状態の記号中のエネルギー ε は簡単のために

---

1) §69, §70 に記述された結果の大部分は，ヤコブとヴィックによってなされたものである（M. Jacob, G. C. Wick, 1959）．

落とした）について行なわれる．この変換のユニタリー性から（III，§12参照）逆変換の係数は

$$\langle JM\lambda \mid \boldsymbol{n}\lambda\rangle = \langle \boldsymbol{n}\lambda \mid JM\lambda\rangle^* \tag{69.4}$$

である．行列の変換の一般則から，これらの係数は，S-行列の二つの表示での要素のあいだの関係を定義する．

$$\langle \boldsymbol{n}'\lambda' \mid \mathrm{S} \mid \boldsymbol{n}\lambda\rangle = \sum_{JM} \langle \boldsymbol{n}'\lambda' \mid JM\lambda'\rangle\langle JM\lambda' \mid \mathrm{S} \mid JM\lambda\rangle\langle JM\lambda \mid \boldsymbol{n}\lambda\rangle. \tag{69.5}$$

展開（69.3）の係数は §16 の結果を使って容易に見いだされる．

すべての状態の波動関数が運動量表示で，すなわち（エネルギーが与えられたとき）運動量の方向の関数として表わされているとしよう．独立変数としてのこの方向を，状態の量子数としての方向 $\boldsymbol{n}$ から区別して $\boldsymbol{\nu}$ としよう．この表示では波動関数は（16.2）の形をとる．すなわち

$$\psi_{\boldsymbol{n}\lambda}(\boldsymbol{\nu}) = u^{(\lambda)}\delta^{(2)}(\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{n}). \tag{69.6}$$

（69.6）を展開（69.3）に代入すると，後者は一つの項になる．

$$\psi_{JM\lambda} = \langle \boldsymbol{\nu}\lambda \mid JM\lambda\rangle u^{(\lambda)}. \tag{69.7}$$

2粒子おのおのの螺線度 λ_a および λ_b は，そのスピンのその運動量方向への投影として定義される．もしも粒子の運動量が $\boldsymbol{p}_a \equiv \boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{p}_b = -\boldsymbol{p}$ ならば，1番目の粒子に対してこれは $\boldsymbol{n}$ 方向であり，2番目においては $-\boldsymbol{n}$ 方向である．もしも今，系を $\boldsymbol{n}$ 方向の螺線度 Λ を持つ一つの粒子とみなせば，$\Lambda = \lambda_a - \lambda_b$ である．（運動量表示での）波動関数は，（16.4）にしたがって

$$\psi_{JM\lambda}(\boldsymbol{\nu}) = u^{(\lambda)} D^{(J)}_{\Lambda M}(\boldsymbol{\nu}) \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}} \tag{69.8}$$

の形に表わすことができる．二つの式（69.7），（69.8）をくらべて（変数の記号 $\boldsymbol{\nu}$ を $\boldsymbol{n}$ に変えて），求める係数として次式を得る．

$$\langle \boldsymbol{n}\lambda \mid JM\lambda\rangle = \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}} D^{(J)}_{\Lambda M}(\boldsymbol{n}). \tag{69.9}$$

これらの係数を（69.5）に入れると

$$\langle \boldsymbol{n}'\lambda' \mid \mathrm{S} \mid \boldsymbol{n}\lambda\rangle = \sum_{JM} \frac{2J+1}{4\pi} D^{(J)}_{\Lambda' M}(\boldsymbol{n}') D^{(J)*}_{\Lambda M}(\boldsymbol{n}) \langle \lambda' \mid \mathrm{S}^J \mid \lambda\rangle,$$
$$\Lambda = \lambda_a - \lambda_b, \quad \Lambda' = \lambda_c - \lambda_d. \tag{69.10}$$

ここで簡単化された記号 (69.2) が用いられた. $\boldsymbol{n}$ 方向を z 軸に選ぼう. このときは

$$D_{\Lambda M}^{(J)}(\boldsymbol{n}) = \delta_{\Lambda M}$$

であり, (69.10) はつぎの形になる.

$$\langle \boldsymbol{n}'\lambda' | \mathrm{S} | \boldsymbol{n}\lambda \rangle = \sum_J \frac{2J+1}{4\pi} D_{\Lambda'\Lambda}^{(J)}(\boldsymbol{n}') \langle \lambda' | \mathrm{S}^J | \lambda \rangle. \tag{69.11}$$

われわれは, 係数として関数 $D_{\Lambda'\Lambda}^{(J)}$ を使って, 部分振幅による展開が実現されることを見た. (69.1) の形の反応に対しては散乱振幅を f, (重心系での) 断面積が

$$d\sigma = |\langle \boldsymbol{n}'\lambda' | \mathrm{f} | \boldsymbol{n}\lambda \rangle|^2 do' \tag{69.12}$$

になるように決めると便利である ((65.19) と比較すれば, この振幅と行列要素 M_{fi} とを結びつけることができる). 部分振幅によるこの展開を

$$\langle \boldsymbol{n}'\lambda' | \mathrm{f} | \boldsymbol{n}\lambda \rangle = \sum_{JM} (2J+1) D_{\Lambda' M}^{(J)}(\boldsymbol{n}') D_{\Lambda M}^{(J)*}(\boldsymbol{n}) \langle \lambda' | \mathrm{f}^J | \lambda \rangle, \tag{69.13}$$

あるいは $\boldsymbol{n}$ 方向に z 軸を選び

$$\langle \boldsymbol{n}'\lambda' | \mathrm{f} | \boldsymbol{n}\lambda \rangle = \sum_J (2J+1) D_{\Lambda'\Lambda}^{(J)}(\boldsymbol{n}') \langle \lambda' | \mathrm{f}^J | \lambda \rangle \tag{69.14}$$

の形に書こう. この公式は, スピンのない粒子の散乱に対する部分振幅による普通の展開の一般化になっている (III (122.13) 参照). $D_{00}^{(L)} = P_L(\cos\theta)$ であるから, 0 に等しいスピンの場合には, (69.14) はルジャンドル多項式による展開

$$\mathrm{f}(\theta) = \sum_L (2L+1)\, \mathrm{f}_L P_L(\cos\theta)$$

に帰する.

断面積 (69.12) は, すべての粒子が一定の螺線度を持つ場合を扱っている. もしも粒子が偏りの混合状態にあれば, 断面積は積

$$\langle \lambda_c\lambda_d | \mathrm{f} | \lambda_a\lambda_b \rangle \langle \lambda'_c\lambda'_d | \mathrm{f} | \lambda'_a\lambda'_b \rangle^*$$

を, 粒子の偏りの密度行列

$$\langle \lambda_a | \rho^{(a)} | \lambda'_a \rangle \langle \lambda_b | \rho^{(b)} | \lambda'_b \rangle \langle \lambda'_c | \rho^{(c)} | \lambda_c \rangle \langle \lambda'_d | \rho^{(d)} | \lambda_d \rangle$$

について平均することによって得られる（197頁の脚注参照）．このようにして，偏りのない粒子 c, d の形成を伴う，偏りのない粒子 a, b の反応に対して

$$d\sigma = \frac{do}{(2s_a+1)(2s_b+1)} \sum_{(\lambda)} \sum_{JJ'} (2J+1)(2J'+1) \langle \lambda_c\lambda_d | \mathrm{f}^J | \lambda_a\lambda_b \rangle \times \langle \lambda_c\lambda_d | \mathrm{f}^{J'} | \lambda_a\lambda_b \rangle^* D^{(J)}_{\Lambda'\Lambda}(\boldsymbol{n}')\, D^{(J')*}_{\Lambda'\Lambda}(\boldsymbol{n}') \tag{69.15}$$

を得る（z 軸は $\boldsymbol{n}$ の方向を向き，$\sum_{(\lambda)}$ は $\lambda_a\lambda_b\lambda_c\lambda_d$ についての和を表わす）．(a.12) にしたがって，関数 $D^{(J')*}_{\Lambda'\Lambda}$ を取り換え，続いて展開 (b.2) を使って最終的に

$$d\sigma = \frac{do}{(2s_a+1)(2s_b+1)} \sum_{(\lambda)JJ'} (-1)^{\Lambda-\Lambda'} (2J+1)(2J'+1) \langle \lambda_c\lambda_d | \mathrm{f}^J | \lambda_a\lambda_b \rangle \times \langle \lambda_c\lambda_d | \mathrm{f}^{J'} | \lambda_a\lambda_b \rangle^* \sum_L (2L+1) \begin{pmatrix} J & J' & L \\ \Lambda & -\Lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J & J' & L \\ \Lambda' & -\Lambda' & 0 \end{pmatrix} P_L(\cos\theta) \tag{69.16}$$

を得る（θ は $\boldsymbol{n}'$ と z 軸のあいだの角である）．L についての和は，J と J' のベクトルの合成の際現われるすべての整数値について行なわれる．

散乱振幅の部分振幅展開は，散乱の角分布の，空間回転に対する対称性と結びついたすべての性質を完全に考慮している．しかしながら，それは空間反転に関する対称性と結びついた性質をあらわな形では考慮していない．P-不変性は（もしも相互作用がこれを持てば），異なる螺線度の振幅のあいだに，一定の関係をもたらすことになる（のちの§70参照）．

§70. 螺線散乱振幅の対称性

P, T, C 変換に関する対称性（もちろん，もしも与えられた粒子の相互作用の過程が，実際にこの対称性を持てば）に課せられる要求は，異なる螺線散乱振幅のあいだに一定の関係が生じ，それにより独立な振幅の数がすくなくなることに帰する[1]．

これらの関係を確立するために，あらかじめ2粒子系の螺線状態の対称性を明らかにしよう．

粒子をその重心系で考察しよう．一つは運動量 $\boldsymbol{p}_1 \equiv \boldsymbol{p}$ および $\boldsymbol{p}$ の方向に対して螺線度 λ_1 を持ち，他は運動量 $\boldsymbol{p}_2 = -\boldsymbol{p}$, および $-\boldsymbol{p}$ 方向に対して螺線度 λ_2 を持っている．

---

1) もちろん，独立な振幅の数は行列 S^J の具体的な表示には依存しない，スピン変数の任意の選択に対して同一である．

もしも両粒子に対して，同一の $\boldsymbol{p}$ 方向に対する螺線度を決定すると，これは λ_1 および $-\lambda_2$ となる．したがって，それらは振幅 $u_{\boldsymbol{p}}^{(\lambda_1)}$ および $u_{\boldsymbol{p}}^{(-\lambda_2)}$ を持つ平面波で記述される．両粒子の系は，振幅 $u_{\boldsymbol{p}}^{(\lambda_1)}$ および $u_{\boldsymbol{p}}^{(-\lambda_2)}$ の積から作られる，（多成分の）関数 $u_{\boldsymbol{p}}^{(\lambda_1\lambda_2)}$ で記述される．

いまは系を $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}|$ 方向の螺線度 $\Lambda=\lambda_1-\lambda_2$ を持つ1個の粒子と考え，一定値 J, M, λ_1, λ_2（そしてまたエネルギー ε）を持つ状態に対して（運動量表示で，すなわち $\boldsymbol{n}$ の関数として）波動関数を書くことができる．すなわち

$$\psi_{JM\lambda_1\lambda_2}=u_{\boldsymbol{p}}^{(\lambda_1\lambda_2)}D_{\Lambda M}^{(J)}(\boldsymbol{n})\sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}},\quad \Lambda=\lambda_1-\lambda_2 \tag{70.1}$$

である（(69.8) を見よ）．Λ は全角運動量の $\boldsymbol{p}$ 方向への投影であるから

$$|\Lambda|\leqslant J \tag{70.2}$$

でなければならない．

(16.14) にしたがって反転に際しては

$$\mathrm{P}u^{(\lambda_1\lambda_2)}(\boldsymbol{n})=\eta_1\eta_2u^{(\lambda_1\lambda_2)}(-\boldsymbol{n})=\eta_1\eta_2(-1)^{s_1+s_2-\lambda_1+\lambda_2}u^{(-\lambda_1-\lambda_2)}(\boldsymbol{n}) \tag{70.3}$$

となる．ここで η_1, η_2 は粒子の内部自由度である．また (16.10) を用いて，関数 (70.1) の変換則を得る．

$$\mathrm{P}\psi_{JM\lambda_1\lambda_2}=\eta_1\eta_2(-1)^{s_1+s_2-J}\psi_{JM-\lambda_1-\lambda_2}. \tag{70.4}$$

もしも両粒子が同一であれば，その交換に関する対称性の問題が起こる．粒子の交換はその運動量とスピンの交換を意味する．関数 (70.1) に適用するときのこの操作の意味を明らかにするために，この定義では両粒子の角運動量が同一のベクトル $\boldsymbol{p}_1\equiv\boldsymbol{p}$, すなわち一方の（1番目の）粒子の運動量に投影される非対称性を持つことに注意しよう．交換後はベクトル $\boldsymbol{p}_2\equiv-\boldsymbol{p}$ がこのベクトルになる．角運動量 $\boldsymbol{j}_1$ および $\boldsymbol{j}_2$ のこのベクトルへの投影は（$\boldsymbol{p}$ への投影 λ_1 および $-\lambda_2$ の代りに）$-\lambda_1$ および λ_2 になる．したがって，粒子交換の演算子 (P_{12}) の，関数 (70.1) に対する作用は

$$\mathrm{P}_{12}\psi_{JM\lambda_1\lambda_2}=u^{(-\lambda_2-\lambda_1)}(-\boldsymbol{n})D_{\Lambda M}^{(J)}(-\boldsymbol{n})\sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}}$$

のように書くことができる（ここで前と同様に $\Lambda=\lambda_1-\lambda_2$ である）．その後 (70.3) と (16.10) とを使って

$$\mathrm{P}_{12}\psi_{JM\lambda_1\lambda_2}=(-1)^{2s-J}\psi_{JM\lambda_2\lambda_1} \tag{70.5}$$

となる．ここで $s_1 = s_2 \equiv s$ である．

同一粒子に対して許される状態は交換に対して，（ボソンに対しては）対称，あるいは（フェルミオンに対しては）反対称だけである．粒子のスピン s が整数のときは1番目の半奇数のときは二番目の場合であるから，両方の場合に2粒子系の許しうる螺線状態は1次結合

$$[1 + (-1)^{2s} \mathrm{P}_{12}] \psi_{JM\lambda_1\lambda_2},$$

あるいは (70.5) にしたがって

$$\psi_{JM\lambda_1\lambda_2} + (-1)^J \psi_{JM\lambda_2\lambda_1} \tag{70.6}$$

の形に書くことができる．この結合がボソンに対しても，フェルミオンに対しても同一の形をしていることは注目すべきことである．

粒子と反粒子からなる系に対して，交換の結果は同じ公式 (70.5) で表わされる．しかしながら，同一粒子の場合と異なり，ここでは二つの交換対称の状態，すなわち二つの1次結合

$$\psi^{\pm} = \psi_{JM\lambda_1\lambda_2} \pm (-1)^J \psi_{JM\lambda_2\lambda_1} \tag{70.7}$$

が許される．これらの状態は一定の荷電偶奇性 C を持っている．荷電共役の操作を，2粒子のすべての（スピンおよび荷電の）変数の完全な交換，およびそれに続くスピン変数（螺線度）の逆交換の結果として表わすことができる．1番目の操作の結果は，二つの同一粒子の系での交換と一致しなければならない．これから，(70.7) の上の符号（同一粒子に対して許される状態 (70.6) の符号と一致しているが）のときは，系は荷電偶，下の符号のときは荷電奇であること，すなわち

$$\mathrm{C}\psi^{\pm} = \pm \psi^{\pm}$$

になることが明らかである．

最後に時間反転の操作を考察しよう．スピンが s，その投影が σ の，静止粒子の波動関数は

$$\mathrm{T}\psi_{s\sigma} = (-1)^{s-\sigma} \psi_{s,-\sigma}$$

にしたがって変換される（III (60.2) 参照）．重心系での2粒子系は，また(変換性に関しては）角運動量 J およびその投影 M を持つ≪静止粒子≫の波動関数とみなすことができる．螺線度 λ_1, λ_2 はどうかというと，これらは変わらない．すなわち，時間反転で運動量と角運動量のベクトルは符号を変え，したがって積 $\boldsymbol{jp}$ は変わらないからである．

このようにして

$$T\psi_{JM\lambda_1\lambda_2}=(-1)^{J-M}\psi_{J-M\lambda_1\lambda_2} \tag{70.8}$$

となる.

つぎに，螺線散乱振幅の対称性はただちに書くことができる.

もしも相互作用が P-不変であるならば，反応

$$a+b\longrightarrow c+d$$

に対して，(J と ε が与えられたとき) 遷移振幅

$$|\lambda_a\lambda_b\rangle\longrightarrow|\lambda_c\lambda_d\rangle \quad と \quad \mathrm{P}|\lambda_a\lambda_b\rangle\longrightarrow\mathrm{P}|\lambda_c\lambda_d\rangle$$

は一致しなければならない．したがって，(70.4) を使って

$$\begin{aligned}&\langle\lambda_c\lambda_d|\mathrm{S}^J|\lambda_a\lambda_b\rangle\\&=\frac{\eta_c\eta_d}{\eta_a\eta_b}(-1)^{s_c+s_d-s_a-s_b}\langle-\lambda_c,\ -\lambda_d|\mathrm{S}^J|-\lambda_a,\ -\lambda_b\rangle\end{aligned} \tag{70.9}$$

となる．一定の螺線度を持つ状態の代りに，一定の偶奇性を持つ状態，すなわち1次結合

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{JM\lambda_1\lambda_2}\pm\mathrm{P}\psi_{JM\lambda_1\lambda_2})$$

(ここで $\lambda_1\lambda_2=\lambda_a\lambda_b$，あるいは $\lambda_c\lambda_d$ である) を選べば，偶奇性を保存しない遷移振幅は0になる.

時間反転は (70.8) にしたがって各状態を変換し，さらにその他に，始および終状態を交換する．したがって T-不変性は関係式

$$\langle\lambda_c\lambda_d|\mathrm{S}^J(\varepsilon)|\lambda_a\lambda_b\rangle=\langle\lambda_a\lambda_b|\mathrm{S}^J(\varepsilon)|\lambda_c\lambda_d\rangle \tag{70.10}$$

に帰着する．しかしながら，これら二つの振幅は異なる過程 (順および逆反応) を扱っている．弾性散乱の場合にのみ両過程は本質的に一致し，このとき (70.10) は同一の反応の螺線振幅間の関係を表わしている.

同一粒子の弾性散乱のとき，異なる振幅の数は交換対称性のためにさらにすくなくなる．われわれは，J が与えられたとき λ_1，λ_2 状態に関して対称状態だけか，反対称状態だけしか存在しないことを見てきた．これにより，角運動量の保存則はまた螺線度の交換に関する対称性の保存を意味している.

粒子と反粒子の弾性散乱 (あるいは，このような対の他の対への変換，すなわち $a+\bar{a}\longrightarrow b+\bar{b}$ の形の反応) のときも同様な事情になる．J が与えられたとき，λ_1，λ_2 について対称の状態も反対称の状態も存在する．しかしこれらの状態には，系の荷電偶奇性の

異なる値が対応する．これから，もしも粒子の相互作用が C-不変で荷電偶奇性が保存されるならば，λ_1，λ_2 について異なる対称性の状態間の遷移は禁止されることが導かれる[1]．しかしながら，同一粒子の場合との違いを強調しよう．そのときは，与えられたおのおのの J に対しては，対称性の状態の一方が一般に欠けている．《粒子-反粒子》の場合には（各 J に対して）異なる対称性の状態は存在するが，そのあいだの遷移だけが禁止されている．

普遍的な CPT-不変性のために，T-不変性の存在はまた CP-不変性の存在を意味している．後者は，すべての粒子を反粒子に変える（そして螺線度の符号を変える）ことによって，一方が他方から得られるような，二つの反応の振幅が等しい結果をもたらす．すなわち

$$\langle\lambda_c\lambda_d|\mathrm{S}^J|\lambda_a\lambda_b\rangle=\langle\lambda_{\bar{c}}\lambda_{\bar{d}}|\mathrm{S}^J|\lambda_{\bar{a}}\lambda_{\bar{b}}\rangle. \tag{70.11}$$

ここで $\lambda_{\bar{a}}=-\lambda_a$，…… である[2]．

同一の一般化された反応のすべての交叉チャネルに対して，独立な振幅の数は同じである．したがって，弾性散乱 $a+b\longrightarrow a+b$ と，対消滅 $a+\bar{a}\longrightarrow b+\bar{b}$ とを記述する独立な振幅の数は同じである．この際，1番目の場合に T-不変性により課される制限と，2番目の場合に C-不変性により課される制限とは同等である．

さらに，(粒子が2粒子に崩壊する反応 $a\longrightarrow b+c$ を詳述しよう．重心系(粒子 a の静止系）では $\boldsymbol{p}_b=-\boldsymbol{p}_c$ である．等式 $\boldsymbol{j}_a=\boldsymbol{j}_b+\boldsymbol{j}_c$ に $\boldsymbol{p}_b$ を掛けて

$$\lambda_a=\lambda_b-\lambda_c \tag{70.12}$$

を得る（始めの粒子の螺線度 λ_a は，2次粒子中の一つの運動量方向への，そのスピンの投影として定義される)．この関係は与えられた過程の持つ付加的な対称性，すなわち $\boldsymbol{p}_b$ および $\boldsymbol{p}_c$ 方向のまわりの軸対称の結果ということができる．もしも1番目の粒子のスピンが $s_a<s_b+s_c$ ならば，関係式 (70.12) は λ_a，λ_b，λ_c の値の許される選択の数，それにより崩壊の独立な螺線振幅の数を減少させる．与えられた場合の全角運動量 J は1番

---

1) 同一でない粒子の相互作用のアイソ不変性の結果としても，同様な禁止が起こりうる．したがって，陽子による中性子の散乱の際，λ_1，λ_2 についての異なる対称性の状態間の遷移も，この不変性の精度で禁止される．

2) これら二つの振幅は異なる反応に対するもので，したがってこれらのあいだの干渉は不可能であるから，(70.11) のなかの位相因子は一般的な意味を持たず，1に等しいと置くことができる．(70.11) から出る断面積の等式が現実的な意味を持っている．

目の粒子のスピンと一致し，したがって固定した量となる．

崩壊の際の P-不変性は関係式

$$\langle\lambda_b\lambda_c|\mathrm{S}^J|\lambda_a\rangle=\frac{\eta_b\eta_c}{\eta_a}(-1)^{s_a-s_b-s_c}\langle-\lambda_b,\ -\lambda_c|\mathrm{S}^J|-\lambda_a\rangle \tag{70.13}$$

によって表わされる（ここで (70.4) と並んで，1粒子の波動関数に対する変換則もまた使われている）．

もしも1番目の粒子が真正中性であり，C-偶奇性が保存されれば，これ以上の制限が現われる．ここでは三つの場合を区別する必要がある．もしも崩壊生成物もまた真正中性であれば，$C_a=C_bC_c$ でなければならない．この条件は崩壊をまったく禁止するか，新しい制限はもたらさずに満足されるかどちらかである．もしも粒子 b および c が異なれば，C-不変性は，一般に異なった過程，すなわち $a\longrightarrow b+c$ および $\bar{a}\longrightarrow\bar{b}+\bar{c}$ の振幅のあいだの関係式を確立する．最後に崩壊 $a\longrightarrow b+\bar{b}$ に対しては，つぎのような事情と関連した制限が生じる．それは，荷電偶奇性 C が与えられ，全角運動量 $J=s_a$ が与えられたとき，量子数 J の偶奇性と C の符号に依存して，系には螺線度に対して対称か反対称の状態のみが現われることである．

CP-不変性は，崩壊 $a\longrightarrow b+c$ および $\bar{a}\longrightarrow\bar{b}+\bar{c}$ の振幅の同等性

$$\langle\lambda_b\lambda_c|\mathrm{S}^J|\lambda_a\rangle=\langle\lambda_{\bar{b}}\lambda_{\bar{c}}|\mathrm{S}^J|\lambda_{\bar{a}}\rangle \tag{70.14}$$

（ここで $\lambda_{\bar{a}}=-\lambda_a$，…… である），すなわち粒子と反粒子の崩壊確率の同等性へと導いている．もしも粒子が異なる方法で（異なるチャネルで）崩壊することができれば，この同等性は各チャネルごとに成り立つ．しかしながら，この結果は自然の普遍的性質ではない CP-不変性が守られることを仮定していることを強調しよう．CPT-不変性だけが普遍的性質を持っている．この要求それだけでは等式

$$\langle\lambda_b\lambda_c|\mathrm{S}^J|\lambda_a\rangle=\langle\lambda_{\bar{a}}|\mathrm{S}^J|\lambda_{\bar{b}}\lambda_{\bar{c}}\rangle$$

だけを導いている．このなかで右辺は崩壊の逆過程に関するものである．先へいって（§72）われわれは，CPT-不変性はユニタリー性の要求とともに，粒子と反粒子の崩壊に対するかなり制限された関係へと導いている．

問　　題

1. (70.6) を使って，2光子系の可能な状態の分類を求めよ．

解 この場合は $\lambda_1, \lambda_2 = \pm 1$ である．J ($J > 0$) が偶数のとき，(70.6) にしたがって，$\lambda_1\lambda_2$ について三つの対称状態が許される．

$$\text{a)}\ \psi_{JM11},\quad \text{b)}\ \psi_{JM-1-1},\quad \text{c)}\ \psi_{JM1-1} + \psi_{JM-11}.$$

$J(J > 1)$ が奇数のとき一つの反対称状態が得られる．

$$\text{d)}\ \psi_{JM1-1} - \psi_{JM-11}.$$

状態 c) および d) は同時に一定の（$+1$）偶奇性を持っている．なぜかというと

$$\mathrm{P}(\psi_{JM1-1} \pm \psi_{JM-11}) = \pm(-1)^J(\psi_{JM1-1} \pm \psi_{JM-11})$$

であり，因子 $\pm(-1)^J = 1$ である．そして上の符号は J の偶数値，下の符号は奇数値に対応するからである．状態 a) および b) 自身は一定の偶奇性を持たないが，それから1次結合

$$\text{a}')\ \psi_{JM11} + \psi_{JM-1-1},\quad \text{b}')\ \psi_{JM11} - \psi_{JM-1-1}$$

を作ると，われわれは偶および奇状態を得る．$J = 0$ のとき（条件 $|\lambda_1 - \lambda_2| \leqslant J$ にしたがって）$\lambda_1 = \lambda_2$ だけが許される．したがって状態 c) は落ちて，一つの偶および一つの奇状態，a′) および b′) が残る．最後に $J = 1$ のとき，奇数の J でただ一つ許される状態 d) は $\lambda = 2 > J$ であるので落ちてしまう．このようにして許容状態の表 (9.5) に達する．

2. 非相対論的近似で全角運動量 J はスピンと軌道角運動量 L との合成の結果である．2粒子系に対して状態 $|JLSM\rangle$ および $|JM\lambda_1\lambda_2\rangle$ のあいだの関係を見いだせ．

解 角運動量の合成のときの波動関数を作る規則にしたがって

$$\psi_{JLSM} = \sum \left\{ \psi_{s_1\sigma_1}\psi_{s_2\sigma_2} C^{SM_S}_{\sigma_1\sigma_2} \right\} \psi_{LM_L} C^{JM}_{M_LM_S} \tag{1}$$

を得る．ここで $\psi_{s\sigma}$ はスピン s および（固定された z 軸への）投影 σ の，ψ_{LM_L} は軌道角運動量 L と投影 M_L の固有関数である．括弧内の式は s_1 と s_2 を S への合成に対応し，その後 S と L とが J に合成される．和はあらゆる m-添字について行なう．すべての関数を方向 $\boldsymbol{n}$ の関数として運動量表示で表わす（運動量 $\boldsymbol{p} \equiv \boldsymbol{p}_1$ である）．このとき関数 $\psi_{s\sigma}$ は(a.1) を使って螺線状態の関数 $\psi_{n\lambda}$ で表わす．

$$\psi_{s_1\sigma_1} = \sum_{\lambda_1} D^{(s_1)}_{\lambda_1\sigma_1}(\boldsymbol{n})\,\psi_{n\lambda_1},$$

$$\phi_{s_2\sigma_2} = \sum_{\lambda_2} D^{(s_2)}_{-\lambda_2\sigma_2}(\boldsymbol{n})\,\phi_{\boldsymbol{n},\,-\lambda_2}.$$

関数 ϕ_{LM_L} に対しては ((a. 18) と定義 (16. 5) を使って)

$$\phi_{LM_L} = Y_{LM_L}(\boldsymbol{n}) = i^L\sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}}\,D^{(L)}_{0M_L}(\boldsymbol{n})$$

を得る．これらの関数を（1）に代入し，展開 (b. 1) が2度，またクレブシュ・ゴルダン係数の直交性（III (106. 13)）も使われる．結果として展開

$$\phi_{JLSM} = \sum_{\lambda_1\lambda_2} \phi_{JM\lambda_1\lambda_2}\langle JM\lambda_1\lambda_2|JLSM\rangle \tag{2}$$

の形の ϕ_{JLSM} を得る．ここで

$$\phi_{JM\lambda_1\lambda_2} = \phi_{\boldsymbol{n}\lambda_1}\phi_{\boldsymbol{n},-\lambda_2}\ D^{(J)}_{\Lambda M}(\boldsymbol{n})\sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}},\quad \Lambda = \lambda_1 - \lambda_2,$$

で，係数は

$$\langle JM\lambda_1\lambda_2\,|\,JLSM\rangle$$
$$= (-i)^L(-1)^{s_1-s_2+S}\sqrt{(2L+1)(2S+1)}\begin{pmatrix} s_1 & s_2 & S \\ \lambda_1 & -\lambda_2 & -\Lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L & S & J \\ 0 & \Lambda & -\Lambda \end{pmatrix} \tag{3}$$

である．変換（2）のユニタリー性から

$$\langle JLSM\,|JM\lambda_1\lambda_2\rangle = \langle JM\lambda_1\lambda_2\,|JLSM\rangle^*.$$

3. つぎの散乱過程に対する独立な部分振幅の数を求めよ．

a) $\pi + N \longrightarrow \pi + N$,　b) $\gamma + \pi \longrightarrow \gamma + \pi$,　c) $\gamma + N \longrightarrow \gamma + N$,

d) $e + N \longrightarrow e + N$,　e) $\nu + e \longrightarrow \nu + e$,　f) $p + \gamma \longrightarrow n + \pi^+$,

g) $N + N \longrightarrow N + N$[1].

解 a)，b) 行列 S^J の要素の総数（すなわち量子数 $\lambda_1\lambda_2\lambda_1'\lambda_2'$ の異なる選び方の数）は $N=4$ である．P-不変性を考慮すると独立な要素の数は $N_P=2$ になる．T-不変性を考慮すると $N_T=3$ に，この両方を考えると $N_{PT}=2$ になる．

c)，d)　$N=16$,　$N_P=8$,　$N_T=10$,　$N_{PT}=6$.

e)　$N=4$,　$N_T=3$.

f)　$N=8$,　$N_P=4$.

---

1) 結局，これらの例では，粒子のスピンとその相互作用の対称性だけが重要である．

g) 計算のためには，螺線状態の1次結合から出発すると便利である．すなわち

$$\psi_{1g}=\psi_{++}+\psi_{--},\quad \psi_{2g}=\psi_{++}-\psi_{--},\quad \psi_{3g}=\psi_{+-}+\psi_{-+},\quad \psi_{u}=\psi_{+-}-\psi_{-+}$$

で，添字 ± は2粒子の螺線度（±1/2）の値を示している．粒子の交換に対して状態 $1g$, $2g$, $3g$ は偶，状態 u は奇である．したがって遷移 $g\leftrightarrow u$ は禁止され，交換対称性を考慮すると $N=16-6=10$ が残る．反転 P に対して関数 ψ_{1g}, ψ_{3g} と ψ_{2g}, ψ_{u} は逆の偶奇性（それぞれ $(-1)^{J+1}$ および $(-1)^{J}$）を持っている．これらのあいだの遷移の禁止は，独立な振幅の数を $N_P=6$ にしてしまう．最後に T- 不変性は振幅 $1g\longrightarrow 3g$, $3g\longrightarrow 1g$ の一致をもたらし，したがって $N_{PT}=5$ である．

§71. 不 変 振 幅

螺線振幅には一定の基準系，すなわち重心系が用いられる．しかし不変摂動論を使って散乱振幅を計算するときには(そしてその解析的性質を調べるためには)，振幅をあらわな不変形式に書くのが便利である．

反応に参加する粒子がスピンを持たないならば，散乱振幅は 4- 運動量の不変積だけに依存する．

$$a+b\longrightarrow c+d \tag{71.1}$$

の形の反応に対して，これらの不変量としては，§67 で定義された s, t, u のなかのどれか二つを選ぶことができる．このとき散乱振幅はある関数 $M_{fi}=f(s,\ t)$ になる．

もしも粒子がスピンを持つならば，運動学的不変量 s, t, u のほかに粒子の波動振幅（双スピノール，4- テンソルその他）から作ることができる不変量もまた存在する．このとき散乱振幅は

$$M_{fi}=\sum_n f_n(s,\ t)F_n \tag{71.2}$$

の形を持つ．ここで F_n は全参加粒子の波動振幅に（およびその 4- 運動量にもまた）線型に依存する不変量である．係数 $f_n(s,\ t)$ を**不変振幅**と呼ぶ．

波動振幅を一定の螺線度の粒子に対応するように選んで，われわれは不変量 $F_n=F_n(\lambda_i,\ \lambda_f)$ の一定値を得る．このとき散乱の螺線振幅は不変振幅 f_n の斉一次結合の形に表わされる．ここから，独立な関数 $f_n(s,\ t)$ の数は独立な螺線振幅の数と一致する．後者の数は（§70 で示されたように）容易に決められるので，それにより不変量 F_n を作る問題が容易になる．すなわち，われわれはそれがいくつ必要かをあらかじめ知ることになる．

若干の例を考察しよう．これらすべてに，相互作用が T-不変および P-不変であると考えよう．後者の性質は不変量 F_n が真正（擬でない）スカラーであることを意味している．

1) スピン1/2の粒子によるスピン0の粒子の散乱．不変量の数は2に等しい（§70，問題3参照）．これらとして

$$F_1 = \bar{u}'u, \quad F_2 = \bar{u}'\hat{K}u \tag{71.3}$$

を選ぶ．ここで $u = u(p)$，$u' = u(p')$ は始めおよび終りのフェルミオンの双スピノール振幅である．$K = k + k'$ で，k と k' は始めおよび終りのボソンの4-運動量である[1]．

量（71.3）の T-不変性は容易に直接に証明できる．時間反転は始および終状態を交換し，振幅 $u(p)$ を≪時間を反転した≫

$$u^T = \mathrm{U}_T\bar{u}, \quad \bar{u}^T = -\mathrm{U}_T^+u$$

に取り替える（(28.5) 参照）．したがって

$$\bar{u}'u \to \bar{u}^T u'^T = -(\mathrm{U}_T^+u)(\mathrm{U}_T\bar{u}') = -\bar{u}'\tilde{U}_T\mathrm{U}_T^+u = \bar{u}'\mathrm{U}_T\mathrm{U}_T^+u = \bar{u}'u.$$

これにより F_1 の T-不変性が証明される．同様にして

$$\bar{u}'\gamma^\mu u \to \bar{u}^T\gamma^\mu u'^T = -(\mathrm{U}_T^+u)\gamma^\mu(\mathrm{U}_T\bar{u}') = \bar{u}'\mathrm{U}_T\tilde{\gamma}^\mu\mathrm{U}_T^+u,$$

あるいは（26.12）のために[2]

$$\bar{u}'\gamma^0u \to \bar{u}'\gamma^0u, \quad \bar{u}'\boldsymbol{\gamma}u \to -\bar{u}'\boldsymbol{\gamma}u.$$

4-運動量はこの形で変換される．すなわち $(K^0, \boldsymbol{K}) \longrightarrow (K^0, -\boldsymbol{K})$ である．したがってスカラー乗積 $F_2 = K_\mu(\bar{u}'\gamma^\mu u)$ は不変量である．

2) スピン1/2の二つの同一粒子の散乱．独立な不変量は五つあり，これらとして

---

1) 一見して，さらに

$$\bar{u}'\sigma_{\mu\nu}k^\mu k'^\nu u$$

の形の不変量を作ることができそうである．しかしながら，もしも $k' = p + k - p'$ の保存則，および双スピノール振幅が満足する方程式 $\hat{p}u = mu$，$\bar{u}'\hat{p}' = m\bar{u}'$ を考慮すれば，これは不変量（71.3）に帰することが容易に確かめられる．

2) そこで，これらの変換則は§28で明らかにされた演算子 $\bar{\psi}\psi$，$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$——これらの行列の要素は $\bar{u}'u$，$\bar{u}'\gamma^\mu u$ であるが——の時間反転のときのふるまいから出てくる．

$$F_1 = (\bar{u}_1' u_1)(\bar{u}_2' u_2), \quad F_2 = (\bar{u}_1' \gamma^5 u_1)(\bar{u}_2' \gamma^5 u_2),$$
$$F_3 = (\bar{u}_1' \gamma^\mu u_1)(\bar{u}_2' \gamma_\mu u_2), \quad F_4 = (\bar{u}_1' \gamma^\mu \gamma^5 u_1)(\bar{u}_2' \gamma_\mu \gamma^5 u_2), \tag{71.4}$$
$$F_5 = (\bar{u}_1' \sigma^{\mu\nu} u_1)(\bar{u}_2' \sigma_{\mu\nu} u_2),$$

を選ぶことができる．ここで u_1, u_2 は始めの，u_1', u_2' は終りの粒子の双スピノール振幅である．始め（あるいは終り）の粒子の交換は新しい不変量をもたらさない．なぜかというと，新しい不変量は古いのを使って表わされるからである（§28，問題1）．しかし (71.4) の F_n を使った式 (71.2) は，二つの同一フェルミオンの交換で散乱振幅の符号を変えねばならない要求を，あらわな形では考慮してはいない．この要求を満足する式は

$$M_{fi} = [(\bar{u}_1' u_1)(\bar{u}_2' u_2) f_1(t,\ u) - (\bar{u}_2' u_1)(\bar{u}_1' u_2) f_1(u,\ t)] + \cdots\cdots \tag{71.5}$$

の形に書くことができる．p_1' と p_2'（あるいは p_1 と p_2）の交換する時に運動学的不変量は $s \to s$, $t \to u$, $u \to t$ となり，上記の条件が自動的に満足される．

さらに二つの例を考察しよう．すなわち光子のスピン0あるいは1/2の粒子による散乱である．この過程の振幅は，つぎのような空間類似ベクトル $e^{(1)}$, $e^{(2)}$ を使って表わすとつごうがよい．それは条件

$$e^{(1)2} = e^{(2)2} = -1, \quad e^{(1)}e^{(2)} = 0,$$
$$e^{(1)}k = e^{(2)}k = 0, \quad e^{(1)}k' = e^{(2)}k' = 0 \tag{71.6}$$

を満足する（2個の光子のおのおのに対してこれらの4-ベクトルはその4-基底になる．その基底を使ってその偏りの性質が記述される．§8参照）．

k および k' を光子の始めおよび終りの4-運動量，また p および p' を散乱粒子に対するそれとする．4-ベクトル

$$P^\lambda = p^\lambda + p'^\lambda - K^\lambda \frac{pK + p'K}{K^2},$$
$$N^\lambda = e^{\lambda\mu\nu\rho} P_\mu q_\nu K_\rho \tag{71.7}$$

を考えよう．ここで

$$K = k + k', \quad q = p - p' = k' - k.$$

明らかにこれらは互いに直交する．これらはまた4-ベクトル K, q にも，したがって k, k' にも直交する．時間類似4-ベクトル K ($K^2 = 2kk' > 0$) に直交するので，それ自身は空間類似である（事実 $\boldsymbol{K} = 0$ である基準系で $KP = 0$ から $P_0 = 0$ となり，したがって $P^2 < 0$ である）．P および N を規格化して，すなわち

$$e^{(1)\lambda}=\frac{N^\lambda}{\sqrt{-N^2}},\quad e^{(2)\lambda}=\frac{P^\lambda}{\sqrt{-P^2}} \tag{71.8}$$

を作り，すべての要求される性質を持つ 4-ベクトルの対を得る．$e^{(2)}$ は真正，$e^{(1)}$ は擬ベクトルであることを指摘しよう．

光子の散乱振幅を，そのなかに始めおよび終りの光子の偏りの 4-ベクトル e および e' を含めるようにして

$$M_{fi}=F^{\lambda\mu}e_\lambda'^{*}e_\mu \tag{71.9}$$

の形に表わそう．

3)　スピン 0 の粒子による光子の散乱．(71.9) のなかのテンソル $F^{\lambda\mu}$ は，粒子の4-運動量のみから作る必要がある．それは

$$F^{\lambda\mu}=f_1e^{(1)\lambda}e^{(1)\mu}+f_2e^{(2)\lambda}e^{(2)\mu} \tag{71.10}$$

の形に表わすことができる．ここで f_1, f_2 は不変振幅で，その数は今の場合は 2 に等しい．$e^{(1)\lambda}e^{(2)\mu}$ の積は擬テンソルで，(71.9) に代入すれば擬スカラーを与えるだろうから，この積を持つ項は $F^{\lambda\mu}$ のなかには不可能であることに注意しよう．

4)　スピン 1/2 の粒子による光子の散乱．テンソル $F_{\lambda\mu}$ を

$$\begin{aligned}F_{\lambda\mu}=&G_0(e_\lambda^{(1)}e_\mu^{(1)}+e_\lambda^{(2)}e_\mu^{(2)})+G_1(e_\lambda^{(1)}e_\mu^{(2)}+e_\lambda^{(2)}e_\mu^{(1)})\\&+G_2(e_\lambda^{(1)}e_\mu^{(2)}-e_\lambda^{(2)}e_\mu^{(1)})+G_3(e_\lambda^{(1)}e_\mu^{(1)}-e_\lambda^{(2)}e_\mu^{(2)})\end{aligned} \tag{71.11}$$

の形に表わそう．ここで G_0, G_3 は真正，G_1, G_2 は擬スカラーである．両方ともフェルミオンの双スピノール振幅 $\bar{u}(p')$ および $u(p)$ に関して双一次形式で

$$G_n=\bar{u}(p')\mathrm{Q}_nu(p) \tag{71.12}$$

の形を持っている．(双スピノール添字を持つ) 行列 Q_n の一般的な形は

$$\begin{aligned}&\mathrm{Q}_0=f_1+f_2\hat{K},\qquad \mathrm{Q}_1=\gamma^5(f_3+f_4\hat{K}),\\&\mathrm{Q}_2=\gamma^5(f_5+f_6\hat{K}),\qquad \mathrm{Q}_3=f_7+f_8\hat{K}\end{aligned} \tag{71.13}$$

である．ここで $K=k+k'$ である．係数 f_1, ……, f_8 は不変振幅で，ここに得られたその数は，T-不変性がいまだ考慮されていないので (必要な 6 の代りに) 8 に等しい．

時間反転は，始めと終りの粒子の 4-運動量を，その空間成分の符号を変えて取り替える．すなわち

$$(k_0,\ \boldsymbol{k}) \longleftrightarrow (k_0',\ -\boldsymbol{k}'),\qquad (p_0,\ \boldsymbol{p}) \longleftrightarrow (p_0',\ -\boldsymbol{p}') \tag{71.14}$$

となり，光子の偏りの 4-ベクトルは

$$(e_0,\ \boldsymbol{e}) \longleftrightarrow (e_0'^*,\ -\boldsymbol{e}'^*) \tag{71.15}$$

にしたがって変換され ((8.11 a) を見よ)，したがって

$$(e_0'^* e_0,\ e_i'^* e_0,\ e_i'^* e_k) \longrightarrow (e_0'^* e_0,\ -e_0'^* e_i,\ e_k'^* e_i).$$

この最後の条件のために散乱振幅 (71.9) の不変の条件は，要求

$$(F_{00},\ F_{i0},\ F_{ik}) \longrightarrow (F_{00},\ -F_{0i},\ F_{ki})$$

と同等になる．他方，(71.14) の置き換えの結果として

$$(K_0,\ \boldsymbol{K}) \longrightarrow (K_0,\ -\boldsymbol{K}),\qquad (q_0,\ \boldsymbol{q}) \longrightarrow (-q_0,\ \boldsymbol{q}),$$
$$(P_0,\ \boldsymbol{P}) \longrightarrow (P_0,\ -\boldsymbol{P}),\quad (N_0,\ \boldsymbol{N}) \longrightarrow (N^0,\ -\boldsymbol{N}).$$

これから

$$(e_0^{(1,2)},\ \boldsymbol{e}^{(1,2)}) \longrightarrow (e_0^{(1,2)},\ -\boldsymbol{e}^{(1,2)}). \tag{71.16}$$

したがって (71.11) の式から

$$G_{0,1,3} \longrightarrow G_{0,1,3},\quad G_2 \longrightarrow -G_2$$

になる必要があることが導かれる．前に，時間反転に際して

$$\bar{u}'u \longrightarrow \bar{u}'u,\qquad \bar{u}'\hat{K}u \longrightarrow \bar{u}'\hat{K}u \tag{71.17}$$

であることを見た．同様にして

$$\bar{u}'\gamma^5 u \longrightarrow -\bar{u}'\gamma^5 u,\quad \bar{u}'\gamma^5\hat{K}u \longrightarrow \bar{u}'\gamma^5\hat{K}u \tag{71.18}$$

を見いだすことができる．今は (71.12), (71.13) の式から T-不変性のために散乱振幅が

$$f_3 = f_6 = 0 \tag{71.19}$$

でなければならないことがわかる．

§72. ユニタリー条件

散乱行列はユニタリーでなければならない．すなわち $SS^+ = 1$，あるいは行列要素で

$$(SS^+)_{fi} = \sum_n S_{fn}S_{in}^* = \delta_{fi} \tag{72.1}$$

である．ここで n はすべての可能な中間状態を数える[1]．これは S-行列の最も一般的な性質で，散乱の際の状態の規格直交性の保存により保証されている（III，§124，141 を見よ）．特に等式 (72.1) の対角要素は，単に与えられた始状態から任意の終状態への遷移の和が1に等しいこと，すなわち

$$\sum_n |S_{ni}|^2 = 1$$

であることを表わしている．

(65.2) の形の行列要素を (72.1) に代入して次式を得る[2]．

$$T_{fi} - T^*_{if} = i(2\pi)^4 \sum_n \delta^{(4)}(P_f - P_n)\, T_{fn} T^*_{in}. \tag{72.2}$$

この等式の左辺が T の行列要素について線型で，右辺が2次形式であることに注意しよう．もしも（たとえば電磁的な）相互作用が小さいパラメータを含めば，左辺は1次，右辺は2次の微小量になる．したがって，1次近似では後者を無視することができる．そしてそのときは

$$T_{fi} = T^*_{if}. \tag{72.3}$$

すなわち，行列 T はエルミートである．

ユニタリー条件 (72.2) にさらに具体的な形を与えるためには，n についての和をどう理解すべきかを正確にする必要がある．2粒子の衝突の際にこれを行なおう．このとき保存則が弾性散乱だけを許すものと考えよう．ここで(72.2)のすべての中間状態は≪2粒子性≫である．それについての和は，両粒子の中間の運動量 p''_1，p''_2 についての積分と，スピン量子数（たとえば螺線度）——これを λ'' と置く——の和を意味している．すなわち

$$\sum_n = \int \frac{V^2 d^3 p''_1 d^3 p''_2}{(2\pi)^6} \sum_{\lambda''}$$

である．§65 で行なったのと同一の方法で δ-関数を消去し，≪2粒子性≫ユニタリー条

---

1) (72.1) の記号 δ_{fi} の具体的な意味は，具体的な量子数の選択，および系の波動関数の規格化に依存している．$\sum_f \delta_{if} = 1$ になるように定義する必要がある．

2) もしもユニタリー条件を（因子 S^+ と S の別の順序で）$S^+S = 1$ の形に書くと，(72.2) は同等な形

$$T_{fi} - T^*_{if} = i(2\pi)^4 \sum_n \delta^{(4)}(P_f - P_n)\, T^*_{nf} T_{ni} \tag{72.2a}$$

の形に表わされる．

件が

$$T_{fi}-T^*_{if}=\frac{iV_2}{(2\pi)^2}\sum_{\lambda''}\frac{|\boldsymbol{p}|}{\varepsilon}\int T_{fn}T^*_{in}\varepsilon''_1\varepsilon''_2\,do''$$

の形になる．ここで $\boldsymbol{p}$ は重心系の運動量，ε は全エネルギーである．(65.10) にしたがって振幅 T_{fi} から振幅 M_{fi} に移ると，規格化の体積はこの関係式から消えてしまう．すなわち

$$M_{fi}-M^*_{if}=\frac{i}{(4\pi)^2}\sum_{\lambda''}\frac{|\boldsymbol{p}|}{\varepsilon}\int M_{fn}M^*_{in}do'' \tag{72.4}$$

である．

$$d\sigma=|\langle \boldsymbol{n}'\lambda'|\mathrm{f}|\boldsymbol{n}\lambda\rangle|^2do' \tag{72.5}$$

になるように，弾性散乱の振幅を決めよう（$\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n}'$ は始めおよび終りの運動量の方向である．λ, λ' は始めおよび終りのスピン量子数である）．(65.19) とくらべて

$$\langle \boldsymbol{n}'\lambda'|f|\boldsymbol{n}\lambda\rangle=\frac{1}{8\pi\varepsilon}M_{fi} \tag{72.6}$$

であることが示され，ユニタリー条件 (72.4) はつぎの形になる．

$$\langle \boldsymbol{n}'\lambda'|\mathrm{f}|\boldsymbol{n}\lambda\rangle-\langle \boldsymbol{n}\lambda|\mathrm{f}|\boldsymbol{n}'\lambda'\rangle^*$$
$$=\frac{i|\boldsymbol{p}|}{2\pi}\sum_{\lambda''}\int\langle \boldsymbol{n}'\lambda'|\mathrm{f}|\boldsymbol{n}''\lambda''\rangle\langle \boldsymbol{n}\lambda|\mathrm{f}|\boldsymbol{n}''\lambda''\rangle^*do''. \tag{72.7}$$

これは非相対論的理論のよく知られた公式III (124.8) の一般化である．

終状態が始状態と一致している対角要素 T_{ii} を，角度 0 の弾性散乱振幅と呼ぶ[1]．この振幅に対してユニタリー条件 (72.2) はつぎの形をとる．

$$2\,\mathrm{Im}\,T_{ii}=(2\pi)^4\sum_n|T_{in}|^2\delta^{(4)}(P_i-P_n). \tag{72.8}$$

この等式の右辺は，与えられた始状態からのすべての可能な散乱過程の全断面積と，乗数因子だけを異にしている．この断面積を σ_t としよう．実際に，確率 (65.5) を状態 f について加え，流れの密度 j で割って

$$\sigma_t=\frac{(2\pi)^4V}{j}\sum_n|T_{in}|^2\delta^{(4)}(P_i-P_n)$$

1) S でなく T の行列要素を扱っていること，すなわち S から単位行列を引いたのちに，対角要素をとることを強調しよう．

を得る．したがって

$$\frac{2V}{j}\,\mathrm{Im}\,T_{ii}=\sigma_t$$

である．$T_{ii}=M_{ii}/(2\varepsilon_1 V\cdot 2\varepsilon_2 V)$（$\varepsilon_1$，$\varepsilon_2$ は重心系での粒子のエネルギー）の置き換えと，(65.17) からの j の代入ののちには規格化の体積は消えて

$$\mathrm{Im}\,M_{ii}=2|\boldsymbol{p}|\varepsilon\sigma_t \tag{72.9}$$

となる．この公式はいわゆる**光学定理**の内容をなしている．弾性散乱振幅 (72.6) を導入すると，その特別な形

$$\mathrm{Im}\langle\boldsymbol{n}\lambda|\,\mathrm{f}\,|\boldsymbol{n}\lambda\rangle=\frac{|\boldsymbol{p}|}{4\pi}\sigma_t \tag{72.10}$$

をとる（III (139.10) と比較せよ）．

S-行列が角運動量表示（部分振幅）で与えられるとすれば，その J についての直交性のために，ユニタリー条件は J の値ごとに別々に書かれる．

したがって，もしも弾性散乱だけが可能ならば，ユニタリー条件は

$$\sum_{\lambda''}\langle\lambda'|\mathrm{S}^J|\lambda''\rangle\langle\lambda|\mathrm{S}^J|\lambda''\rangle^*=\delta_{\lambda\lambda'} \tag{72.11}$$

の形をとる．T-不変性のために弾性散乱の行列は対称である（(70.10) 参照）．したがって対角形にもってくることができる．その後，ユニタリー条件は対角要素の絶対値が1に等しいことを要求する．このような場合に

$$S_n^J=\exp(2i\delta_{Jn}) \tag{72.12}$$

の形に書くのが普通である．ここで δ_{Jn} は実定数でエネルギーの関数である（添字 n は J の値が与えられたときの対角要素の番号を与える）．独立な振幅の数 N が（正方）行列 S^J の階数を越える一般の場合には，S^J を対角化する変換係数は J と E に依存する（この係数のなかに行列の主値と並んで，もとの N 個の量と同値な独立な量が含まれる）．しかしもしも N という数が行列 S^J の階数と（したがってその主値の数と）一致すれば，対角化の係数は普遍的なものである．この際対角状態は一定の偶奇性を持つ状態である（しかし，すでに一定の螺線度は持っていない）．

部分振幅 $\langle\lambda'|\mathrm{f}^J|\lambda\rangle$ を使って表わされた条件 (72.11) は

$$\langle\lambda'|\mathrm{f}^J|\lambda\rangle-\langle\lambda|\mathrm{f}^J|\lambda'\rangle^*=2i|\boldsymbol{p}|\sum_{\lambda''}\langle\lambda'|\mathrm{f}^J|\lambda''\rangle\langle\lambda|\mathrm{f}^J|\lambda''\rangle^* \tag{72.13}$$

の形をとる．これは (72.7) に展開 (69.13) を代入し，D- 関数の規格直交性を考慮して確かめられる．T- 不変性のときは行列 $\langle\lambda'|\mathrm{f}^J|\lambda\rangle$ は対称で，(72.13) は

$$\mathrm{Im}\langle\lambda'|\mathrm{f}^J|\lambda\rangle = |\boldsymbol{p}|\langle\lambda'|\mathrm{f}^J\mathrm{f}^{J+}|\lambda\rangle \tag{72.14}$$

の形をとる．もしも行列が対角化されれば，その対角要素は

$$f_n^J = \frac{1}{2i|\boldsymbol{p}|}(e^{2i\delta_{Jn}}-1) = \frac{1}{|\boldsymbol{p}|}e^{i\delta_{Jn}}\sin\delta_{Jn}. \tag{72.15}$$

最後に，CPT- 不変性の要求と一緒にしたユニタリー条件から起こる，若干の結果について触れよう．CPT- 不変性のために

$$T_{fi} = T_{\bar{i}\bar{f}} \tag{72.16}$$

である．ここで $\bar{i}$ および $\bar{f}$ はすべての粒子を反粒子に置き換える（また運動量を変えないで角運動量ベクトルの符号を変える）ことだけが，i および f と異なる状態である．特に対角要素は

$$T_{ii} = T_{\bar{i}\bar{i}}.$$

したがって (72.8) あるいは (72.9) から，(始状態が与えられたときの)すべての可能な過程の全断面積は，粒子間と反粒子間の反応に対しては同一である．

特に，粒子および反粒子の崩壊の全確率（すなわち寿命）は同じである．これらの結果は (粒子と反粒子の質量の等しいことと並んで——§11)，相互作用の CPT- 不変性の重要な結果である．崩壊の可能なチャネルのおのおのに対するこのような命題は，CP-不変性が守られることも要求するはずであることを思い起こそう (§70 末尾参照)．

問　題

ユニタリー条件から出発して，核子での π- 中間子の光生成 ($\gamma + N \longrightarrow \pi + N$) と，核子による π- 中間子の弾性散乱 ($\pi + N \longrightarrow \pi + N$) の部分振幅の位相のあいだの関係を見いだせ．このとき πN- 散乱は強い相互作用と，光生成と γN- 散乱は電磁的相互作用と結ばれていることを考慮する．

解　部分振幅を

$$\langle\pi N|\mathrm{S}|\gamma N\rangle = \mathrm{S}_{\pi\gamma},\quad \langle\gamma N|\mathrm{S}|\gamma N\rangle = \mathrm{S}_{\gamma\gamma},\quad \langle\pi N|\mathrm{S}|\pi N\rangle = \mathrm{S}_{\pi\pi}$$

と置く（添字 J と螺線度は落とした)．電荷 e について光生成は1次，γN- 散乱は2次の過程である．したがって $\mathrm{S}_{\pi\gamma} \sim e$，$\mathrm{S}_{\gamma\gamma} - 1 \sim e^2$ である．振幅 $\mathrm{S}_{\pi\pi}$ は微小量を含まな

い．$\sim e$ の項までの精度で条件（72.1）は

$$\mathrm{S}_{\pi\gamma}\mathrm{S}^*_{\gamma\gamma}+\mathrm{S}_{\pi\pi}\mathrm{S}^*_{\gamma\pi}\approx\mathrm{S}_{\pi\gamma}+\mathrm{S}_{\pi\pi}\mathrm{S}^*_{\gamma\pi}=0, \tag{1}$$

$$\mathrm{S}_{\pi\gamma}\mathrm{S}^*_{\pi\gamma}+\mathrm{S}_{\pi\pi}\mathrm{S}^*_{\pi\pi}\approx\mathrm{S}_{\pi\pi}\mathrm{S}^*_{\pi\pi}=1 \tag{2}$$

を与える（等式（2）の右辺の1は，スピン変数についての単位行列と考える必要がある）．T-不変性のために行列 $\mathrm{S}_{\pi\pi}$ は対称で，$\mathrm{S}_{\gamma\pi}=\mathrm{S}_{\pi\gamma}$ である．行列 $\mathrm{S}_{\pi\pi}$ を対角型になるように選ぼう．すなわち，一定の偶奇性を持つ π-中間子の状態に関してである．

このとき（2）から，対角要素は異なった定数 δ_π を持つ $e^{2i\delta_\pi}$ の形を持つことが出てくる．こののち（1）から行列 $\mathrm{S}_{\pi\gamma}$ の各要素に対して

$$\frac{\mathrm{S}_{\pi\gamma}}{\mathrm{S}^*_{\pi\gamma}}=-e^{2i\delta_\pi}$$

を得る．これから

$$\mathrm{S}_{\pi\gamma}=\pm|\mathrm{S}_{\pi\gamma}|ie^{i\delta_\pi}$$

となる．このようにして，（一定の偶奇性を持つ状態の）光生成の部分振幅の位相は，弾性散乱の位相によって決定される．

第8章　不変摂動論

§73. 経　時　積

相互作用が小さいと考えられる粒子間の衝突の際起こる種々の過程の確率は，摂動論を使って計算される．しかしながら，この摂動論の方法は，（非相対論的量子力学に対する）普通の形では，相対論的不変性の要求があらわな形をとらない欠陥を持っている．このような方法を相対論的問題に適用するとき，最終的な結果はこれらの要求を満たすかもしれないが，中間の式の非相対論的な形は，計算を非常に複雑なものにしている．この章は，これらの欠陥のない首尾一貫した相対論的摂動論の展開に費やされる．これはファインマンにより作られた（R. P. Feynman, 1948～49）．

系の第二量子化の記述を念頭に置いて，自由粒子の種々の状態の占有数《空間》における波動関数を Φ と置こう．系のハミルトニアンは $\mathrm{H} = \mathrm{H}_0 + \mathrm{V}$ である．ここで V は相互作用の演算子である．Φ_n を非摂動ハミルトニアンの固有関数としよう．そのおのおのは，すべての占有数のある一定値に対応している．任意の関数は展開 $\Phi = \sum C_n \Phi_n$ の形で表わされる．ここで正確な波動方程式

$$i\frac{\partial \Phi}{\partial t} = (\mathrm{H}_0 + \mathrm{V})\Phi \tag{73.1}$$

は係数 C_n に対する連立方程式の形で表わされる．

$$i\dot{C}_n = \sum_m C_m V_{nm} e^{i(E_n - E_m)t}. \tag{73.2}$$

ここで V_{nm} は演算子 V の時間に依存しない行列要素であり，E_n は非摂動系のエネルギー準位である（III，§40参照）．

その定義から，演算子 V はあらわには時間に依存しない．

$$V_{nm}(t) = V_{nm} e^{i(E_n - E_m)t} \tag{73.3}$$

という量は，時間に依存する演算子

$$\mathrm{V}(t) = e^{i\mathrm{H}_0 t}\mathrm{V}e^{-i\mathrm{H}_0 t} \tag{73.4}$$

の行列要素とみなすことができる．これを（もとの時間に依存しないシュレーディンガー演算子 V と区別して）**相互作用表示**の演算子と言う[1]．ここで記号 Φ を，新しい表示での波動関数として，方程式（73.2）を記号的に

$$i\dot{\Phi} = \mathrm{V}(t)\Phi \tag{73.5}$$

の形に書く．この表示での波動関数のすべての変化は，摂動の作用に結びついている．すなわち，粒子の相互作用のために起こる過程に対応している．

もしも $\Phi(t)$ と $\Phi(t+\delta t)$ を，二つの無限に近い時間での Φ の値とすれば，(73.5) によって，これらは互いに

$$\Phi(t+\delta t) = [1 - i\delta t\cdot\mathrm{V}(t)]\,\Phi(t) = e^{-i\delta t\cdot\mathrm{V}(t)}\Phi(t)$$

によって結ばれている．したがって任意の瞬間 t_f における Φ の値は，ある始めの瞬間 $t_i\,(t_f > t_i)$ の値を使って

$$\Phi(t_f) = \Big(\prod_i^f e^{-i\delta t_\alpha \mathrm{V}(t_\alpha)}\Big)\Phi(t_i) \tag{73.6}$$

のように表わされる．ここで記号 $\prod$ は t_i と t_f のあいだのすべての微小間隙 δt_α についての積の極限を意味している．もしも $V(t)$ が普通の関数ならば，この極限は単に

$$\exp\Big(-i\int_{t_i}^{t_f} V(t)\,dt\Big)$$

になる．しかしこのような帰結は，異なった時間の因子の可換性に基づいている．(すなわちこれは (73.6) の積から指数の和への移行の際に黙認されている)．演算子 $\mathrm{V}(t)$ に対してはこのような可換性はなく，普通の積分に帰することは不可能である．

(73.6) を記号的に

$$\Phi(t_f) = \mathrm{T}\exp\Big\{-i\int_{t_i}^{t_f}\mathrm{V}(t)\,dt\Big\}\,\Phi(t_i) \tag{73.7}$$

の形に書こう．ここで T は**経時演算子**[2] で，(73.6) の積の因子の順が，時間の一定の

---

1) 定義 (73.4) のなかに，非摂動ハミルトニアン H_0 が現われることを強調しよう．これによって，いわゆる演算子の**ハイゼンベルク表示**と異なっている．そこでは

$$\mathrm{V}^{\mathrm{H}}(t) = e^{i\mathrm{H}t}\mathrm{V}e^{-i\mathrm{H}t}$$

である（III，§13 参照）．

2) 時間反転の演算子とまちがえないこと！

(≪経時的≫) 順序であることを意味している*). 特に $t_i \to -\infty$, $t_f \to +\infty$ と置くと

$$\Phi(+\infty) = \mathrm{S}\Phi(-\infty). \tag{73.8}$$

ここで

$$\mathrm{S} = \mathrm{T}\exp\left\{-i\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{V}(t)\,dt\right\}. \tag{73.9}$$

波動方程式の形式的に厳密な解の記法 (73.7)～(73.9) の意味は，このような書き方だと容易に摂動の冪展開を表わす級数を書けることにある．すなわち

$$\mathrm{S} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k}{k!}\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dt_k \cdot \mathrm{T}\{\mathrm{V}(t_1)\mathrm{V}(t_2)\cdots\mathrm{V}(t_k)\} \tag{63.10}$$

である．ここでは k 乗冪の項はいずれも k 重積分の形に書かれ，演算子 T は変数 t_1, $t_2, \cdots, t_k$ の各領域で対応する演算子は，経時的順序と仮定する必要があることを意味している．すなわち，右から左への値の増大する順序である[1]．

定義 (73.8) から，もしも衝突するまで系が状態 Φ_i (自由粒子のある組) にあったとすると，その状態 Φ_f (自由粒子の他の組) への遷移確率振幅は行列要素 S_{fi} である．言いかえれば，この要素は S- 行列を形成する．

電磁的相互作用はすでに§43で書かれている．

$$\mathrm{V} = e\int (\mathrm{jA})\,d^3x. \tag{73.11}$$

これを (73.9) に代入して

$$\mathrm{S} = \mathrm{T}\exp\left\{-ie\int (\mathrm{jA})\,d^4x\right\} \tag{73.12}$$

を得る．演算子(73.12)が相対論的不変量であることが重要である．これは被積分式 (jA) がスカラーであること，d^4x の積分の不変性および経時化の演算子の不変性から見ることができる．しかしながら，最後の事情は説明の必要がある．

よく知られているように，二つの瞬間 t_1 および t_2 の順序 (差 $t_2 - t_1$ の符号) は，もしもこれらの時間が時間類似の間隔，すなわち $(x_2 - x_1)^2 > 0$ の世界点に関するものであれば，基準系のとり方によらない．このような場合には経時化の不変性は自動的であ

---

*) 経時積あるいは T- 積とする．

1) 展開 (73.10) を使った，相対論的摂動論の法則の導き方はダイソンによる (F. Dyson, 1949).

る．もしも $(x_2-x_1)^2<0$（空間類似の間隔）であれば，異なる基準系で $t_2>t_1$ にも $t_2<t_1$ にもなりうる[1]．しかし，このような2点は因果関係がありえない事件に対応している．したがって，これらの点に関する二つの物理量の演算子は非可換にはなりえないことは明らかである．すなわち，演算子の非可換性は，物理的には与えられた量の同時測定が不可能なことを意味し，これらの測定のあいだの物理的関係の存在を仮定している．したがって，積の経時性はこの場合にも不変のままである．なぜかというと，たとえローレンツ変換が時間の順序を壊しても，因子の可換性のために経時的順序にもどすことができるからである[2]．

この節で与えられた S-行列の定義は，自動的にユニタリー条件を満足することが容易にわかる．S を (73.6) に現われる経時積の形で表わし，V のエルミート性を考慮し，S^+ が経時的に逆順の因子 $\exp(i\delta t_\alpha\cdot V(t_\alpha))$（指数の符号も逆である）の積として表わされることがわかる．したがって，S および S^+ を掛けるとすべての因子は対になって縮約される．

演算子 S のユニタリー性が，この場合，ハミルトニアンのエルミート性によって保証されることに注目しよう．しかしユニタリー性の要求は実際には，述べられた定理の基礎にある前提よりもはるかに一般性を持っている．それは，ハミルトニアンおよび波動関数の概念を使わない量子力学的記述の際にも，満足されなければならない．

§74. 電子散乱に対するファインマン図形

どのようにして散乱の行列要素の計算が行なわれるかの具体的例を示そう．この例は不変摂動論の一般法則の，これから先の定式化を容易にする．

---

1) 時間類似および空間類似間隔の代りに，簡単のためにしばしば，それぞれ光円錐の内および外の領域と言われる．すなわち，点 x' から $(x-x')^2>0$ の距離だけ離れた点 x は，点 x' に頂点を持つ二つの円錐の内側にあり，$(x-x')^2<0$ の距離だけ離れた点はその円錐の外側にある．

2) 積 $V(t_1)V(t_2)\cdots\cdots$ に適用するとき，誤解を避けるために，この命題を明確にする必要がある．演算子 V 自身がゲージ不変でない（それは A とともに変わる）ので，因子 $V(t_1)$, $V(t_2)$, …… はポテンシャルのあるゲージで可換だが，他のゲージでは非可換であることがわかる．したがって，上で行なった主張は，光円錐外の $V(t_1)$ と $V(t_2)$ が可換になるような，ゲージの選択が可能であるというように定式化する必要がある．明らかに，この保留は S-行列の不変性には影響しない．なぜかと言うと，現実の物理量としての散乱振幅は，一般にポテンシャルのゲージには依存することはできない（形式的にはこの非依存性は §43 で指摘した作用積分のゲージ不変性からきている）．

電流演算子 j は2個の電子の波動関数の積を含んでいる．したがって，1次の摂動論では（始および終状態で）あわせて3個の粒子，すなわち2個の電子（演算子 j）と1個の光子（演算子A）が参加する過程だけが生じうる．しかしながら，このような遷移は自由粒子間では不可能であることがわかる．すなわち，エネルギーおよび運動量の保存則で禁止される．もしも p_1 および p_2 を電子の 4- 運動量，k を光子の 4- 運動量とすれば，4- 運動量の保存則は等式 $k = p_2 - p_1$ あるいは $k = p_2 + p_1$ で記述される．しかしながら，このような等式は不可能である．なぜかというと，光子に対しては $k^2 = 0$ であるが，平方 $(p_2 \pm p_1)^2$ はもちろん 0 と異なるからである．事実，電子のなかの一つの静止系で不変量 $(p_2 \pm p_1)^2$ の値を計算すると

$$(p_2 \pm p_1)^2 = 2(m^2 \pm p_1p_2) = 2(m^2 \pm \varepsilon_1\varepsilon_2 \mp \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2) = 2m(m \pm \varepsilon_2).$$

$\varepsilon_2 > m$ であるから

$$(p_2 + p_1)^2 > 0, \quad (p_2 - p_1)^2 < 0. \tag{74.1}$$

このようにして，S- 行列の最初の消えない（非対角）要素は2次の摂動でのみ現われる．これに関係するすべての過程は，(73.12) の式の展開の際に得られる2次の演算子に含まれる．すなわち

$$\mathrm{S}^{(2)} = -\frac{e^2}{2!}\iint d^4x d^4x' \cdot \mathrm{T}(\mathrm{j}^\mu(x)\,\mathrm{A}_\mu(x)\,\mathrm{j}^\nu(x')\,\mathrm{A}_\nu(x'))$$

である．電子と光子の演算子は互いに可換であるから，ここに現われる T- 積は二つの T- 積に分けることができる．

$$\mathrm{S}^{(2)} = -\frac{e^2}{2!}\iint d^4x d^4x' \cdot \mathrm{T}(\mathrm{j}^\mu(x)\,\mathrm{j}^\nu(x'))\,\mathrm{T}(\mathrm{A}_\mu(x)\,\mathrm{A}_\nu(x')). \tag{74.2}$$

最初の例として，2電子の弾性散乱を考察しよう．すなわち，始状態には 4- 運動量 p_1，p_2 を持った2電子，終状態には 4- 運動量 p_3，p_4 を持つ2電子である．またすべての電子が一定のスピン状態にあると考える．そして簡単のために，スピン変数の添字はいつも落としてある．

両方の状態に光子がないので，われわれに必要な光子の演算子の T- 積の行列要素は，対角要素 $\langle 0|\cdots\cdots|0\rangle$ である．ここで記号 $|0\rangle$ は光子の真空の状態に対応する．T- 積の真空における平均値は（添字 $\mu\nu$ の対ごとに），2点の座標 x および x' の一定の関数で

ある．このとき 4- 空間の一様性から，座標は差 $x-x'$ の形でのみ含まれうる．テンソル

$$D_{\mu\nu}(x-x') = i\langle 0|\mathrm{T}A_\mu(x)A_\nu(x')|0\rangle \tag{74.3}$$

を**光子の伝播関数**（あるいは**光子のプロパゲータ**）と呼ぶ．これの実際の計算は§77で行なわれるはずである．

電子の演算子の T- 積に対して，われわれは行列要素

$$\langle 34|\mathrm{T}j^\mu(x)j^\nu(x')|12\rangle \tag{74.4}$$

を計算する必要がある．記号 $|12\rangle$, $|34\rangle$ は対応する運動量を持った電子対の状態を表わす．この要素は明らかな等式

$$\langle 2|\mathrm{F}|1\rangle = \langle 0|a_2\mathrm{F}a_1^+|0\rangle$$

を使って，真空における平均値の形でも表わすことができる．ここで F は任意の演算子で，a_1^+ および a_2 はそれぞれ1番目の電子の生成と，2番目の電子の消滅の演算子である．したがって (74.4) の代りに

$$\langle 0|a_3a_4\mathrm{T}(j^\mu(x)j^\nu(x'))a_2^+a_1^+|0\rangle \tag{74.5}$$

という量を計算してもよい（簡単のために添字 1, 2, …… で p_1, p_2…… の代りをした）．

二つの電流演算子はおのおの積 $j=\bar{\psi}\gamma\psi$ であり，ψ- 演算子はおのおの和

$$\psi=\sum_p(a_p\psi_p+b_p^+\psi_{-p}),\quad \bar{\psi}=\sum_p(a_p^+\bar{\psi}_p+b_p\bar{\psi}_{-p}) \tag{74.6}$$

で表わされる（2番目の項は陽電子演算子を含み，これは与えられた場合には≪働かない≫）．したがって積 $j^\mu(x)j^\nu(x')$ はおのおのが二つの演算子 a_p と，二つの a_p^+ の積を含むような項の和の形で表わされる．これらの演算子は電子 1, 2 の消滅と電子 3, 4 の生成を保証するものである．言いかえれば，これは演算子 a_1, a_2, a_3^+, a_4^+ でなければならない．これは (74.5) の≪外側の≫演算子 a_1^+, a_2^+, a_3, a_4 と一緒に**まとめられ**，等式

$$\langle 0|a_pa_p^+|0\rangle = 1 \tag{74.7}$$

にしたがって縮約される．

どの ψ- 演算子から a_1, a_2, a_3^+, a_4^+ をとるかによって，(74.5) のなかに4項が生じる，すなわち

$$(74.5) = a_3a_4(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)(\bar{\psi}'\gamma^\nu\psi')a_2^+a_1^+ + a_3a_4(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)(\bar{\psi}'\gamma^\mu\psi')a_2^+a_1^+$$
$$+a_3a_4(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)(\bar{\psi}'\gamma^\nu\psi')a_2^+a_1^+ + a_3a_4(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)(\bar{\psi}'\gamma^\nu\psi')a_2^+a_1^+. \qquad (74.8)$$

ここで $\psi=\psi(x)$, $\psi'=\psi(x')$ である．弧線はまとめられるべき演算子をつないでいる．すなわち，これらのなかから (74.7) にしたがって縮約するために，a, a^+ が取り出される．これらの各項から演算子 a_1, a_2, …… をつぎつぎと交換することにより，共役演算子が対になって隣りあうように持ってくる ($a_1 a_1^+$ その他)．そのあとでその積の平均値は平均値 (74.7) の積になる．これらの演算子が，すべて反可換であることを考慮して (1, 2, 3, 4は異なる状態である！)[1] 行列要素 (74.4) は

$$\langle 34|Tj^\mu(x)j^\nu(x')|12\rangle = (\bar{\psi}_4\gamma^\mu\psi_2)(\bar{\psi}'_3\gamma^\nu\psi'_1) + (\bar{\psi}_3\gamma^\mu\psi_1)(\bar{\psi}'_4\gamma^\nu\psi'_2)$$
$$-(\bar{\psi}_3\gamma^\mu\psi_2)(\bar{\psi}'_4\gamma^\nu\psi'_1) - (\bar{\psi}_4\gamma^\mu\psi_1)(\bar{\psi}'_3\gamma^\nu\psi'_2) \qquad (74.9)$$

に等しいことがわかる．この和の共通の符号は条件づきで，(74.5) のなかの≪外側の≫電子演算子をわれわれがどう並べるかに依存する．この事情は，同一フェルミオンの散乱に対する行列要素の共通の符号は任意であることに対応している．(74.9)のなかの各項の相対的な符号は，もちろん外側の演算子の並べ方をどうするかには依存しない．

(74.9)の1および2行のなかの2項は，互いに添字 μ, ν と引数 x, x' の同時交換だけ異なっている．明らかにこのような交換は行列要素 (74.3) を変えない (このなかでは因子の順序はやはり記号 T によって確定される)．したがって，(74.3) と (74.9) を掛けたのち d^4xd^4x' で積分して，(74.9) の4項は対になって同じ結果を与える．したがって行列要素は

$$S_{fi} = ie^2\iint d^4xd^4x' \cdot D_{\mu\nu}(x-x')\{(\bar{\psi}_4\gamma^\mu\psi_2)(\bar{\psi}'_3\gamma^\nu\psi'_1) - (\bar{\psi}_4\gamma^\mu\psi_1)(\bar{\psi}'_3\gamma^\nu\psi'_2)\} \qquad (74.10)$$

となる (因子1/2! がなくなることに注意しよう)．

電子の波動関数は平面波 (65.8) である．したがって，波括弧のなかの式は

$$\{\cdots\cdots\} = (\bar{u}_4\gamma^\mu u_2)(\bar{u}_3\gamma^\nu u_1)\, e^{-i(p_2-p_4)x-i(p_1-p_3)x'}$$

---

1) この反可換性のために演算子 $j(x)$ および $j(x')$ は，今の場合 (行列要素を計算する際) 可換と考え，そして T-積の記号を落とすことができる．

$$-(\bar{u}_4\gamma^\mu u_1)(\bar{u}_3\gamma^\nu u_2)\,e^{-i(p_1-p_4)x-i(p_2-p_3)x'}$$

$$=\{(\bar{u}_4\gamma^\mu u_2)(\bar{u}_3\gamma^\nu u_1)\,e^{-i[(p_2-p_4)+(p_3-p_1)]\xi/2}$$

$$-(\bar{u}_4\gamma^\mu u_1)(\bar{u}_3\gamma^\nu u_2)\,e^{-i[(p_1-p_4)+(p_3-p_2)]\xi/2}\}\,e^{-i(p_1+p_2-p_3-p_4)X}$$

となる．ここで $X=(x+x')/2,\ \xi=x-x'$ である．$d^4x\,d^4x'$ についての積分は $d^4\xi\,d^4X$ についての積分に変わる．d^4X についての積分は δ-関数を与える（そのために $p_1+p_2=p_3+p_4$ になる)．つづいて行列 S から行列 M に移り（§65)，最終的に散乱振幅を得る．

$$M_{fi}=e^2\{(\bar{u}_4\gamma^\mu u_2)\,D_{\mu\nu}(p_4-p_2)\,(\bar{u}_3\gamma^\nu u_1)$$

$$-(\bar{u}_4\gamma^\mu u_1)\,D_{\mu\nu}(p_4-p_1)\,(\bar{u}_3\gamma^\nu u_2)\}. \tag{74.11}$$

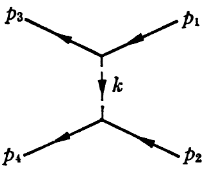
ここで運動量表示での光子の伝播関数が導入された．

$$D_{\mu\nu}(k)=\int D_{\mu\nu}(\xi)\,e^{ik\xi}\,d^4\xi. \tag{74.12}$$

振幅 (74.11) の 2 項はおのおの，いわゆる**ファインマン図形**の形で記号的に表わすことができる．

第 1 項は図形

$$e^2(\bar{u}_4\gamma^\mu u_2)\,D_{\mu\nu}(k)\,(\bar{u}_3\gamma^\nu u_1)=$$

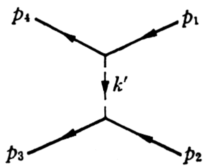


(74.13)

によって表わされる．線の交点（図形の頂点）は因子 γ からなる．頂点に向かっている≪入る≫実線は始めの電子に対応する．それは電子状態の双スピノール振幅 u からなる．頂点から出ている≪出る≫実線は終りの電子に対応し，これらの線に因子 $\bar{u}$ が対応する．図形を≪読む≫ときには，上記の因子は，実線に沿って矢印と反対方向への移動に対応する順序に左から右へと書かれる．両頂点は，一方の頂点で≪放出され≫他で≪吸収される≫**仮想的**（中間的）光子に対応する点線で結ばれる．この線は因子 $-iD_{\mu\nu}(k)$ からなる．仮想的光子の 4-運動量 k は≪頂点における 4-運動量の保存≫により決定される．すなわち，入る線および出る線の全運動量が等しいことによる．この場合には $k=$

$p_1 - p_3 = p_4 - p_2$ である[1]. 以下列挙した因子のほかに，図形は全体としてさらに共通因子 $(-ie)^2$ (冪指数は図中の頂点の数である) が付け加えられ，この形で iM_{fi} のなかの項に入ってくる．同様にして (74.11) の第2項は図形

$$e^2(\bar{u}_4\gamma^{\mu}u_1)\,D_{\mu\nu}(k')\,(\bar{u}_3\gamma^{\nu}u_2) = \qquad (74.14)$$



で表わされる (ここで $k' = p_1 - p_4 = p_3 - p_2$ である)[2].

始めおよび終りの粒子に対応する線を，図形の**外線**あるいは**自由端**と呼ぶ．図形(74.13)と (74.14) とは互いに二つの電子自由端 (p_3 および p_4) の交換だけが異っている．フェルミオンのこのような交換は図形の符号を変える．この規則は振幅 (74.11) のなかで2項が異なる符号で現われることに対応している．

今度は電子および陽電子の相互散乱を考察しよう．その始めの運動量をそれぞれ p_- および p_+，終りのを p'_- および p'_+ と置こう．

陽電子の生成および消滅演算子は，ψ-演算子 (74.6) のなかに電子の消滅および生成演算子とともに含まれる．前の場合には同時に二つの始めの粒子の消滅が演算子 ψ により，また二つの終りの粒子の生成は演算子 $\bar{\psi}$ によって保証されていたが，ここでは，これらの演算子の役割は電子と陽電子に関して逆である．したがって，始めの陽電子は共役関数 $\bar{\psi}(-p_+)$ により，終りの陽電子は関数 $\psi(-p'_+)$によって記述される(ここで 4-運動量は両方とも逆符号である)．これらの違いを考慮して，結局散乱振幅を得る[3].

---

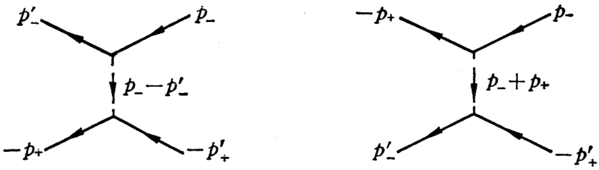
1) p_3 あるいは p_4 の端から図形を読み始めても違いはない．なぜかというと，このとき得られる式はテンソル $D_{\mu\nu}$ の対称性によって，互いに一致するからである．また仮想的光子の線の方向のとり方にも違いはない．なぜならば，方向の変化は k の符号の変化へ導くだけだからである．これは $D_{\mu\nu}(k)$ が偶関数であるので問題にならない (§77参照).

2) ファインマン図形は，運動量表示でのみならず，始めの座標表示においても，散乱振幅の項に対応して導入することができる (積分 (74.10))．このとき，電子振幅の役割は対応する座標の波動関数が演じる．また伝播関数も座標表示で表わされる．各項点は (74.10) の積分変数 (x あるいは x') の一つに対応する．一つの項点で交わる線に付け加えられる因子は，これらの変数の関数である．

3) 同一でない粒子の散乱に対して，振幅の共通符号は一義的である．これは，(74.5) のなかの《外側の》演算子は，二つの電子の演算子が端にくるように，すなわち ↗

$$M_{fi} = -e^2(\bar{u}(p'_-)\gamma^\mu u(p_-))\,D_{\mu\nu}(p_- - p'_-)\,(\bar{u}(-p_+)\gamma^\nu u(-p'_+))$$
$$+ e^2(\bar{u}(-p_+)\gamma^\mu u(p_-))\,D_{\mu\nu}(p_- + p_+)\,(\bar{u}(p'_-)\gamma^\nu u(-p'_+)). \quad (74.15)$$

この式の第1および第2項は，つぎのような図形によって表わされる．



(74.16)

図形の作り方は陽電子に関する部分だけが変わった．前と同様に，入る実線は因子 u，出るのは $\bar{u}$ からなる．しかし今度は入る線は終りの，出る線は始めの陽電子に対応する．そしてこのときすべての陽電子の運動量は逆符号を持つ．

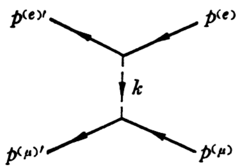
二つの図形 (74.16) の異なる性質に注目しよう．左の図形では頂点の一つで始めおよび終りの電子線が交わり，他の頂点では陽電子に対して同じことになっている．右の図形では，頂点のどちらでも始めおよび終りどおしの電子および陽電子線が交わっている．上の頂点で仮想的光子の放出を伴った対消滅が起こり，下の頂点では光子による対生成が起こる．

この相違は両図形における仮想的光子の性質に反映している．左の図形（≪散乱型≫図形）では，仮想的光子の 4-運動量は二つの電子（あるいは陽電子）の運動量の差に等しい．したがって $k^2 < 0$ ((74.1) を見よ)．右の図形（≪消滅型≫）では $k' = p_- + p_+$ で，したがって $k'^2 > 0$ である．これに関連して $k^2 = 0$ である現実の光子と違って，仮想的光子に対してはいつも $k^2 \neq 0$ であることに注目しよう．

もしも衝突粒子が同一でなく，また粒子と反粒子でなければ（たとえば電子と μ-中間子)，散乱振幅はただ一つの図形

↘　　$\langle 0|a'b' \cdots\cdots b^+a^+|0\rangle$

のように（あるいは両方が真中にくるように）配置されなければならないことから決められる．これらの条件は，始めおよび終りの真空状態の≪同一符号≫を保証するものである．振幅の共通符号は非相対論的極限で確かめることができる．すなわち，われわれは先へいって（§82)，この極限で (74.15) の第2項は0に，第1項はラザフォード散乱のボルン近似に近づくことを見るだろう．



(74.17)

で表わされる．この場合には消滅型および交換型の図形は不可能である．われわれは，この結果を解析的に求めることができる．すなわち，電流演算子を電子と μ-中間子の電流の和

$$\mathrm{j} = \mathrm{j}^{(e)} + \mathrm{j}^{(\mu)} = (\bar{\phi}^{(e)}\gamma\phi^{(e)}) + (\bar{\phi}^{(\mu)}\gamma\phi^{(\mu)})$$

と書いて，積 $\mathrm{j}^{(\mu)}(x)\,\mathrm{j}^{(\nu)}(x')$ のなかから，必要な粒子の消滅生成を起こす項の行列要素をとればよい．

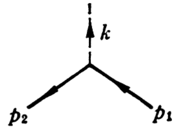
この節の始めに示したように，4-運動量の保存則から禁じられている1次の過程へもどろう．演算子

$$\mathrm{S}^{(1)} = -ie\int \mathrm{j}(x)\,\mathrm{A}(x)\,d^4x \tag{74.18}$$

のこれらの遷移に対する行列要素は，三つの現実の粒子，すなわち2個の電子と1個の光子の《同一点 x における》生成および消滅演算子に対応している．これらは点 x における演算子 $\phi(x)$，および $\bar{\phi}(x)$ をまとめた結果として生じ，(たとえば光子の放出に対し)

$$S_{fi} = -ie\int \bar{\psi}_2(x)\,\psi_1(x)\,\hat{A}^*(x)\,d^4x$$

の形の積分で定義され，被積分関数のなかに0と異なる指数を持つ因子 $\exp[-i(p_1-p_2-k)x]$ があるために0になる．図形からこれは，三つの自由端の図形



(74.19)

が0になることを意味している．

この理由から，（始および終状態に）６粒子が参加するような２次の過程は不可能である．これに対応する遷移の行列要素のなかで，$d^4x\,d^4x'$ についての積分は，同一点の三つの波動関数の積の d^4x および d^4x' の，０になる二つの積分の積に分解される．言いかえれば，対応する図形は二つの独立な (74.19) の型の図形に分解されるわけである．

§75. 光子の散乱に対するファインマン図形

他の２次効果，すなわち電子による光子の散乱（**コンプトン効果**）を考察しよう．光子と電子が始状態で 4-運動量 k_1 と p_1，また終状態では k_2 と p_2（および簡単のために書かない一定の偏り）を持つとしよう．

光子の行列要素は

$$\langle 2|\mathrm{T}(\mathrm{A}_\mu(x)\mathrm{A}_\nu(x'))|1\rangle=\langle 0|\mathrm{c}_2\mathrm{T}(\mathrm{A}_\mu(x)\mathrm{A}_\nu(x'))\mathrm{c}_1^+|0\rangle. \qquad (75.1)$$

ここで

$$\mathrm{A}=\sum_k(\mathrm{c}_k A_k+\mathrm{c}_k^+A_k^*).$$

外側と内側の演算子をまとめると，(75.1) はつぎのようになる．

$$(75.1)=\mathrm{c}_2\mathrm{A}_\mu\mathrm{A}'_\nu\mathrm{c}_1^+ + \mathrm{c}_2\mathrm{A}_\mu\mathrm{A}'_\nu\mathrm{c}_1^+ = A_{2\mu}^*A'_{1\nu}+A_{1\mu}A_{2\nu}^{*\prime} \qquad (75.2)$$

（このとき演算子 c_1，c_2^+ の可換性を考慮した．このためにこの場合には記号 T は落とされた）．

電子の行列要素は

$$\langle 2|\mathrm{T}(\mathrm{j}^\mu(x)\mathrm{j}^\nu(x'))|1\rangle=\langle 0|\mathrm{a}_2\mathrm{T}[(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)(\bar{\psi}'\gamma^\nu\psi')]\mathrm{a}_1^+|0\rangle. \qquad (75.3)$$

このなかに四つの ψ-演算子が現われる．これらのなかの二つだけが電子１の消滅と電子２の生成にあたる．すなわち演算子 a_1^+ と a_2 とともにまとめられる．これらは演算子 $\bar{\psi}'$，ψ あるいは ψ'，$\bar{\psi}$ であってもよい（しかし ψ，$\bar{\psi}$，あるいは ψ'，$\bar{\psi}'$ ではない．すなわち同一点 x および x' において二つの現実の電子および，それに伴った現実の光子の生成および消滅は０に等しい式を与える）．二つの方法でまとめて，行列要素 (75.3) のなかに二つの項を得る．始めに $t>t'$ の仮定でこれを書くと，(75.3) はつぎのようになる．

$$a_2(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)(\bar{\psi}'\gamma^\nu\psi')a_1^+ + a_2(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)(\bar{\psi}'\gamma^\nu\psi')a_1^+ \qquad (75.4)$$

第1項では演算子

$$a_2\bar{\psi} \longrightarrow a_2a_2^+\bar{\psi}_2, \quad \psi' a_1^+ \longrightarrow a_1a_1^+\psi'_1$$

がまとめられる．演算子 $a_2a_2^+$ および $a_1a_1^+$ は対角型でかつ積の端にあるから，真空でのその平均値，すなわち1に置き換えられる．(75.4)の第2項の同様な変形のためにまず演算子 a_1^+ を左へ，a_2 を右へ≪引っぱる≫必要がある．これは演算子 a_p, a_p^+ の交換則を使って行なわれる．これによって

$$\left.\begin{aligned} \{a_p,\ \psi\}_+ &= \{a_p^+,\ \bar{\psi}\}_+ = 0, \\ \{a_p,\ \bar{\psi}\}_+ = \bar{\psi}_p, &\quad \{a_p^+,\ \psi\}_+ = \psi_p. \end{aligned}\right\} \qquad (75.5)$$

この結果 (75.4) の式は

$$\langle 0|(\bar{\psi}_2\gamma^\mu\psi)(\bar{\psi}'\gamma^\nu\psi'_1) - (\bar{\psi}\gamma^\mu\psi_1)(\bar{\psi}'_2\gamma^\nu\psi')|0\rangle, \quad t > t' \qquad (75.6)$$

の形に変形される（もちろん，平均は演算子因子に対してのみ行なわれる）．同様にして $t < t'$ のとき，ダッシュおよび μ, ν の交換だけが異なっている式を得る．

$$\langle 0| - (\bar{\psi}'\gamma^\nu\psi'_1)(\bar{\psi}_2\gamma^\mu\psi) + (\bar{\psi}'_2\gamma^\nu\psi')(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi_1)|0\rangle, \quad t < t'. \qquad (75.7)$$

二つの式 (75.6) および (75.7) は，定義

$$T\psi_i(x)\bar{\psi}_k(x') = \begin{cases} \psi_i(x)\bar{\psi}_k(x'), & t'<t; \\ -\bar{\psi}_k(x')\psi_i(x), & t'>t. \end{cases} \qquad (75.8)$$

にしたがって ψ-演算子の経時積を導入すると，一つの形に書くことができる (i, k は双スピノールの添字である)．このとき (75.6)，(75.7) の第1および第2項は一つの記法にまとめられる．

$$\bar{\psi}_2\gamma^\mu\langle 0|T\psi\cdot\bar{\psi}'|0\rangle\gamma^\nu\psi'_1 + \bar{\psi}'_2\gamma^\nu\langle 0|T\psi'\cdot\bar{\psi}|0\rangle\gamma^\mu\psi_1 \qquad (75.9)$$

($\psi\cdot\bar{\psi}$ は行列 $\psi_i\bar{\psi}_k$ を意味する)．

自然に出てきた定義 (75.8) のなかで $t < t'$ および $t > t'$ で演算子の積が異なる符号をとることに注目しよう．この点がわれわれが演算子 A および j に対して使った T-積の定義と違っている．この違いの原因はフェルミオンの演算子 ψ, $\bar{\psi}$ が（ボソンの演算子 A，およびまた双1次演算子 $j = \bar{\psi}\gamma\psi$ と違って）光円錐のそとで反可換であることに関係

がある[1]. それにより定義 (75.8) の相対論的不変性が保証される (ϕ-演算子の交換則の形式的な証明は§76で与えられる)[2].

定義

$$G_{ik}(x-x') = -i\langle 0|\mathrm{T}\phi_i(x)\bar{\phi}_k(x')|0\rangle \tag{75.10}$$

にしたがって，**電子の伝播関数** (あるいは**電子のプロパゲータ**)，すなわち，2階の双スピノール $G_{ik}(x-x')$ を導入しよう．

このとき電子の行列要素は

$$\langle 2|\mathrm{T}j^{\mu}(x)\,j^{\nu}(x')|1\rangle = i\bar{\psi}_2\gamma^{\mu}G\gamma^{\nu}\psi_1' + i\bar{\psi}_2'\gamma^{\nu}G\gamma^{\mu}\psi_1. \tag{75.11}$$

光子の行列要素 (75.1) を掛けたのち，(75.11) のなかの2項の d^4xd^4x' についての積分は，同じ結果を与える．したがって，次式が得られる．

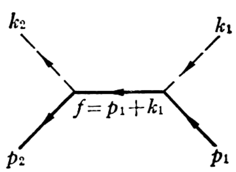
$$S_{fi} = -ie^2\iint d^4xd^4x'\bar{\psi}_2(x)\gamma^{\mu}G(x-x')\gamma^{\nu}\psi_1(x') \times \{A_{2\mu}^*(x)A_{1\nu}(x') + A_{2\nu}^*(x')A_{1\mu}(x)\}. \tag{75.12}$$

電子と光子の波動関数に平面波 (65.8)，(65.9) を代入し，(74.10) に対して行なったように δ-関数を分離し，最終的な散乱振幅として次式を得る．

$$M_{fi} = -4\pi e^2\bar{u}_2\{\hat{e}_2^*G(p_1+k_1)\hat{e}_1 + \hat{e}_1G(p_1-k_2)\hat{e}_2^*\}u_1. \tag{75.13}$$

ここで e_1, e_2 は光子の偏りの 4-ベクトルで，$G(p)$ は運動量表示での電子の伝播関数である．

この式のなかの2項はつぎのようなファインマン図形で表わされる．

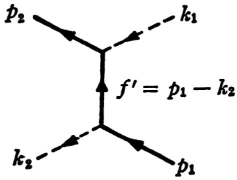
$4\pi e^2\bar{u}_2\hat{e}_2^*G(f)\hat{e}_1u_1 =$ 

1) ϕ-演算子自身はなんらかの観測可能な物理量に対応しない．したがって光円錐外で可換である必要はないことを思い起こそう．

2) 任意の数の ϕ-演算子の T-積を同様に定義することができる．これは時間の増大する順に右から左へと並べた，これらすべての演算子の積に等しい．このとき符号は，T-積の記号の下に示された順序から，この順にするために必要な置換の偶奇性によって定義されるものとする．この定義に対応して，T-積の符号は，任意の二つの ϕ-演算子の交換ごとに変わることになる．たとえば

$$\mathrm{T}\phi_i(x)\bar{\phi}_k(x') = -\mathrm{T}\bar{\phi}_k(x')\phi_i(x).$$

$$4\pi e^2 \bar{u}_2 \hat{e}_1 G(f') \hat{e}_2^* u_1 = \qquad (75.14)$$



図形の点線の自由端は，現実の光子に対応する．入る線（始めの光子）は因子 $\sqrt{4\pi}\, e$ からなり，出る線（終りの光子）は因子 $\sqrt{4\pi}\, e^*$ からなる．ここで e は偏りの 4-ベクトルである．1 番目の図形では始めの光子が始めの電子とともに吸収され，終りの光子は終りの電子とともに放出される．2 番目の図形では，終りの光子の放出が始めの電子の消滅とともに起こり，始めの光子の吸収が終りの電子の生成とともに起こる．

（両頂点を結ぶ）内側の実線は仮想的電子に対応し，その 4-運動量は頂点における 4-運動量の保存則から決定される．現実の粒子の 4-運動量と違って，仮想的電子の 4-運動量は m^2 に等しくない．たとえば不変量 f^2 を電子の静止系で観測し，容易に

$$f^2 = (p_1 + k_1)^2 > m^2, \quad f'^2 = (p_1 - k_2)^2 < m^2 \qquad (75.15)$$

であることがわかる．

§76. 電子の伝播関数

前節で導入された伝播関数（プロパゲータ）の概念は，量子電気力学の道具として基本的な役割を演じる．光子の伝播関数 $D_{\mu\nu}$ は 2 電子の相互作用を特長づける基本的な量である．電子の散乱振幅のなかでの位置に，その役割がはっきりと現われている．そこで $D_{\mu\nu}$ は 2 粒子の遷移電流に掛けられる．電子と光子との相互作用のなかでは，電子の伝播関数が同様な役割を演じる．

今は電子の場合から始めて，実際に伝播関数の計算を行なおう．

関数

$$G_{ik}(x - x') = -i\langle 0 | \mathrm{T}\psi_i(x)\bar{\psi}_k(x') | 0\rangle \qquad (76.1)$$

（i, k は双スピノール添字）に演算子 $\hat{\mathrm{p}} - m$ を作用させよう．ここで $\mathrm{p}_\mu = i\partial_\mu$ である．$\psi(x)$ はディラック方程式 $(\hat{\mathrm{p}} - m)\psi(x) = 0$ を満足するので，われわれは結果として $t = t'$ の点を除いたすべての点 x で 0 を得る．事実 $G\,(x - x')$ は，$t \longrightarrow t' + 0$ および $t \longrightarrow t' - 0$ のときに，異なる極限に近づくことになる．すなわち定義 (75.8) にしたがって，これらの極限はそれぞれ

$$-i\langle 0|\psi_i(\mathbf{r},t)\bar{\psi}_k(\mathbf{r}',t)|0\rangle \quad \text{および} \quad +i\langle 0|\bar{\psi}_k(\mathbf{r}',t)\psi_i(\mathbf{r},t)|0\rangle$$

であり，光円錐上で一致しないことがわかる．これは微係数 $\partial G/\partial t$ に δ-関数を持つ付加項の出現をもたらす．すなわち

$$\frac{\partial G}{\partial t} = -i\langle 0|\mathrm{T}\frac{\partial\psi_i(x)}{\partial t}\bar{\psi}_k(x')|0\rangle + \delta(t-t')\,(G|_{t\to t'+0} - G|_{t\to t'-0}). \quad (76.2)$$

したがって，演算子 $\hat{p}-m$ のなかに，t についての微係数は $i\gamma^0\partial/\partial t$ の形で現われることに注意すると

$$(\hat{p}-m)_{ik}G_{kl}(x-x') = \delta(t-t')\gamma^0_{ik}\langle 0|\{\psi_k(\mathbf{r},t),\bar{\psi}_l(\mathbf{r}',t)\}_+|0\rangle. \quad (76.3)$$

ここに現われる反交換積を計算しよう．演算子 $\psi(\mathbf{r},t)$ および $\bar{\psi}(\mathbf{r}',t)$ を掛け((74.6)参照)，フェルミオン演算子 a_p, b_p に対する交換関係を考慮し

$$\{\psi_i(\mathbf{r},t),\ \bar{\psi}_k(\mathbf{r}',t)\}_+ = \sum_p [\psi_{pi}(\mathbf{r})\bar{\psi}_{pk}(\mathbf{r}') + \psi_{-pi}(\mathbf{r})\bar{\psi}_{-pk}(\mathbf{r}')] \quad (76.4)$$

を見いだす．ここで $\psi_{\pm p}(\mathbf{r})$ は時間因子のない波動関数である（§74，§75 と同様に簡単のために偏りの添字は書いてない）．しかし関数 $\psi_{\pm p}(\mathbf{r})$，すなわち電子の波動関数全部の集まりは規格完全系をなしている．そしてこのような系の一般的性質にしたがって（III (5.12) を見よ）

$$\sum_p [\psi_{pi}(\mathbf{r})\psi^*_{pk}(\mathbf{r}') + \psi_{-pi}(\mathbf{r})\psi^*_{-pk}(\mathbf{r}')] = \delta_{ik}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \quad (76.5)$$

等式 (76.4) の右辺の和は上記のと，ψ^*_k と $(\psi^*\gamma^0)_k$ の置き換えだけが異なっている．そして $\gamma^0_{ik}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ に等しい．このようにして

$$\{\psi_i(\mathbf{r},t),\ \bar{\psi}_k(\mathbf{r}',t)\}_+ = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\gamma^0_{ik}. \quad (76.6)$$

この等式から特に，すでに§75で触れた演算子 ψ と $\bar{\psi}$ の光円錐上での反可換性の命題が出てくる．$(x-x')^2<0$ のときは，$t=t'$ であるような基準系がつねに存在する．もしもこのとき $\mathbf{r}\neq\mathbf{r}'$ であれば，反交換積 (76.6) は実際に 0 に等しい．(76.6) を (76.3) に代入し（双スピノール添字を落として）最終的に[1]

$$(\hat{p}-m)\,G(x-x') = \delta^{(4)}(x-x'). \quad (76.7)$$

このようにして，電子の伝播関数は右辺に δ-関数を持つディラック方程式を満足する．言いかえれば，数学的観点からこれはディラック方程式に対するグリーン関数である．

---

1) 双スピノール添字をあらわに書くと

$$(\hat{p}-m)_{il}G_{lk}(x-x') = \delta^{(4)}(x-x')\delta_{ik}. \quad (76.7a)$$

先へいってわれわれは関数 $G(\xi)\,(\xi = x - x')$ 自身ではなく，そのフーリエ成分

$$G(p) = \int G(\xi)\,e^{ip\xi}\,d^4\xi \tag{76.8}$$

を扱わねばならない（運動量表示の伝播関数）．(76.7) の両辺のフーリエ成分をとり，$G(p)$ が連立代数方程式

$$(\hat{p} - m)\,G(p) = 1 \tag{76.9}$$

を満足することがわかる．

この系の解は

$$G(p) = \frac{\hat{p} + m}{p^2 - m^2}. \tag{76.10}$$

$G(p)$ のなかの 4-ベクトル p の 4 成分は（関係式 $p^2 \equiv p_0^2 - \boldsymbol{p}^2 = m^2$ により結ばれない）独立変数である．(76.10) の分母を $p_0^2 - (\boldsymbol{p}^2 + m^2)$ の形に書いて，$\boldsymbol{p}^2$ が与えられたとき $G(p)$ は p_0 の関数として二つの極を持つことがわかる．すなわち $\varepsilon = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$ として $p_0 = \pm\varepsilon$ である．積分

$$G(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{-ip\xi}G(p)\,d^4p = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3p\cdot e^{i\boldsymbol{pr}}\int dp_0\cdot e^{-ip_0\tau}\,G(p) \tag{76.11}$$

$(\tau = t - t')$ のなかの dp_0 についての積分にあたっては，したがって二つの極を迂回する方法の問題が生じる．この方法を示すことなしには，(76.10) の式は本質的には定義されない．

この問題を明らかにするために，もとの定義 (76.1) にもどろう．(74.6) の和の形の ψ-演算子をこれに代入し，このとき 0 と異なる真空での平均は，ただつぎのような生成および消滅演算子の積からだけであることを注意する．すなわち

$$\langle 0|\mathrm{a}_{\boldsymbol{p}}\mathrm{a}^+_{\boldsymbol{p}}|0\rangle = 1, \quad \langle 0|\mathrm{b}_{\boldsymbol{p}}\mathrm{b}^+_{\boldsymbol{p}}|0\rangle = 1$$

（真空状態にはいかなる粒子もないので，演算子 $\mathrm{a}_{\boldsymbol{p}}$ あるいは $\mathrm{b}_{\boldsymbol{p}}$ によって粒子が≪消滅する≫前に，演算子 $\mathrm{a}^+_{\boldsymbol{p}}$ あるいは $\mathrm{b}^+_{\boldsymbol{p}}$ によりそれを≪生成する≫必要がある）．

$$t - t' > 0 \text{ のとき} \quad G_{ik}(x - x') = -i\sum_{p}\psi_{pi}(\boldsymbol{r}, t)\,\bar{\psi}_{pk}(\boldsymbol{r}', t') = -i\sum_{p} e^{-i\varepsilon(t-t')}\psi_{pi}(\boldsymbol{r})\bar{\psi}_{pk}(\boldsymbol{r}') \tag{76.12}$$

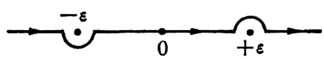
$$t - t' < 0 \text{ のとき} \quad G_{ik}(x - x') = i\sum_{p}\bar{\psi}_{-pk}(\boldsymbol{r}', t')\psi_{-pi}(\boldsymbol{r}, t) = i\sum_{p} e^{i\varepsilon(t-t')}\psi_{-pi}(\boldsymbol{r})\bar{\psi}_{-pk}(\boldsymbol{r}')$$

を得る（$t>t'$ のとき電子だけの，$t<t'$ のときは陽電子だけの項が G に寄与する）．

$\boldsymbol{p}$ についての和を d^3p についての積分に置き換えて表わし，(76.12) と (76.11) をくらべると，積分

$$\int e^{-ip_0\tau}G(p)\,dp_0 \tag{76.13}$$

が $\tau>0$ のときは因子 $e^{-i\varepsilon\tau}$，$\tau<0$ のときは $e^{i\varepsilon\tau}$ を持たねばならないことがわかる．もしも極 $p_0=\varepsilon$ および $p_0=-\varepsilon$ をそれぞれ上と下から迂回する（複素変数 p_0 の平面で）と定めれば，これらを満足させる．すなわち



(76.14)

となる．実際に $\tau>0$ のときは下半平面で無限遠の半円で積分路を閉じよう．したがって，積分 (76.13) は極 $p_0=+\varepsilon$ の留数で与えられる．そして $\tau<0$ のときは積分路を上半平面で閉じる．したがって，積分は極 $p_0=-\varepsilon$ の留数で決定される．両方の場合に要求される結果が得られる．

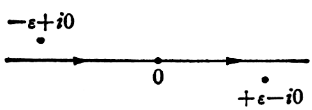
この迂回の規則（ファインマンの規則）は，別の様式で定式化することができる．積分は実軸全体に沿って行なうが，粒子の質量に無限小の虚部を加える．すなわち

$$m\longrightarrow m-i0 \tag{76.15}$$

である．実際にはこのとき

$$\varepsilon\longrightarrow\sqrt{\boldsymbol{p}^2+(m-i0)^2}=\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2-i0}=\varepsilon-i0$$

となる．言いかえれば，極 $p_0=\pm\varepsilon$ が実軸から下および上にずれるわけである．すなわち



(76.16)

となり，この軸に沿う積分は (76.14) の経路に沿う積分と同等である[1]．規則 (76.15) を考慮して伝播関数 (76.10) は

---

1) 極をずらす規則は，$G(x-x')$ が $|t-t'|$ について無限小の減衰をすることに対応していることに気付くと便利である．

$$G(p) = \frac{\hat{p} + m}{p^2 - m^2 + i0} \tag{76.17}$$

の形に書くことができる.

極の移動の際の積分の規則はつぎの関係式で示される.

$$\frac{1}{x + i0} = \mathrm{P}\frac{1}{x} - i\pi\delta(x). \tag{76.18}$$

これは，何かある関数 $f(x)$ を掛けて積分すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x + i0}\,dx = \mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x}\,dx - i\pi f(0) \tag{76.19}$$

になる意味に理解する必要がある（ここで記号 P は主値を意味する).

グリーン関数 (76.10) は双スピノール因子 $\hat{p} + m$ とスカラー

$$G^{(0)}(p) = \frac{1}{p^2 - m^2} \tag{76.20}$$

の積として表わされる. 対応する座標の関数 $G^{(0)}(\xi)$ は，明らかに方程式

$$(\mathrm{p}^2 - m^2) G^{(0)}(x - x') = \delta^{(4)}(x - x') \tag{76.21}$$

の解である. すなわち，方程式 $(\mathrm{p}^2 - m^2)\phi = 0$ のグリーン関数である. この意味で $G^{(0)}(x - x')$ はスカラー粒子の伝播関数であるということができる.（上の計算と同様な）計算によって，スカラー場の伝播関数は ϕ-演算子 (11.2) を使って，定義 (76.1) に似た公式

$$G^{(0)}(x - x') = -i\langle 0 | \mathrm{T}\phi(x)\phi^{+}(x') | 0\rangle \tag{76.22}$$

によって表わされることを容易に証明できる. この際，経時積は（すべてのボソン演算子に対するように）つぎのように定義される.

$$\mathrm{T}\phi(x)\phi^{+}(x') = \begin{cases} \phi(x)\phi^{+}(x'), & (t > t') \\ \phi^{+}(x')\phi(x), & (t < t') \end{cases}$$

($t>t'$ および $t<t'$ のときの符号は同じである).

§77. 光子の伝播関数

これまでのところ（§43, §75 で)，現実の光子の数の変化に関する行列要素を求めるときに，あらわな形で電磁場の演算子 A を使ってきた. この目的のためには §2 に記述

された自由場のポテンシャルを，横波の平面波による展開の形で表わせば十分であった．

しかしながら，このような表わし方はそれ自身任意の場の完全な記述を与えない．これは古典電磁場での同様な立場からも明らかである．すなわち，(電荷の存在する)任意の場は横波で展開することはできないからである．(条件 $\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0$ にしたがうベクトル・ポテンシャルで記述される) 場の横波部分のほかに，スカラー・ポテンシャル Φ で記述される，静クーロン場もまた存在する[1]．

このようにして，われわれは本質的に演算子 A の完全な定義をいまだ持っていない．そしてそれなしには公式

$$D_{\mu\nu}(x-x') = i\langle 0 \mid \mathrm{T}\mathrm{A}_\mu(x)\,\mathrm{A}_\nu(x') \mid 0\rangle \tag{77.1}$$

にしたがって光子の伝播関数の直接の計算は不可能である．他面ポテンシャルのゲージ非一義性は，完全な量子電磁力学のために導入しなければならない，この演算子の物理的意味をいちじるしく損なっている．

しかしながら，この困難は形式的なもので物理的なものでない．それはすでに相対論的およびゲージ不変性の要求から明らかな，伝播関数のある一般的性質を使って避けることができる．

4-ベクトル $\xi = x - x'$ だけに依存する2階のテンソルの最も一般的な形は

$$D_{\mu\nu}(\xi) = g_{\mu\nu} D(\xi^2) - \partial_\mu \partial_\nu D^{(l)}(\xi^2) \tag{77.2}$$

である．ここで D, $D^{(l)}$ は ξ^2 のスカラー関数である[2]．テンソルが自動的に対称であることを指摘しよう．

したがって運動量表示では

$$D_{\mu\nu}(k) = D(k^2) g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu D^{(l)}(k^2) \tag{77.3}$$

となる．ここで $D(k^2)$，$D^{(l)}(k^2)$ は関数 $D(\xi^2)$，$D^{(l)}(\xi^2)$ のフーリエ成分である．

物理量，すなわち散乱振幅のなかに，光子の伝播関数は2電子の遷移電流を掛けられ

---

1) $\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0$ の条件のとき，マクスウェル方程式は $\boldsymbol{A}$ および φ に対するつぎのような方程式に帰する．

$$\Box \boldsymbol{A} = -4\pi \boldsymbol{j} + \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad \Delta \Phi = -4\pi\rho.$$

ここで $\boldsymbol{A}$ は (斉次方程式 $\Box \boldsymbol{A} = 0$ の解の) 横波で展開することができる．ポテンシャル Φ は静的なポアッソン方程式を満足する．

2) これらの関数は引数の値の三つの領域で異なり，ローレンツ変換では互いに移りえない．すなわち，光円錐の外 ($\xi^2 < 0$) と，光円錐の上の錐 ($\xi^2 > 0$, $\xi_0 > 0$) と，下の錐 ($\xi^2 > 0$, $\xi_0 < 0$) とである．

て，すなわち $j_{21}^{\mu} D_{\mu\nu} j_{43}^{\nu}$ の形で現われる（たとえば（74.13）参照）．しかし電流の保存（$\partial_{\mu} j^{\mu} = 0$）のためにその行列要素 $j_{21} = \bar{\psi}_2 \gamma \psi_1$ は 4-横波の条件

$$k_{\mu}(j^{\mu})_{21} = 0 \tag{77.4}$$

を満足する．ここで $k = p_2 - p_1$ である（(43.13) を見よ）．したがって，置き換え

$$D_{\mu\nu} \longrightarrow D_{\mu\nu} + \chi_{\mu} k_{\nu} + \chi_{\nu} k_{\mu} \tag{77.5}$$

に際して，すこしも物理的結果を変えないことは明らかである．ここで χ_{μ} は k および k_0 の任意関数である．$D_{\mu\nu}$ の選択のこの任意性は，場のポテンシャルのゲージにおける任意性と対応している．

任意のゲージ変換（77.5）は，（もしも量 χ_{μ} が 4-ベクトルを形成しなければ）（77.3）で仮定された $D_{\mu\nu}$ の相対論的不変な形を壊すことができる．しかし伝播関数の相対論的不変形式の枠内にとどまると，（77.3）での関数 $D^{(l)}(k^2)$ の選択がまったく任意であることがわかる．それは物理的な結果にも影響しない．そして便宜上決定することができる[1]．

伝播関数を見いだすことは，このようにしてただ一つのゲージ不変関数 $D(k^2)$ を決定することになる．もしも k^2 の値が与えられたと考え，z 軸を k 方向に選べば，変換（77.5）は成分 $D_{xx} = D_{yy} = -D(k^2)$ には触れない．したがって，ここでポテンシャルの任意のゲージを用いて，ただ一つの成分 D_{xx} を計算すれば十分である．

$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ のゲージを用いよう．そして演算子 $\mathbf{A}$ は展開（2.17），（2.18）によって与えられる．

$$\mathbf{A} = \sum_{\boldsymbol{k}\alpha} \sqrt{\frac{2\pi}{\omega}} \left(c_{\boldsymbol{k}\alpha} \boldsymbol{e}^{(\alpha)} e^{-ikx} + c_{\boldsymbol{k}\alpha}^{+} \boldsymbol{e}^{(\alpha)*} e^{ikx} \right), \quad \omega = |\boldsymbol{k}| \tag{77.6}$$

（添字 $\alpha = 1, 2$ は偏りを表わす）．演算子 c，c^+ の積の真空に対するすべての平均値のなかで $\langle 0 | c_{\boldsymbol{k}\alpha} c_{\boldsymbol{k}\alpha}^{+} | 0 \rangle = 1$ だけが 0 と異なる．したがって，定義（77.1）により

$$D_{ik}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{2\pi i d^3k}{\omega} \left(\sum_{\alpha} e_i^{(\alpha)} e_k^{(\alpha)*} \right) e^{-i\omega|\tau| + i\boldsymbol{k}\boldsymbol{\xi}} \tag{77.7}$$

（i，$k = x$，y，z は 3 次元ベクトル添字である．$\boldsymbol{k}$ についての和から $d^3k/(2\pi)^3$ についての積分に移った）．

1） この事情はエリ・デ・ランダウにより示された（1954）．

被積分関数の $e^{ik\xi}$ を省いたものは，関数 $D_{ik}(\boldsymbol{r}, t)$ の3次元フーリエ展開の成分であることが，(77.7) から明らかである．$D_{xx} = -D$ に対して，それは

$$\frac{2\pi i}{\omega} e^{-i\omega|\tau|}$$

に等しい（偏りについての和 $\sum |e_x^{(\alpha)}|^2 = 1$ である）．$D_{xx}(k^2)$ を見いだすためには，この関数の時間についてのフーリエ積分に展開することが残っている．この展開は公式

$$\frac{2\pi i}{\omega} e^{-i\omega|\tau|} = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4\pi}{k_0^2 - \boldsymbol{k}^2 + i0} e^{-ik_0\tau} dk_0$$

で与えられる．前節で明らかにされたように，このような積分は極 $k_0 = \pm|\boldsymbol{k}| = \pm\omega$ をそれぞれ下および上に迂回するものと理解される．$\tau > 0$ のとき，積分は極 $k_0 = +\omega$ の留数で，$\tau < 0$ のときは，極 $k_0 = -\omega$ の留数で決定される．

このようにして最終的に

$$D(k^2) = \frac{4\pi}{k^2 + i0} \tag{77.8}$$

となる．分母の $+i0$ の出現は上に述べた結論でわれわれが自動的に到達するが，これは (76.15) の規則と一致する．すなわち，光子の（0に等しい）質量から $i0$ が引き去られたわけである．(77.8) から対応する座標の関数 $D(\xi^2)$ は，方程式

$$-\partial_\mu \partial^\mu D(x - x') = 4\pi\delta^{(4)}(x - x') \tag{77.9}$$

を満足すること，すなわち波動方程式のグリーン関数であることが明らかである．

われわれは普通 $D^{(l)} = 0$ と置く．すなわち

$$D_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} D(k^2) = \frac{4\pi}{k^2 + i0} g_{\mu\nu} \tag{77.10}$$

の形の伝播関数を使う．

またゲージの別の方法を示そう．これは二，三の応用には明らかに優れている．$D^{(l)} = -D/k^2$ と置くと

$$D_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{k^2}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) \tag{77.11}$$

の形の伝播関数を得る（ランダウ・ゲージ）．このとき $D_{\mu\nu}k^\nu = 0$ である．このような選

択はポテンシャルのローレンツ・ゲージ ($A_\mu k^\mu = 0$) と似ている[1].

3次元の条件 div $\boldsymbol{A} = 0$ によるポテンシャルのゲージは，条件 $D_{il}k^l = 0$, $D_{0l}k^l = 0$ の条件による伝播関数のゲージと類似している．等式 $D_{xx} = -D = -4\pi/\boldsymbol{k}^2$ とともにこの条件は

$$D_{il} = -\frac{4\pi}{\omega^2-\boldsymbol{k}^2}\left(\delta_{il} - \frac{k_i k_l}{\boldsymbol{k}^2}\right) \tag{77.12}$$

を与える．このような D_{il} を得るために，伝播関数 (77.10) に対して

$$\chi_0 = -\frac{4\pi\omega}{(\omega^2 - \boldsymbol{k}^2)\,\boldsymbol{k}^2}, \quad \chi_i = \frac{4\pi k_i}{(\omega^2 - \boldsymbol{k}^2)\,\boldsymbol{k}^2}$$

と置いて変換 (77.5) を行なう必要がある．このとき残りの成分 $D_{\mu\nu}$ に対して

$$D_{00} = -\frac{4\pi}{\boldsymbol{k}^2}, \quad D_{0i} = 0 \tag{77.13}$$

が得られる．このようなゲージをクーロン・ゲージと呼ぶ (E. Salpeter, 1952)．D_{00} はここではクーロン・ポテンシャルのフーリエ成分であることを指摘しよう．

最後に，条件 $\Phi = 0$ によるポテンシャルのゲージは

$$D_{il} = -\frac{4\pi}{\omega^2-\boldsymbol{k}^2}\left(\delta_{il} - \frac{k_i k_l}{\omega^2}\right), \quad D_{0i} = D_{00} = 0 \tag{77.14}$$

であるような伝播関数のゲージと類似している．この形は非相対論的問題の応用のために便利であることがわかっている (И. Е. Дзялошинский, Л. П. Питаевский, 1959).

§78. 図形手法の一般則

§74, §75 で簡単な二，三の場合について行なわれた散乱行列要素の計算は，一般的方法の持つすべての原理的な要素を含んでいる．適当な一般化によって，任意の次数の摂動の行列要素の計算法を確立することに特別な困難はない．

すでに示されたように，任意の始および終状態のあいだの遷移に対する散乱の演算子 S

---

1) 同様な公式

$$D_{\mu\nu} = \frac{1}{k^2-m^2}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{m^2}\right) \tag{77.11 a}$$

によって，質量のあるスピン1に対する伝播関数が与えられる．この場合ゲージの任意性はなく，伝播関数の選択は一意的である．

の行列要素は，S に右からすべての始めの粒子の生成演算子を，左からすべての終りの粒子の消滅演算子を掛けてできた演算子の，真空における平均値からなる．

このような導き方をした結果，n 次の摂動での S-行列要素は

$$\langle f\,|\,\mathrm{S}^{(n)}\,|\,i\rangle = \frac{(-ie)^n}{n!}\langle 0\,|\cdots \mathrm{b}_{2f}\mathrm{b}_{1f}\cdots \mathrm{a}_{1f}\cdots \mathrm{c}_{1f}\int d^4x_1\cdots d^4x_n\,\mathrm{T}\{(\bar{\phi}_1\hat{\mathrm{A}}_1\phi_1)\cdots(\bar{\phi}_n\hat{\mathrm{A}}_n\phi_n)\} \times \mathrm{c}^+_{1i}\cdots \mathrm{a}^+_{1i}\cdots \mathrm{b}^+_{1i}\cdots\,|\,0\rangle \qquad (78.1)$$

の形をとる（添字 $1i$, $2i$, …… は（陽電子，電子，光子別々に）始めの粒子を，添字 $1f$, $2f$, …… は終りの粒子を番号づける．演算子 ϕ および A についた添字 1, 2, …… は $\phi_1 = \phi(x_1)$ …… を意味する)．ここに現われる演算子 ϕ，A は，種々の状態の対応する粒子の生成および消滅演算子の 1 次結合で表わされる．このようにして，行列要素として粒子の生成消滅演算子の積とその 1 次結合との，真空における平均の形の式を得る．このような平均値の計算は，**ヴィックの定理** (G. C. Wick, 1950) の内容であるつぎのような命題を使って実現される．

1) 任意数のボソン演算子 c^+, c の積の真空での平均は，これらの演算子のすべての可能な対の平均（縮約）の積の和に等しい．このとき，各対での因子は始めの積の順序と同じ順序でなければならない．

2) フェルミオン演算子 a^+, a, b^+, b（同一あるいは異なる粒子の）に対しては，規則はただつぎの点だけが異なる．和に現われる各項が，対で平均される演算子の列を作るために必要な，フェルミオン演算子の置換の数の偶か奇によって，＋ か － を付けて現われる点である．

積のなかに各因子 a, b, c と並んでそれぞれ因子 a^+, b^+, c^+ もまた存在するときにだけ，平均値は 0 と異なりうることは明らかである．このとき，同一状態に関する演算子対 (a, a^+), …… だけをまとめること，そしてこの際 a^+, …… が a, …… の右にくるようにする必要がある．すなわち粒子はまず生成され，その後消滅するわけである（平均値は $\langle 0\,|\,\mathrm{a}^+\mathrm{a}\,|\,0\rangle = 0$, …… である)．

もしも各対 (a, a^+), …… が積のなかにただ 1 回だけ入っていればヴィックの定理は明らかである（このとき平均値は，対の平均の積になってしまう)．また積のなかの消滅演算子 a, b, c が生成演算子 a^+, b^+, c^+ の右にある（このような積を**正規積**と呼ぶ）と

きもまた明らかである．このときの平均値は0になる．これから帰納法で，同じ演算子対が積のなかに何 (k) 回も現われる一般の場合に対して，ヴィックの定理を証明することができる．

ボソン演算子 c，c^+ の対が k 回現われる平均値 $\langle 0|\cdots cc^+\cdots|0\rangle$ を考えよう（フェルミオン演算子に対しても，これから先の考察はまったく同様である）．ある対の因子 c，c^+を交換し，交換則に基づいて

$$\langle 0|\cdots cc^+\cdots|0\rangle=\langle 0|\cdots c^+c\cdots|0\rangle+\langle 0|\cdots 1\cdots|0\rangle \tag{78.2}$$

を得る．平均値 $\langle 0|\cdots 1\cdots|0\rangle$ は $k-1$ 対を含んでいて，これに対してはヴィックの定理の成立が仮定されている．他方，平均値 $\langle 0|\cdots cc^+\cdots|0\rangle$ をヴィックの定理によって展開すると，平均値 $\langle 0|\cdots c^+c\cdots|0\rangle$ との違いは，ちょうど

$$\langle 0|\cdots 1\cdots|0\rangle\langle 0|cc^+|0\rangle=\langle 0|\cdots 1\cdots|0\rangle$$

の項である ($\langle 0|\cdots c^+c\cdots|0\rangle$ の展開では類似の項 $\langle 0|\cdots 1\cdots|0\rangle\langle 0|c^+c|0\rangle=0$ である)．したがって (78.2) から，もしもヴィックの定理が行列要素 $\langle 0|\cdots c^+c\cdots|0\rangle$ について成立すれば，それは c と c^+ の交換後にも成立している．したがって，ある（正規の）順序の因子に対してヴィックの定理が成立すれば，それにより任意の場合にも成立する[1]．

ヴィックの定理は演算子 a，b，…… の積に対して成り立つので，a，b，…… 自身とともにその1次結合 ψ，$\bar{\psi}$，A を含む任意の積に対しても成り立つ．この定理を行列要素 (78.1) に適用すると，おのおのがいくつかの対の平均の積であるような項の和の形に表わすことができる．これら対平均のなかに演算子 ψ，$\bar{\psi}$，A と≪外側の≫演算子，すな

1) 例として，4個の演算子（2個の同じ対）の積の真空での平均値を書こう．ボソン演算子に対して

$$\langle 0|cc^+cc^+|0\rangle=\overbrace{cc^+}\overbrace{cc^+}=1,$$

$$\langle 0|ccc^+c^+|0\rangle=c\overbrace{cc^+}c^++\overbrace{ccc^+}c^+=2.$$

ここで弧線は縮約を意味する．これと同一の結果が，行列要素についての直接の計算の際に得られることが，容易に確かめられる．

$$\langle 0|ccc^+c^+|0\rangle=\langle 0|c|1\rangle\langle 1|cc^+|1\rangle\langle 1|c^+|0\rangle=1\cdot 2\cdot 1.$$

フェルミオン演算子に対して，このような縮約は

$$\langle 0|aa^+aa^+|0\rangle=1,$$

$$\langle 0|aaa^+a^+|0\rangle=1-1=0$$

を与える（最後の等式はパウリの原理に基づいてすでに明らかである．すなわち，同じ状態に二つのフェルミオンを生成することは不可能である）．

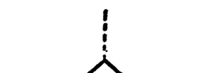
わち始めの粒子の生成，あるいは終りの粒子の消滅の演算子との縮約が出てくる．これらの縮約は始めおよび終りの粒子の波動関数を使って，つぎの公式によって表わされる．

$$\langle 0 | \mathrm{A}\mathrm{c}_p^+ | 0\rangle = A_p, \quad \langle 0 | \mathrm{c}_p\mathrm{A} | 0\rangle = A_p^*,$$
$$\langle 0 | \phi \mathrm{a}_p^+ | 0\rangle = \psi_p, \quad \langle 0 | \mathrm{a}_p\bar{\phi} | 0\rangle = \bar{\psi}_p, \tag{78.3}$$
$$\langle 0 | \mathrm{b}_p\phi | 0\rangle = \psi_{-p}, \quad \langle 0 | \bar{\phi}\mathrm{b}_p^+ | 0\rangle = \bar{\psi}_{-p}.$$

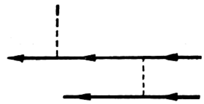
ここで A_p, ψ_p は運動量 $\boldsymbol{p}$ を持つ光子および電子の波動関数である（§74，§75 と同様簡単のために偏りの演算子は落とされている）．T-積の記号中にある《内側の》演算子の縮約もまた現われる．ヴィックの定理の適用の際に縮約された各対のなかでは，因子の順序は保たれるので，この縮約のなかでは演算子の経時的順序が保たれる．したがって，それらは対応する伝播関数によって置き換えられる[1]．

行列要素がヴィックの定理による展開の結果分解される和の各項は，一定のファインマン図形によって記述される．n 次近似の図形には n 個の頂点が含まれ，そのおのおのは積分変数の一つ，すなわち 4-ベクトル x_1, x_2, …… の一つが対応する．各頂点には三つの線——二つの実（電子）線と一つの点（光子）線が入る．これらに同じ変数 x の関数としての電子（ϕ および $\bar{\phi}$）および光子（A）の演算子が対応する．このとき演算子 ϕ は頂点に入る線，そして $\bar{\phi}$ はそこから出る線に対応する．

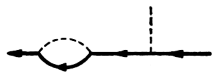
説明のために3次近似の行列要素の項と，図形とのあいだの関係のいくつかの例をあげよう．積分記号と記号 T を落とし，演算子の引数を書かないで，これらの項を記号的に書く．

a) $(\bar{\phi}\hat{\mathrm{A}}\phi)(\bar{\phi}\hat{\mathrm{A}}\phi)(\bar{\phi}\hat{\mathrm{A}}\phi) =$ 

1) この最後の主張を導くために，つぎのような注意が必要である．ヴィックの定理の証明に際して，演算子 c, c⁺ の交換則を使う．これは現実の（《横波の》）光子に対してだけ意味がある．《外側の》演算子 c_i^+, c_f はもちろん，このような（始めおよび終りの）光子に対応する．（T-積の記号中に入っている）演算子 A は，§77 で示されたように横波の電磁場のみを記述しているわけではない．ここでの立場は，§77 で $D_{\mu\nu}$ を計算したときのそれと同じである．相対論的およびゲージ不変性のために，ポテンシャルの横波部分で決定される積（すなわち，テンソル成分 $\langle 0 | \mathrm{T}\mathrm{A}_\mu\mathrm{A}_\nu \cdots | 0\rangle$）に対して定理を証明すればよい．

b) $(\bar{\phi}\hat{A}\phi)(\bar{\phi}\hat{A}\phi)(\bar{\phi}\hat{A}\phi) =$ 

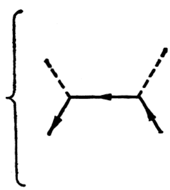
c) $(\bar{\phi}\hat{A}\phi)(\bar{\phi}\hat{A}\phi)(\bar{\phi}\hat{A}\phi) =$  (78.4)

d) $(\bar{\phi}\hat{A}\phi)(\bar{\phi}\hat{A}\phi)(\bar{\phi}\hat{A}\phi) =$ 

わかりやすくするために，電子および光子の縮約は，図形の上ではそれぞれ実線および点線の弧で描かれている．電子の縮約（$\bar{\phi}$ から ϕ）の矢印は，図形上の方向に対応している．内側の光子結合に対しては矢印は無意味である（これは $x-x'$ の関数としての光子の伝播関数の偶であることに現われている）．

このような方法で得られる項のなかには，頂点の交換だけが異なるものは同等である．これは頂点と変数 $x_1, x_2, \cdots\cdots$ の番号の同等性，すなわち単なる積分変数の名前の付け方である．このような交換の数は $n!$ である．これは (78.1) の因子 $1/n!$ と約される．そうすれば，頂点の交換を伴う図形はもはや考える必要はない．§74，§75 ですでにわれわれは同様な事情に出会っている．すなわち，2次近似のつぎの二つの図形は同等である．

$(\bar{\phi}\hat{A}\phi)(\bar{\phi}\hat{A}\phi) =$

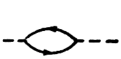
$(\bar{\phi}\hat{A}\phi)(\bar{\phi}\hat{A}\phi) =$  (78.5)

(78.4) と (78.5) には，図形の内線（仮想的な電子および光子）に対応する内側の縮約だけが描かれている．残った自由演算子は外側の演算子と縮約され，その結果図形の自由端と始めあるいは終りの粒子とのあいだの対応が確立される．このとき $\bar{\phi}$ は（演算子 a_f あるいは b_i^+ と結合して）終りの電子あるいは始めの陽電子を与え，ϕ は（a_i^+ あるいは b_f と結合して）始めの電子あるいは終りの陽電子を与える．自由演算子 A は（c_i^+ あ

るいは c_f と結合して）始めおよび終りの光子に対応することができる．このようにして，位相幾何学的には同じ（すなわち，同数の同じ配置の線からなる）数個ずつの図形が得られる．これらは入出端で始めの粒子と終りの粒子を取り替える点だけが異なっている．

明らかに，このような交換はおのおの（78.1）のなかの外側の演算子の一定の交換と同等である．したがって，もしも始めあるいは終りの粒子のなかに同一のフェルミオンがあれば，自由端の奇数個の交換だけ異なっている図形の，相対的符号は逆でなければならない．

図形上の実線の矢印を連続的にたどると，矢印の方向が連続的になっている電子線ができる．このような線は二つの自由端を持つが，閉じた環を作る．すなわち図形

$$(\bar{\phi}\hat{A}\phi)(\bar{\phi}\hat{A}\phi) =$$ 

は二つの頂点を持つ環を持っている．電子線に沿っての方向の保存は，図形での電荷保存の表示である．すなわち，各頂点に《入る》電荷がそれから《出る》電荷に等しいからである．

連続的な電子線に沿っての双スピノール添字の配置は，矢印と反対に動きながら左から右へ行列を書くことに対応する．異なる電子線の双スピノール添字はけっして混合しない．閉じない線に沿っての添字のつながりは自由端で，電子（あるいは陽電子）の波動関数で終る．閉じた環では添字のつながりもまた閉じている．すなわち，環はそれに沿って配列された行列の積の跡に対応する．この跡が負符号をとらねばならないことは容易にわかる．

事実，k 個の頂点を持つ環は k 個の縮約の集まり

$$(\bar{\phi}\hat{A}\phi)(\bar{\phi}\hat{A}\phi)\cdots\cdots(\bar{\phi}\hat{A}\phi)$$

（あるいは他の同等な，頂点の交換だけ異なるもの）に対応する．$k-1$ 番目の縮約で，演算子 ϕ および $\bar{\phi}$ は電子の伝播関数のなかで並んだのと同じ順序（$\bar{\phi}$ が ϕ の右）に並んでいる．端にある演算子は他の ϕ-演算子との偶数回の交換によって隣り合わせに持ってこられ，その後 $\bar{\phi}\phi$ の順に並んでいることがわかる．

$$\langle 0|T\bar{\phi}'\phi|0\rangle = -\langle 0|T\phi\bar{\phi}'|0\rangle$$

であるから（342頁脚注参照），この縮約に対応する伝播関数への置き換えは，全式の共

通符号の変化と結びついている.

一般に運動量表示への移行は §74, §75 で行なわれたのとまったく同様に行なわれる. 4-運動量保存の一般則と並んで, 各頂点での《保存則》もまた守られる必要がある. しかしながら, これらの法則の全部では, 図形の内線すべての運動量を一意的に決定するのには不十分である. このような場合残ったすべての未決定の内部運動量について (dp_0 について $-\infty$ から $+\infty$ までも含めて), 全 p-空間について行なわれる ($d^4p/(2\pi)^4$ の) 積分が残る.

上記の考察では, 《積極的に》反応に参加する粒子間の (すなわち, その過程の結果, 状態が変化する粒子間の) 相互作用が摂動の役割を果たすものと考えられた. 同様にして, 問題に外部電磁場, すなわち, 状態がその与えられた過程で変わらない, 《消極的な》粒子によって作られる場が現われる場合もまた考察される.

$A^{(e)}(x)$ を外場の 4-ポテンシャルとしよう. これは相互作用のラグランジァン中に光子の演算子 A とともに $\mathrm{A}+A^{(e)}$ (これに電流の演算子 $\mathbf{j}$ が掛けられる) の形で入っている. $A^{(e)}$ はどの演算子も含まないので, 他の演算子と縮約を作らない. 言いかえれば, 外場はファインマン図形ではただ外線に対応するはずである.

$A^{(e)}$ をフーリエ積分の形で表わそう.

$$A^{(e)}(x)=\int A^{(e)}(q)\,e^{-iqx}\frac{d^4q}{(2\pi)^4},$$
$$A^{(e)}(q)=\int A^{(e)}(x)\,e^{iqx}\,d^4x. \tag{78.6}$$

運動量表示の行列要素の式のなかで, 4-ベクトル q は現実の粒子に対応する他の外線の 4-運動量と並んで現われる. 外場のこのような線のおのおのは因子 $A^{(e)}(q)$ に対応させられる. このとき線は《入る》線と考える必要がある. これはフーリエ積分中に $A^{(e)}(q)$ と一緒に入っている因子 e^{-iqx} の指数の符号に対応している (《出る》線は因子 $A^{(e)*}(q)$ に対応させる必要があるだろう). もしもこのとき, (すべての現実の粒子の 4-運動量が与えられたとき), 4-運動量の保存則がすべての外場の 4-運動量を一意的に決定しないならば, 残りの《自由な》 q について ($d^4q/(2\pi)^4$ について) の積分が行なわれる. 図形の線の, 他のすべての定まらない 4-運動量についてと同様である.

図形手法の最終的な総括をしよう. これにしたがって, 運動量表示での散乱振幅の式が作られる.

1)　n 次の摂動は，そのおのおのに1個の入る電子線と1個の出る電子線（実線）と1個の光子線（点線）が集まる n 個の頂点に対応する．散乱過程の振幅には，始めおよび終りの粒子の数に等しい数の自由端（外線）を持つ図形が含まれる．

2)　外側の入る実線のおのおのには，始めの電子の振幅 $u(p)$ あるいは終りの陽電子の $u(-p)$（p は粒子の 4-運動量）があてられる．出る実線のおのおのには，終りの電子の振幅 $\bar{u}(p)$ あるいは始めの陽電子の $\bar{u}(-p)$ があてられる．

3)　各頂点には 4-ベクトル γ^μ があてられる．

4)　外側の入る点線のおのおのには，始めの光子の振幅 $\sqrt{4\pi}\,e_\mu$ が，出る線には終りの光子の $\sqrt{4\pi}\,e^*_\mu$ があてられる（e は偏りの 4-ベクトルである）．ベクトル添字 μ は対応する頂点の行列 γ^μ の添字と一致する（したがってスカラー乗積 $\hat{e}\equiv e\gamma$ あるいは $\hat{e}^*$ ができる）．

5)　内側の実線は因子 $iG(p)$ が，そして内側の点線には因子 $-iD_{\mu\nu}(p)$ があてられる．テンソル添字 $\mu\nu$ は，点線で結ばれる頂点の行列 γ^μ，γ^ν の添字と一致する．

6)　一連の電子線に沿っての矢印は一定の向きを持ち，それに沿っての双スピノール添字の配置は，矢印と反対に動くとき左から右へ行列を書くことに対応する．閉じた電子の環はそれに沿って並んだ行列の積の跡に対応する．

7)　各頂点で交わる線の 4-運動量は保存則を満足する．すなわち，入る線の運動量の和は出る線の運動量の和に等しい．自由端の運動量は（一般的保存則にはしたがう）与えられた量である．このとき陽電子線は運動量 $-p$ と書かれる．すべての頂点での保存則を考慮したのちも，不定のまま残った内線の運動量ごとに，（$d^4p/(2\pi)^4$ についての）積分が行なわれる．

8)　外場に対応した入る自由端には，因子 $A^{(e)}(q)$ があてられる．4-ベクトル q は，頂点での保存則によって他の線の 4-運動量と結ばれる．(365 頁の［付記］参照)．

9)　図形が iM_{fi} に伴う共通因子は $(-ie)^n$ である．このほか，図形中の閉じた電子の環のおのおの，およびもしも一連の実線の始めと終りならば，陽電子の外端の対のおのおのに，付加的因子 -1 が付け足される．もしも始めあるいは終りの粒子のなかに，何個かの電子または陽電子があれば，同一粒子対の（すなわち，その対応する外端の）奇数個の交換だけが異なる図形の相対的符号を反対にする必要がある[1]．

---

1)　最後の規則を精確にするために，同じ実線の図形，つまりすべての光子線を取り去ったのちに同一になるべき図形は，あらゆる場合に同じ符号になる必要がある．↗

§79. 交叉不変性

散乱振幅 M_{fi} のファインマン積分での表わし方は，つぎのようないちじるしい対称性を示す.

ファインマン図形の任意の入る外線は（その矢印の向きを変えないで）始めの粒子あるいは終りの反粒子と，またおのおのの出る線は終りの粒子あるいは始めの反粒子と考えることができる．同時に粒子から反粒子に移ると，4-運動量 p につけられた意味も変わってくる．すなわち粒子（たとえば電子）に対しては $p=p_{電}$ であり，陽電子に対しては $p=-p_{陽}$ である．真正中性粒子である光子に対しては，これは単に光子の放出から吸収へ，あるいはその逆に移るだけである．すなわち，運動量 k を持つ光子の外線は，運動量 $k_{吸}=k$ を持つ光子の吸収が，運動量 $k_{放}=-k$ を持つ光子の放出に対応するからである.

外線の意味のこのような変化は，反応の一つの交叉チャネルから他への移行と同等である．これから，図形の自由端の運動量の関数として，同一の振幅がすべての反応チャネルを記述することが導かれる[1]．チャネルの変化に依存して，関数の引数の意味だけが変化する．すなわち，粒子から反粒子に移行すると $p_i \longleftrightarrow -p_f$ の変化が起こる．ここで p_i は（一つのチャネルの）始めの粒子の 4-運動量で，p_f は（他のチャネルの）終りの粒子の 4-運動量である．散乱振幅のこの性質のことを**交叉対称性**あるいは**交叉不変性**という.

§71 で導入された運動学的不変量の関数である不変振幅を使っていうと，これらの関数はすべてのチャネルで同一であるが，各チャネルに対してその引数はその物理的領域の値をとるということができる．言いかえると，ファインマン積分は不変振幅を解析関数として定義する．異なる物理的領域におけるその値は，領域のなかの一つで与えられた関数の解析接続である．ファインマン積分の被積分関数が特異性を含むので，不変振幅も（極の迂回の方法を考慮した）これらの式から決定される特異性を持っている．もしも不変振幅がいずれかのチャネルに対してファインマン積分で計算されるとすれば，他のチャネルの解析接続は，自動的にそれらの特異性を考慮することになる.

交叉不変性は，時空対称性の一般的要求から出る散乱行列の性質より大きいものでない

↘ また，同一フェルミオンの存在では，振幅の共通符号が制限されることも思い起こそう.

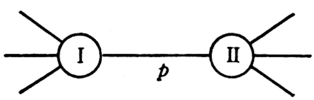
1) もしもどれかのチャネルが 4-運動量の保存により禁止されると，(65.5) のなかに共通因子として現われている δ-関数によって遷移確率は自動的に 0 になる.

ことを強調しよう．後者は，全粒子の反粒子による置き換えを伴う，始および終状態相互の交換（全粒子の運動量 $\boldsymbol{p}$ は変えず，またその角運動量の投影の符号も変えない）で得られる過程の振幅が等しいことを要求する．これは CPT-不変性の要求である[1]．交叉不変性はこのような変換を，すべての粒子に対してではなく任意の粒子に別々に行なうことを許すわけである．

§80. 仮想的粒子

ファインマン図形の内線は不変摂動論において，≪普通の≫理論における中間状態の役割に類似した役割を演じている．しかしながら，この状態の性質は両方の場合で異なっている．普通の理論では，中間状態で（3次元）運動量は保存するがエネルギーは保存しない．この意味でこれのことを**仮想的状態**という．不変理論では運動量とエネルギーは平等に入っている．すなわち，中間状態で 4-運動量すべてが保存する（それは S-行列の要素のなかで積分は，座標についても時間についても行なわれる結果で，これにより不変理論が得られる）．しかしながら，このとき中間状態では，現実の粒子に固有のエネルギーと運動量のあいだの関係式（等式 $p^2=m^2$ で表わされる）が破られる．この意味で中間の**仮想的粒子**という．仮想的粒子の運動量とエネルギーのあいだの関係式は任意である．すなわち，それは頂点における 4-運動量の保存則に要求されるようなものである．

1本の線で結ばれた二つの部分（IおよびII）からなる，ある図形を考えよう．これらの部分の内部構造には興味は持たないで，図形を図式的に



(80.1)

の形に書こう．（描かれた線は実線であっても点線であってもよい）．一般の保存則から，部分IおよびIIの外線の 4-運動量の和は同一である．各頂点での保存則のために，この量は部分IとIIを結ぶ内線の 4-運動量 p と等しい．言いかえれば，この運動量は一意的に決定され，したがって行列要素でこれについての積分は行なわない．

反応のチャネルによって平方 p^2 は正にも負にもなりうる．$p^2>0$ であるようなチャ

1）ファインマン図形で，すべての 4-運動量の符号を変えることによって，示された反応の，一つから他への移行の形式的記述は，4-反転としての CPT-演算の意味に対応していることに注目しよう．

ネルがつねに存在する[1]. このとき仮想的な粒子はその形式的な性質により，実数の質量 $M=\sqrt{p^2}$ を持つ現実の粒子に似ている. これに対しては静止系を導入することができ，そのスピンを定義することができ，その他…….

光子の伝播関数は，そのテンソル構造に関しては，スピン1で0と異なる質量を持つ，偏りのない粒子の密度行列と一致する. すなわち

$$\rho_{\mu\nu}=-\frac{1}{3}\left(g_{\mu\nu}-\frac{p_\mu p_\nu}{m^2}\right)$$

(4-運動量に直交する 4-テンソルである). 他面（場の演算子についての2次の量としての）伝播関数は仮想的粒子に対して，粒子の密度行列の役割と類似の役割を演じる. したがって，仮想的光子には現実のと同様スピン1を付ける必要がある. しかしながら，二つの独立な偏りを持つ現実の光子と違って，仮想的な光子は有限質量の≪粒子≫のように，三つの偏りを全部持つことができる.

電子の伝播関数は

$$G\infty\hat{p}+m$$

である. ここでmは現実の電子の質量である. ところが仮想的粒子の質量は，$M=\sqrt{p^2}$ である.

$$\hat{p}+m=\frac{M+m}{2M}(\hat{p}+M)+\frac{M-m}{2M}(\hat{p}-M) \tag{80.2}$$

と書いて，われわれは第1項は質量 M スピン 1/2 の粒子の密度行列，第2項は同じく≪反粒子≫の密度行列に対応する（(29.10) および (29.17) を見よ）ことを見るだろう. 粒子と反粒子が異なる内部偶奇性を持つことを思い起こすと (§27)，仮想的電子には同じスピン1/2を付ける必要があるが，一定の偶奇性をつけてはいけないという結果に到達する.

図形 (80.1) の特性は，そのただ一つの内線を切ることによって，互いに結びつかない二つの部分に切り離すことができることである[2]. このような場合，この線は一粒子の中間状態，すなわち1個の仮想的粒子の状態に対応する. このような図形に対応する散乱振

---

1) たとえば（もしもエネルギー的に許されるならば），部分Iのすべての自由端が始めの部分IIのが終りの粒子に対応するようなチャネルはこのようなものである. このときは $p=P_i$（始めの粒子すべての 4-運動量の和）である. そして重心系では $p=(P_i^0, 0)$，したがって $p^2>0$ である.

2) 最初の消えない近似のほとんどすべての過程の図形が，この性質を持っている.

幅は（積分はされない！）特長的な因子

$$\frac{1}{p^2 - m^2 + i0}$$

を含んでいる．これは内線 p から生じる（このときもしも線が電子のなら，m は電子の質量である．あるいはもしも線が光子のなら $m=0$ である）．言いかえれば，散乱振幅は仮想的粒子が物理的になる（$p^2=m^2$）ような p の値で極を持つことになる．この立場は，非相対論的量子力学で散乱振幅が，衝突する粒子の系の結合状態に対応するエネルギー値で極を持つ（III，§128）のと類似している．図形（80.1）を，すべての右の自由端が始めの，左のが終りの粒子に対応するような反応チャネルに対して考察しよう．このとき $p^2>0$ であり，系の中間状態で始めの粒子が一つの仮想的粒子に変わったということができる．このような変換が必要な保存則（4-運動量の保存は考慮しないで）に矛盾しないならば，これは可能である．いわゆる**極性図形**が現われる必要条件はこのようにまとめられる．チャネルのなかの一つに対して存在すると，これから交叉不変性のためにこのような図形は反応の残りのチャネルにも存在する．

たとえば上記の保存則は，$e+\gamma \longrightarrow e$ にしたがって仮想的電子が生じるのはさまたげない．この可能性はコンプトン効果（そしてこれによりこの反応の他のチャネル，すなわち2光子による電子対消滅）の振幅の極に対応する．$e^- + e^+ \longrightarrow \gamma$ にしたがった仮想的光子の発生は，電子の陽電子，それによりまた電子の電子による散乱振幅の極に対応する．2光子から仮想的電子も，仮想的光子も得られない（変換 $\gamma+\gamma \longrightarrow e$ は電荷と角運動量の保存により禁止され，変換 $\gamma+\gamma \longrightarrow \gamma$ は荷電偶奇性によって禁止される）．これに対応して光子の光子による散乱は，極性図形を含むことができない．

ファインマン積分から出発してわれわれが追及してきた，散乱振幅の極の特異性の出現は，実際には，摂動論とは関係のない非常な一般性を持っている．この特異性がユニタリー条件（72.2）の結果であることを示そう．

（72.2）に現われる中間状態では n は1粒子性であると仮定しよう．この状態の寄与は

$$(T_{fi} - T^*_{if})^{(1\text{粒子})} = i(2\pi)^4 \sum_\lambda \int \delta^{(4)}(P_f - p)\, T_{fn} T^*_{in} \frac{V d^3 p}{(2\pi)^3}$$

である．ここで p および λ は中間粒子の 4-運動量および螺線度である．d^3p についての積分を（$p^0 \equiv \varepsilon > 0$ の領域で）

$$d^3p \longrightarrow 2\varepsilon\delta\,(p^2 - M^2)\,d^4p$$

にしたがって d^4p についての積分に置き換えよう（M は中間粒子の質量である）．積分は δ-関数 $\delta^{(4)}(P_f - p)$ を消去する．続いて (65.10) にしたがって，振幅 T_{fi} から振幅 M_{fi} に移って

$$(M_{fi} - M^*_{if})^{(1\text{粒子})} = 2\pi i\delta\,(p^2 - M^2)\sum_{\lambda} M_{fn}M^*_{in} \tag{80.3}$$

を得る．T-および P-不変性を仮定すると（位相因子のほかは）$M_{if} = M_{f'i'}$ である．ここで状態 i', f' は i, f と粒子の（運動量の符号が同じとき）螺線度の符号だけが異なっている．等式 (80.3) および $M_{f'i'} - M^*_{i'f'}$ に対する同様な式の和をとると

$$\mathrm{Im}\,\overline{M}{}^{(1\text{粒子})}_{fi} = -\pi\delta(p^2 - M^2)R. \tag{80.4}$$

ここでつぎのように置いた．

$$\overline{M}_{fi} = M_{fi} + M_{f'i'},$$

$$R = -\sum_{\lambda}(M_{fn}M^*_{in} + M_{f'n}M^*_{i'n}).$$

これから，$p^2 = P_i^2 = P_f^2$ の解析関数としての $\overline{M}_{fi}$ は $p^2 = M^2$ に極を持つことができる．(76.18) にしたがって極の部分に対して

$$\overline{M}{}^{(1\text{粒子})}_{fi} = \frac{R}{p^2 - M^2 + i0}. \tag{80.5}$$

1粒子状態の現実的仮定が可能になるのは M^2 に等しい $P_i^2 = P_f^2$ のただ一つの値においてのみである．このようにして，われわれは実際に，(80.1)の形の図形に対応する散乱振幅の構造を得た．

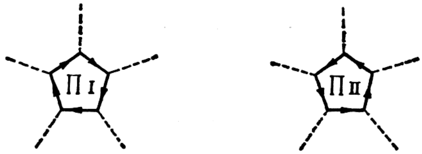
最後に，閉じた電子の環を含む図形の一つの重要な性質について詳述しよう．仮想的光子に荷電偶奇性の概念を適用して，この性質を容易に求めることができる．すなわち，現実の光子と同様に仮想的光子も一定の（負の）偶奇性を持つからである[1]．

もしもある図形が（頂点の数 $N>2$ の）閉じた環を含んでいると，今考えられている過程の振幅のなかには，これと並んで，第一のと環を回る向きだけが異なる図形もまた現われなければならない（$N=2$ のときには回る方向の概念は明らかに無意味である）．そ

---

1) これは，§13 の終りのところで現実の光子に対して示された，電磁的相互作用の演算子の各頂点での働きを考察することによって得られる．

こにきている点線でこれらの環を切り離そう．われわれは二つの環 Π_{I}，Π_{II} を得る．すなわち



(80.6)

となり，これは一組の光子（現実のも仮想的のも）を他の組に変換させる過程の振幅を定義する図形と考えることができる．このときNという数は，始めと終りの光子数である．しかし荷電偶奇性の保存は偶数個の光子が奇数個に変換するのを禁止している．したがってN が奇数のとき，環 (80.6) に対応する式の和は 0 になる．そのために，これら二つの環を構成部分として含むような二つの図形の散乱振幅への寄与もまた0になる（**ファリーの定理**と呼ばれる．W. H. Furry, 1937）．

このようにして，ある過程の振幅を作るとき，奇数個の頂点を持つ環を含むような図形は，つねに考えなくてもよい．

上述の図形の相互縮約の原因について，さらに詳細に追及しよう．閉じた電子の環は（光子線の運動量 k_1, k_2, ……, k_N が与えられたとき）つぎの式に対応する．

$$\int d^4p\cdot \mathrm{Sp}\,[\hat{e}_1 G(p)\,\hat{e}_2 G(p+k_1)\cdots]. \tag{80.7}$$

ここで p, $p+k_1$,…… は（頂点における保存則を考慮したのちもまったく不定のままでいる）電子線の運動量である．すべての行列 γ^μ および G に荷電共役の操作を行なう．すなわち，それらを $\mathrm{U}_C^{-1}\gamma^\mu \mathrm{U}_C$ および $\mathrm{U}_C^{-1} G\,\mathrm{U}_C$ に置き換える．このとき (80.7) の式は変わらない．なぜかというと，行列の積の跡はこの変換に対して不変であるからである．他面 (26.3) にしたがい

$$\mathrm{U}_C^{-1}\gamma^\mu \mathrm{U}_C = -\tilde{\gamma}^\mu. \tag{80.8}$$

したがって

$$\mathrm{U}_C^{-1} G(p)\,\mathrm{U}_C = \frac{-p\tilde{\gamma}+m}{p^2-m^2} = \tilde{G}(-p). \tag{80.9}$$

しかし $G(p)$ を p の符号を変えた転置行列に置き換えることは，明らかに環を回る向きを変えること，そのなかのすべての矢印の方向を逆に変えることを意味している．言いか

えれば，行なわれた変換は一つの環を他の環に変え，その際に各頂点での置き換え(80.8)から生じる因子 $(-1)^N$ が現われる．このようにして

$$\prod \mathrm{I} = (-1)^N \prod \mathrm{II} \tag{80.10}$$

である．すなわち頂点の数が偶数なら両方の環の寄与は同じで，奇数ならば符号が反対である．

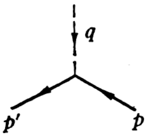
［付記］（358頁，8）への付け加え）

もしも場が定場ならば，外線には4-運動量 $q^\mu = (0, \boldsymbol{q})$ が付けられ，それには場の3次元フーリエ成分 $A^{(e)}(\boldsymbol{q})$（この場合には $A^{(e)}(q) = 2\pi\delta(q^0)A^{(e)}(\boldsymbol{q})$ にしたがって4次元成分と結びついている）が対比される．残りの内線の不定3次元運動量ごとに $d^3p/(2\pi)^3$ についての積分が行なわれる．

第9章　電子の相互作用

§81.　外場による電子の散乱

定外場による電子の弾性散乱は，1次の摂動論（1次のボルン近似）ですでに現われる最も簡単な過程である．一つの頂点を持つ図形



(81.1)

がこれに対応する．ここで p および p' は電子の始めおよび終りの 4-運動量であり，$q = p' - p$ である．定場における散乱で，電子のエネルギーは保存されるので（$\varepsilon = \varepsilon'$），$q = (0,\ \boldsymbol{q})$ である[1]．

対応する散乱振幅は

$$M_{fi} = -e\bar{u}(p')\,\hat{A}^{(e)}(\boldsymbol{q})\,u(p). \tag{81.2}$$

ここで $A^{(e)}(\boldsymbol{q})$ は外場の空間的フーリエ展開の成分である．((65.26) にしたがって）散乱断面積は

$$d\sigma = \frac{1}{16\pi^2}\,|M_{fi}|^2\,do'. \tag{81.3}$$

静電場に対しては $A^{(e)} = (A_0^{(e)},\ 0)$ である．したがって

$$M_{fi} = -e\bar{u}(p')\,\gamma^0 u(p)\,A_0^{(e)}(\boldsymbol{q}) = -eu^*(p')\,u(p)\,A_0^{(e)}(\boldsymbol{q}). \tag{81.4}$$

1）外場の場合に，4-運動量の保存則によっては，このような図形は禁止されない（現実の光子に対しては図形（74.19）では禁止された）．なぜかというと，現実の光子の 4-運動量の平方と違って，平方 q^2 は0になる必要はないからである，外場を表わすフーリエ積分から，必要な q を持つ成分が自動的に選ばれることになる．

非相対論的な場合には双スピノール振幅 $u(p)$ は非相対論的（2成分）振幅になる．偏りのない電子に対して，これは p に依存しない量であり，このときわれわれが用いる規格化条件によって $u^*u = 2m$ である．これを考慮して次式を得る．

$$d\sigma = \left| -\frac{m}{2\pi} U(\boldsymbol{q}) \right|^2 do'.$$

ここで $U(\boldsymbol{q}) = eA_0^{(e)}(\boldsymbol{q})$ は場のなかの電子のポテンシャル・エネルギーのフーリエ成分である．この式はよく知られたボルンの公式と一致する（III（125.4））．

一般の相対論的な場合に，偏りのない電子の散乱断面積は平方 $|M_{fi}|^2$ を始めの偏りについての平均と，終りの偏りについての和をとること，すなわち

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{偏り}} |M_{fi}|^2$$

という量を作ることにより求められる．ここで和は始めおよび終りの電子のスピンについて行なわれる．因子1/2はこれらの和のなかの一つを平均に変える．§66で記述された法則により

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{偏り}} |M_{fi}|^2 = 2e^2 \mathrm{Sp}\, \rho \hat{A}^{(e)*} \rho' \hat{A}^{(e)} = \frac{1}{2} e^2 |A_0^{(e)}(\boldsymbol{q})|^2 \mathrm{Sp}(m + \hat{p})\gamma^0(m + \hat{p}')\gamma^0$$

が得られる．跡の計算のために，$\gamma^0 \hat{p}' \gamma^0 = \hat{\tilde{p}}'$ であることに注意しよう．ここで $\tilde{p}' = (\varepsilon', -\boldsymbol{p}')$ である．したがって

$$\frac{1}{4} \mathrm{Sp}(m + \hat{p})\gamma^0(m + \hat{p}')\gamma^0 = \frac{1}{4} \mathrm{Sp}(m + \hat{p})(m + \hat{\tilde{p}}')$$

$$= m^2 + p\tilde{p}' = \varepsilon^2 + m^2 + \boldsymbol{p}\boldsymbol{p}' = 2\varepsilon^2 - \frac{\boldsymbol{q}^2}{2}.$$

これから，断面積は

$$d\sigma = \frac{e^2 |A_0^{(e)}(\boldsymbol{q})|^2}{4\pi^2} \varepsilon^2 \left(1 - \frac{\boldsymbol{q}^2}{4\varepsilon^2} \right) do'. \tag{81.5}$$

密度 $\rho(\boldsymbol{r})$ の電荷の静的分布により作られた場に対しては

$$A_0^{(e)}(\boldsymbol{q}) = \frac{4\pi\rho(\boldsymbol{q})}{\boldsymbol{q}^2}. \tag{81.6}$$

ここで $\rho(\boldsymbol{q})$ は分布 $\rho(\boldsymbol{r})$ のフーリエ写像（構造因子）である．特に点電荷 Ze のクーロン場に対しては，$\rho(\boldsymbol{q}) = Ze$ である．このとき散乱断面積は

$$d\sigma = do' \frac{4(Ze^2)^2\varepsilon^2}{q^4}\left(1 - \frac{q^2}{4\varepsilon^2}\right) \tag{81.7}$$

である (N. F. Mott, 1929). 平方 $q^2 = 4p^2\sin^2(\theta/2)$, ここで θ は散乱角である. したがって, 括弧の前の式はその角度依存性からラザフォード断面積と呼ぶことができる.

$$d\sigma_ラ = do\frac{4(Ze^2)^2\varepsilon^2}{q^4} = do\frac{(Ze^2)^2\varepsilon^2}{4p^4}\sin^{-4}\frac{\theta}{2} \tag{81.8}$$

である (非相対論的極限で係数は $\varepsilon^2/p^4 \longrightarrow 1/m^2v^4$ である). このようにして[1]

$$d\sigma = d\sigma_ラ\left(1 - v^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right). \tag{81.9}$$

超相対論的な場合, 弾性散乱は非相対論的の場合と後方散乱が非常に小さくなる点が異なることを指摘しよう ($\theta \to \pi$ のとき $d\sigma/d\sigma_ラ \longrightarrow m^2/\varepsilon^2$ である).

超相対論的な場合, 小さい角の散乱に対して, (81.7) は

$$d\sigma = \frac{4(Ze^2)^2}{\varepsilon^2\theta^4}do' \tag{81.10}$$

を与える. この公式はボルン近似 (すなわち, $Ze^2 \ll 1$ と仮定して) で得られたものであるが, これは (角度 $\theta \lesssim m/\varepsilon$ に対して) $Ze^2 \sim 1$ のときにもまた成立する. 超相対論的な (Ze^2 について) 正確な波動関数 $\psi^+_{\varepsilon p}$ (39.10) を使っても確かめることができる. (39.2) の領域で成立するこの解はもちろん, 十分 r の大きい漸近的領域でも成立する. ここでは

$$F \sim 1 + \mathrm{const}\cdot e^{i(pr - \boldsymbol{pr})}, \quad \frac{\boldsymbol{\alpha}\nabla F}{\varepsilon} \sim 1 - \cos\theta \sim \theta^2 \ll 1.$$

したがって, 当然のことながら補正項は小さいままである. $e^{i\boldsymbol{pr}}F$ の形の波動関数は, (パラメータは明らかに変わっているが) 形の上からは非相対論的関数と一致し, 同じ漸近形を持っている. したがって, 断面積に対してラザフォードの式を得る.

---

1) この式で表わされる $d\sigma$ と $d\sigma_ラ$ との違いは, スピン 1/2 の粒子に特長的なものである. スピン 0 の粒子の散乱に対して (もしもその電磁場内の運動が波動方程式で記述されるならば), $d\sigma = d\sigma_ラ$ になるはずである. 一見すると, この純量子力学的効果を表わす因子が $\hbar$ を含まないことに関して疑問が生じる. しかしながらボルン近似が適用可能の条件 ($e^2/\hbar v \ll 1$) はクーロン場内の運動の準古典性の条件と逆であり, したがって, 公式 (81.9) の場合には古典論への移行が不可能であることを思い起こす必要がある.

任意の偏りの電子の散乱断面積の計算のために，一般法則にしたがって密度行列(29.13)を利用することができる．しかしながら，与えられた場合には，双スピノール振幅 $u(p')$ および $u(p)$ を (23.9) の形に表わして，あまり膨大ではない形の結果を得ることができる．これらを掛けあわせて次式を得る．

$$u^*(p')\,u(p) = w'^*\{\varepsilon + m + (\varepsilon - m)\,(\boldsymbol{n}'\boldsymbol{\sigma})\,(\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{\sigma})\}\,w.$$

あるいは (33.5) を使って

$$u^*(p')\,u(p) = w'^*\,\mathrm{f}\,w \tag{81.11}$$

を得る．ここで[1]

$$\mathrm{f} = A + B\boldsymbol{\nu\sigma},$$

$$A = (\varepsilon + m) + (\varepsilon - m)\cos\theta, \quad B = -\,i\,(\varepsilon - m)\sin\theta, \tag{81.12}$$

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{[\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}']}{\sin\theta}.$$

2成分量(3次元スピノール) w は電子の非相対論的波動関数である．部分的偏りの状態への移行は，したがって積 $w_\alpha w^*_\beta$ (α, β はスピノール添字である)を非相対論的密度行列 $\rho_{\alpha\beta}$ に置き換えることによって実現する．このようにして，つぎのような置き換えをする必要がある．

$$|M_{fi}|^2 \longrightarrow e^2\,|A_0^{(e)}(\boldsymbol{q})|^2\,\mathrm{Sp}\,\rho(A - B\boldsymbol{\nu\sigma})\,\rho'(A + B\boldsymbol{\nu\sigma}).$$

ここで

$$\rho = \frac{1}{2}\,(1 + \boldsymbol{\sigma\zeta}), \quad \rho' = \frac{1}{2}\,(1 + \boldsymbol{\sigma\zeta}')$$

である．$\boldsymbol{\zeta}$ および $\boldsymbol{\zeta}'$ は検出器で分離された始めおよび終りの偏りのベクトルである．跡の計算はつぎの結果をもたらす．

$$d\sigma = d\sigma_0\left\{1 + \frac{(A^2 - |B|^2)\,\boldsymbol{\zeta\zeta}' + 2\,|B|^2\,(\boldsymbol{\nu\zeta})\,(\boldsymbol{\nu\zeta}') + 2A\,|B|\,\boldsymbol{\nu}\,[\boldsymbol{\zeta\zeta}']}{A^2 + |B|^2}\right\}. \tag{81.13}$$

ここで $d\sigma_0$ は偏りのない電子の散乱断面積である．

(81.13) の波括弧を $\{1 + \boldsymbol{\zeta}^{(f)}\boldsymbol{\zeta}'\}$ の形に表わし，終りの電子の偏り $\boldsymbol{\zeta}^{(f)}$ が(検出される偏り $\boldsymbol{\zeta}'$ と異なって——§66参照)，つぎのように求められる[2]．

---

1)　ここと §38 の f の定義は共通因子が異なっている．

2)　公式 (81.14) はIII，§138 の問題1で得られた公式に対応し，A が実，Bが虚のときにそれから得られる．

$$\boldsymbol{\zeta}^{(f)} = \frac{(A^2 - |B|^2)\boldsymbol{\zeta} + 2|B|^2(\boldsymbol{\nu\zeta})\boldsymbol{\nu} + 2A|B|[\boldsymbol{\nu\zeta}]}{A^2 + |B|^2}. \tag{81.14}$$

入射電子が偏っているときにのみ，散乱電子も偏っていることがわかる．この事情は1次のボルン近似の一般的性質である（III，§138 参照）．

非相対論的な場合（$\varepsilon \to m$）には，(81.14) から $\boldsymbol{\zeta}^{(f)} = \boldsymbol{\zeta}$ が得られる．すなわち，電子は散乱に際してその偏りを保存するわけである（これはスピン軌道相互作用を無視した当然の結果である）．

逆に超相対論的な場合には

$$A = \varepsilon(1 + \cos\theta), \quad B = -i\varepsilon\sin\theta$$

となる（これは一般的公式（38.2）に対応する）．

このときもしも入射電子が一定の螺線度（$\boldsymbol{\zeta} = 2\lambda\boldsymbol{n}$，$\lambda = \pm 1/2$）を持つとすれば，(81.14) から簡単な演算ののちに

$$\boldsymbol{\zeta}^{(f)} = 2\lambda\boldsymbol{n}'$$

が得られる．言いかえれば，散乱後電子は螺線状態にあり，前の螺線度の値（λ）を保存する．

この性質はすでに §38 で明らかにされたように，質量を無視したとき，スピノール表示のディラック方程式は ξ および η に関する二つの独立な方程式に分かれることと関係している．この結果はもっと一般的な意味を持っている．なぜかというと電流

$$\mathrm{j} = (\xi^*\xi + \eta^*\eta, \xi^*\boldsymbol{\sigma}\xi - \eta^*\boldsymbol{\sigma}\eta),$$

およびこれとともに電磁的摂動の演算子 $\mathrm{V} = e\mathrm{jA}$ が，ξ および η について混合項を含まない．したがって，ξ-および η-状態間の遷移に対する行列要素を持たないからである．ここから，もしも超相対論的電子が一定の螺線度を持つ（すなわち ξ か η のどれかが0と異なる）ならば，相互作用の過程でこの螺線度は，電子の質量の完全な無視に対応する近似では保存される．

§82.　電子による電子および陽電子の散乱

電子による電子の散乱を考えよう．すなわち，4-運動量 p_1，p_2 を持つ2個の電子が衝突し，4-運動量 p_1'，p_2' を獲得するとすれば，4-運動量の保存は，等式

$$p_1 + p_2 = p_1' + p_2' \tag{82.1}$$

で表わされる．これから先われわれは，§67 で導入された

$$
\begin{aligned}
s &= (p_1 + p_2)^2 = 2(m^2 + p_1 p_2),\\
t &= (p_1 - p_1')^2 = 2(m^2 - p_1 p_1'),\\
u &= (p_1 - p_2')^2 = 2(m^2 - p_1 p_2'),\\
s &+ t + u = 4m^2
\end{aligned}
\qquad (82.2)
$$

により定義される運動学的不変量を使おう．

考察される過程は二つのファインマン図形 (74.13)，(74.14) により記述され，その振幅は[1]

$$
M_{fi} = 4\pi e^2 \left\{ \frac{1}{t} (\bar{u}_2' \gamma^\mu u_2)(\bar{u}_1' \gamma_\mu u_1) - \frac{1}{u} (\bar{u}_1' \gamma^\nu u_2)(\bar{u}_2' \gamma_\nu u_1) \right\}. \qquad (82.3)
$$

§66 で示された規則にしたがって，偏りの密度行列 ρ_1，ρ_1'，…… で記述される，粒子の始めおよび終りの状態に対して，つぎのように置き換える．

$$
\begin{aligned}
|M_{fi}|^2 \longrightarrow 16\pi^2 e^4 \Big\{ &\frac{1}{t^2} \mathrm{Sp}(\rho_2' \gamma^\mu \rho_2 \gamma^\nu)\,\mathrm{Sp}(\rho_1' \gamma_\mu \rho_1 \gamma_\nu)\\
&+ \frac{1}{u^2} \mathrm{Sp}(\rho_1' \gamma^\mu \rho_2 \gamma^\nu)\,\mathrm{Sp}(\rho_2' \gamma_\mu \rho_1 \gamma_\nu)\\
&- \frac{1}{tu} \mathrm{Sp}(\rho_2' \gamma^\mu \rho_2 \gamma^\nu \rho_1' \gamma_\mu \rho_1 \gamma_\nu) - \frac{1}{tu} \mathrm{Sp}(\rho_1' \gamma^\mu \rho_2 \gamma^\nu \rho_2' \gamma_\mu \rho_1 \gamma_\nu) \Big\}.
\end{aligned}
\qquad (82.4)
$$

偏りのない電子の散乱に対して（このとき散乱後のその偏りには興味を持たないで）すべての密度行列に対して $\rho = \frac{1}{2}(\hat{p} + m)$ と置き，その結果に $2\times 2 = 4$ を掛ける必要がある（電子の二つの始めの偏りについての平均と，二つの終りの偏りについての和である）．散乱断面積は公式 (65.23) で定義される．そこで (65.15 a) にしたがって $I^2 = \frac{1}{4} s(s - 4m^2)$ と置かねばならない．断面積をつぎの形に表わす．

$$
\begin{aligned}
d\sigma &= dt \frac{4\pi e^4}{s(s-4m^2)} \Big\{ f(t,u) + g(t,u) + f(u,t) + g(u,t) \Big\},\\
f(t,u) &= \frac{1}{16t^2} \mathrm{Sp}[(\hat{p}_2' + m)\gamma^\mu(\hat{p}_2 + m)\gamma^\nu]\,\mathrm{Sp}[(\hat{p}_1' + m)\gamma_\mu(\hat{p}_1 + m)\gamma_\nu],\\
g(t,u) &= -\frac{1}{16tu} \mathrm{Sp}[(\hat{p}_2' + m)\gamma^\mu(\hat{p}_2 + m)\gamma^\nu(\hat{p}_1' + m)\gamma_\mu(\hat{p}_1 + m)\gamma_\nu].
\end{aligned}
\qquad (82.5)
$$

---

1) M_{fi} のこの形は一般式 (71.5) と対応している．摂動論の消えない最初の近似で，ただ一つ $f_s(t, u) = 4\pi e^2/t$ だけが 0 と異なることがわかる．

$f(t,u)$ では（(22.9)，(22.10) を使って）始めに跡を計算し，続いて μ および ν についての和を行なう[1]．$g(t,u)$ では始めに（公式 (22.6) を使って），μ および ν についての和を行なう．その結果

$$f(t,u)=\frac{2}{t^2}[(p_1p_2)^2+(p_1p_2')^2+2m^2(m^2-p_1p_1')],$$

$$g(t,u)=\frac{2}{tu}(p_1p_2-2m^2)(p_1p_2).$$

あるいは，不変量 (82.2) によって表わして

$$f(t,u)=\frac{1}{t^2}\left[\frac{s^2+u^2}{2}+4m^2(t-m^2)\right],$$
$$g(t,u)=g(u,t)=\frac{2}{tu}\left(\frac{s}{2}-m^2\right)\left(\frac{s}{2}-3m^2\right) \tag{82.6}$$

を得る．このようにして，断面積は

$$d\sigma=r_e^2\frac{4\pi m^2\,dt}{s(s-4m^2)}\left\{\frac{1}{t^2}\left[\frac{s^2+u^2}{2}+4m^2(t-m^2)\right]\right.$$
$$\left.+\frac{1}{u^2}\left[\frac{s^2+t^2}{2}+4m^2(u-m^2)\right]+\frac{4}{tu}\left(\frac{s}{2}-m^2\right)\left(\frac{s}{2}-3m^2\right)\right\} \tag{82.7}$$

となる（ここで $r_e=e^2/m$ である）．

重心系にこの公式を適用しよう．ここで

$$s=4\varepsilon^2,\ t=-4p^2\sin^2\frac{\theta}{2},\ u=-4p^2\cos^2\frac{\theta}{2},$$
$$-dt=-2p^2\,d\cos\theta=\frac{p^2}{\pi}do \tag{82.8}$$

である（$|p|$，ε は，散乱によって変わらない電子の運動量の大きさおよびエネルギーである．θ は散乱角である）．非相対論の場合（$\varepsilon\approx m$）[2] では

1) 将来の引用のために公式

$$\frac{1}{4}\mathrm{Sp}(\hat{p}_1+m)\gamma^\mu(\hat{p}_2+m)\gamma^\nu=g^{\mu\nu}(m^2-p_1p_2)+p_1^\mu p_2^\nu+p_1^\nu p_2^\mu$$

を指摘しておこう．

2) 速度 v は小さい（$v\ll1$）と仮定される．しかしそれでも，摂動論の適用可能の条件，すなわち $e^2/v(=e^2/\hbar v)\ll1$ は，満足されるようになっているとする．

$$d\sigma = r_e^2 \frac{\pi m^4 dt}{p^2}\left(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{u^2}-\frac{1}{tu}\right)$$

$$= \left(\frac{e^2}{mv^2}\right)^2 \left(\frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}+\frac{1}{\cos^4\frac{\theta}{2}}-\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}\right) do$$

$$= \left(\frac{e^2}{mv^2}\right)^2 \frac{4(1+3\cos^2\theta)}{\sin^4\theta} do \qquad (\text{非相}) \qquad (82.9)$$

を得る（ここで $v = 2p/m$ は電子の相対速度で，非相対論的理論（III，§135 参照）と一致する）．任意速度の一般の場合に，(82.8) の置き換えと簡単な変形ののち公式 (82.7) は

$$d\sigma = r_e^2 \frac{m^2(\varepsilon^2+p^2)^2}{4p^4\varepsilon^2}\left[\frac{4}{\sin^4\theta}-\frac{3}{\sin^2\theta}+\left(\frac{p^2}{\varepsilon^2+p^2}\right)^2\left(1+\frac{4}{\sin^2\theta}\right)\right] do \qquad (82.10)$$

の形にもってくることができる (Ch. Möller, 1932)．超相対論的な場合 ($p^2 \approx \varepsilon^2$) には

$$d\sigma = r_e^2 \frac{m^2}{\varepsilon^2}\frac{(3+\cos^2\theta)^2}{4\sin^4\theta} do \qquad (\text{超相}). \qquad (82.11)$$

衝突前に電子の一つ（2番目としよう）が静止している実験室系では，飛行する電子から2番目の電子に与えられるエネルギーの[1]

$$\Delta = \frac{\varepsilon_1-\varepsilon'_1}{m} = \frac{\varepsilon'_2-m}{m} \qquad (82.12)$$

という量で，断面積を表わす．不変量は

$$s = 2m(m+\varepsilon_1), \quad t = -2m^2\Delta,$$

$$u = -2m(\varepsilon_1 - m - m\Delta). \qquad (82.13)$$

これらの式を (82.7) に代入して，速い1次電子の衝突の際起こる2次電子（あるいは，いわゆる **δ-電子**）のエネルギー分布に対してつぎのような公式に到達する．

$$d\sigma = 2\pi r_e^2 \frac{d\Delta}{\gamma^2-1}\left\{\frac{(\gamma-1)^2\gamma^2}{\Delta^2(\gamma-1-\Delta)^2}-\frac{2\gamma^2+2\gamma-1}{\Delta(\gamma-1-\Delta)}+1\right\}. \qquad (82.14)$$

ここで $\gamma = \varepsilon_1/m$ である．$m\Delta$ および $m(\gamma-1-\Delta)$ は衝突後の二つの電子の運動エネルギーである．両電子の同一性が，ここではこれらの量に関する公式の対称性に現われる．小さい方のエネルギーを持つものを反跳電子と呼ぶことに約束すれば，Δ は 0 から $(\gamma-1)/2$ までの値をとる．Δ が小さいとき，公式 (82.14) はつぎの形になる．

---

1) いろいろな基準系での弾性散乱のための関係式はII，§13 参照．

$$d\sigma = 2\pi r_e^2 \frac{\gamma^2}{\gamma^2-1}\frac{d\Delta}{\Delta^2} = \frac{2\pi r_e^2}{v_1^2}\frac{d\Delta}{\Delta^2}, \quad \Delta \ll \gamma - 1. \tag{82.15}$$

飛び去る電子の速度（$v_1 = |\boldsymbol{p}_1|/\varepsilon_1$）を使って表わしたこの公式は，非相対論的な場合への移行にあたってその形を保存する．したがって，これが形の上から非相対論的理論の結果（III（145.17）を見よ）と一致するのは当然である．

今度は電子による陽電子の散乱を考察しよう（H. Bhabha, 1936）．これは電子による電子の散乱と関係する一般化された反応の別の交叉チャネルである．p_-，p_+ を始めの，p'_-，p'_+ を終りの電子および陽電子の運動量とすれば，一つの場合から他の場合への移行は，置き換え

$$p_1 \longrightarrow -p'_+, \quad p_2 \longrightarrow p_-, \quad p'_1 \longrightarrow -p_+, \quad p'_2 \longrightarrow p'_-$$

によって実現する．このとき運動学的不変量（82.2）はつぎのような意味を持つ．

$$s = (p_- - p'_+)^2, \quad t = (p_+ - p'_+)^2, \quad u = (p_- + p_+)^2. \tag{82.16}$$

もしも ee-散乱が反応の s-チャネルならば，$\bar{e}e$-散乱は，u-チャネルである．s, t, u によって表わされる散乱振幅の平方は前のままで残り，公式（82.5）の分母で $s \to u$ の置き換えをする必要がある．このようにして，電子による陽電子の散乱断面積に対しては，（82.7）の代りに

$$d\sigma = r_e^2 \frac{4\pi m^2 dt}{u(u-4m^2)}\left\{\frac{1}{t^2}\left[\frac{s^2+u^2}{2} + 4m^2(t-m^2)\right]\right.$$
$$\left. + \frac{1}{u^2}\left[\frac{s^2+t^2}{2} + 4m^2(u-m^2)\right] + \frac{4}{tu}\left(\frac{s}{2} - m^2\right)\left(\frac{s}{2} - 3m^2\right)\right\}. \tag{82.17}$$

重心系で，不変量 s, t, u の値は，（82.8）と s と u との交換だけ異なっている．すなわち

$$s = -4p^2\cos^2\frac{\theta}{2}, \quad t = -4p^2\sin^2\frac{\theta}{2}, \quad u = 4\varepsilon^2. \tag{82.18}$$

非相対論的極限で公式（82.17）は，ラザフォードの公式に帰する．

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{mv^2}\right)^2 \frac{do}{\sin^4\dfrac{\theta}{2}} \qquad (\text{非相}) \tag{82.19}$$

（ここで $v = 2p'm$）．これは（82.17）の波括弧中の第1項から得られ，≪散乱≫型の図形（§74参照）から生じる．≪消滅≫型の図形（（82.17）の第2項）と，それと散乱型図

形との干渉（第3項）からの寄与は，非相対論的極限では0になる[1]．

任意の速度の一般の場合に，(82.17) の3項全部の寄与は同じ程度の大きさである（ただ小さい角度の領域で第1項が因子 $t^{-2}\infty\sin^{-4}\frac{\theta}{2}$ のために優勢になる）．類似の項を導入したのち，電子による陽電子の散乱断面積を（重心系で）

$$d\sigma=do\,\frac{r_e^2}{16}\frac{m^2}{\varepsilon^2}\left\{\frac{(\varepsilon^2+p^2)^2}{p^4}\frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}-\frac{8\varepsilon^4-m^4}{p^2\varepsilon^2}\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\right.$$
$$\left.+\frac{12\varepsilon^4+m^4}{\varepsilon^4}-\frac{4p^2(\varepsilon^2+p^2)}{\varepsilon^4}\sin^2\frac{\theta}{2}+\frac{4p^4}{\varepsilon^4}\sin^4\frac{\theta}{2}\right\}\tag{82.20}$$

の形に表わすことができる．

同種粒子の散乱の特長であった，$\theta\longrightarrow\pi-\theta$ の置き換えに対する対称性はもちろんなくなった．超相対論的極限では，式 (80.20) は電子－電子の断面積と，ただ因子 $\cos^4\frac{\theta}{2}$ だけが異なっている．すなわち

$$d\sigma_{e\bar{e}}=\cos^4\frac{\theta}{2}\,d\sigma_{ee}\qquad(\text{超相}).\tag{82.21}$$

衝突前に粒子の一つ（たとえば電子）が静止している実験室系では，ふたたび

$$\Delta=\frac{\varepsilon_+-\varepsilon'_+}{m}=\frac{\varepsilon'_--m}{m}\tag{82.22}$$

という量，すなわち陽電子から電子に与えられるエネルギーを導入する．(82.13) と同様に，今度は

$$s=-2m(\varepsilon_+-m-m\Delta),\quad t=-2m^2\Delta,\quad u=2m(m+\varepsilon_+).$$

これらの式を (82.17) に代入し，簡単な変形ののちに2次電子のエネルギー分布に対し

---

1) 非相対論の極限では，振幅 u は2成分になる――(23.12) 参照．このとき，電子の 4-ベクトル $\bar{u}'_-\gamma^\mu u_-=(2mw'^*_-w_-,\ 0)$ は陽電子に対するものと同じである．振幅 (74.15) のなかの散乱項は

$$-(2m)^2(w'^*_-w_-)(w'^*_+w_+)U_q$$

である．ここで

$$U_q=\frac{4\pi e^2}{q^2}=-\frac{4\pi e^2}{q^2}$$

である（散乱型図形の仮想的光子に対し，重心系では $q^0=0$ である）．U_q は異種電荷のクーロン相互作用のエネルギー $(-e^2/r)$ のフーリエ成分である．消滅型図形での仮想的光子に対しては，$q^0=2m(=2mc)$ であり，このためにこの項は極限で0になる．

て，つぎのような式を得る．

$$d\sigma = 2\pi r_e^2 \frac{d\Delta}{\gamma^2-1}\left\{\frac{\gamma^2}{\Delta^2} - \frac{2\gamma^2+4\gamma+1}{\gamma+1}\frac{1}{\Delta} + \frac{3\gamma^2+6\gamma+4}{(\gamma+1)^2} - \frac{2\gamma}{(\gamma+1)^2}\Delta + \frac{1}{(\gamma+1)^2}\Delta^2\right\}. \tag{82.23}$$

ここで $\gamma=\varepsilon_+/m$ である．Δ は0から $\gamma-1$ までの値をとる．$\Delta \ll \gamma-1$ のとき，(82.23) から電子の散乱に対するのと同じ公式 (82.15) が得られる．

電子や陽電子の散乱の際の偏りの効果は，§66 で記述された一般則によって計算される．多少とも一般的な場合には，計算は膨大な式になる．ここではこれらについて，原論文あるいは特別な総合報告を引用して[1]，若干の注意だけに限ることにしよう．

考察された（消えない最初の）摂動論近似で，断面積には始めおよび終りの粒子の偏りのベクトルについて線型の項はない．非相対論的理論（III，§138）と同様に，このような項は散乱行列のエルミート性からくる要求によって禁止される．したがって衝突粒子のなかの一つが偏っていても散乱断面積は変わらない．また偏らない粒子の散乱はその粒子の偏りをもたらさない．

これらの要求は，断面積のなかの，この過程に加わる（始めおよび終りの）粒子中の三つの偏りの積を含む干渉項を禁止する．しかしながら，断面積は2重および4重の干渉項を含んでいる．同一でない粒子（電子と陽電子; 電子と μ-中間子）の散乱のとき，非相対論的極限ではこれらの項は0になる．なぜかというと，スピン軌道相互作用がないからである．同一粒子の衝突では，交換効果のために非相対論的な場合にすでに干渉項が現われる．

問　題

1. 非相対論の場合に，偏った電子の散乱断面積を求めよ．

解 非相対論の場合に，標準表示の双スピノール振幅は2成分で，密度行列は2行2列の行列 (29.20) である．散乱振幅 (82.3) で $\mu=\nu=0$ で（標準表示の）対角行列 γ^0 を含む項が0と異なった．(82.4) の代りに

---

1) A. M. Bincer, *Phys. Rev.* **107**, 1434 (1957); G. W. Ford, C. J. Mullin, *Phys. Rev.* **108**, 477 (1957) (訂正：*Phys. Rev.* **110**, 1485(1958)); A. Raczka, R. Raczka, *Phys. Rev.* **110**, 1469(1958); W. H. McMaster, *Rev. Mod. Phys.* **33**, 8(1961)

$$\sum_{偏り} |M_{fi}|^2 = 16\pi^2 e^4 \cdot 4m^4 \left\{\left(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{Sp}(1+\boldsymbol{\sigma\zeta}_1)\,\mathrm{Sp}(1+\boldsymbol{\sigma\zeta}_2)\right.$$

$$\left. -\frac{2}{tu}\mathrm{Sp}(1+\boldsymbol{\sigma\zeta}_1)(1+\boldsymbol{\sigma\zeta}_2)\right\} = 16\pi^2 e^4 \cdot 4m^4 \cdot 4\left[\frac{1}{t^2}+\frac{1}{u^2}-\frac{1}{tu}(1+\boldsymbol{\zeta}_1\boldsymbol{\zeta}_2)\right]$$

となる（和は終りの電子の偏りについて行なう）．これから散乱断面積は

$$d\sigma = d\sigma_0\left(1-\frac{\sin^2\theta}{1+3\cos^2\theta}\boldsymbol{\zeta}_1\boldsymbol{\zeta}_2\right)$$

となる．ここで θ は重心系での散乱角で，$d\sigma_0$ は偏りのない粒子の断面積 (82.9) である[1]．

電子による陽電子の散乱に対してこの近似では偏りへの依存性はない ($d\sigma = d\sigma_0$)．非相対論の極限で，電子および陽電子の振幅 u_p および u_{-p} のなかで，成分の異なる対が0と異なることに気付けば，これは容易に証明することができる．

2.　非相対論の場合に，偏った標的による偏りのない線束の散乱の際の，散乱電子の偏りを決定せよ．

解　始めの偏り $\boldsymbol{\zeta}_2$ と検出される終りの偏り $\boldsymbol{\zeta}'_1$（終りの電子のなかの一つの偏りだけが検出される）が与えられたときの散乱断面積を計算せよ．問題1と同じ方法で

$$d\sigma = \frac{1}{2}d\sigma_0\left[1-\boldsymbol{\zeta}'_1\boldsymbol{\zeta}_2\frac{2\cos\theta\,(1-\cos\theta)}{1+3\cos^2\theta}\right]$$

を得る．これから散乱電子の偏りのベクトルとしては

$$\boldsymbol{\zeta}_1^{(f)} = -\boldsymbol{\zeta}_2\frac{2\cos\theta\,(1-\cos\theta)}{1+3\cos^2\theta}.$$

3.　非相対論の場合，偏りのない電子で散乱されたとき，完全に偏った電子のスピンの回転の確率を決定せよ．

解　同様にして，偏り $\boldsymbol{\zeta}_1$ および $\boldsymbol{\zeta}'_1$ が与えられたときの断面積が見いだされる．すなわち

$$d\sigma = \frac{1}{2}d\sigma_0\left[1+\boldsymbol{\zeta}_1\boldsymbol{\zeta}'_1\frac{2\cos\theta\,(1+\cos\theta)}{1+3\cos^2\theta}\right].$$

$\boldsymbol{\zeta}_1\boldsymbol{\zeta}'_1 = 1$ と置き，これからスピンの方向の回転の確率が得られる．

---

1)　完全に偏った電子に対して，この公式はIII，§135の問題の結果と一致する（このとき $|\boldsymbol{\zeta}_1| = |\boldsymbol{\zeta}_2| = 1$，$\boldsymbol{\zeta}_1\boldsymbol{\zeta}_2 = \cos\alpha$．$\alpha$ は電子の偏りのあいだの角度である）．

$$\frac{d\sigma}{d\sigma_0}=\frac{(1-\cos\theta)^2}{2(1+3\cos^2\theta)}.$$

4. 超相対論的な場合に，平行および反平行のスピンを持った螺線状電子の散乱断面積の比を求めよ．

解　(29.22) にしたがって，(82.4) で

$$\rho_1=\frac{1}{2}\hat{p}_1(1-2\lambda_1\gamma^5),\quad \rho_2=\frac{1}{2}\hat{p}_2(1-2\lambda_2\gamma^5),\quad \rho'_1=\frac{1}{2}\hat{p}'_1,\quad \rho'_2=\frac{1}{2}\hat{p}'_2$$

と置く必要がある．ここで $\lambda_1,\ \lambda_2=\pm 1/2$ である．跡の計算は§22で導かれた法則によって行なわれる．特に

$$\frac{1}{16}\mathrm{Sp}(\gamma^5\hat{a}\gamma^\mu\hat{b}\gamma^\nu)\,\mathrm{Sp}(\gamma^5\hat{c}\gamma_\mu\hat{d}\gamma_\nu)=i^2(e^{\rho\mu\lambda\nu}a_\rho b_\lambda)(e_{\sigma\mu\tau\nu}c^\sigma d^\tau)$$
$$=2(\delta^\rho_\sigma\delta^\lambda_\tau-\delta^\rho_\tau\delta^\lambda_\sigma)a_\rho b_\lambda c^\sigma d^\tau=2(ac)(bd)-2(ad)(bc)$$

である．この結果

$$\frac{d\sigma}{dt}\propto\left(\frac{s^2+u^2}{t^2}+\frac{s^2+t^2}{u^2}+\frac{2s^2}{tu}\right)+4\lambda_1\lambda_2\left(\frac{s^2-u^2}{t^2}+\frac{s^2-t^2}{u^2}+\frac{2s^2}{tu}\right).$$

（重心系で）衝突電子の運動量は互いに逆であるので，同一の螺線度 ($\lambda_1=\lambda_2$) は反平行スピンに，異なる螺線度 ($\lambda_1=-\lambda_2$) は平行なスピンに対応する．(82.8) から $s,\ t,\ u$ を代入し（このとき $\boldsymbol{p}^2\approx\varepsilon^2$ である)，求める比は

$$\frac{d\sigma_{\uparrow\uparrow}}{d\sigma_{\uparrow\downarrow}}=\frac{1}{8}(1+6\cos^2\theta+\cos^4\theta). \tag{1}$$

この比は $\theta=\pi/2$ のときに極小 (1/8) である．

5. 電子による陽電子散乱に対して同じことを行なえ．

解　この場合 (82.4) の代りに

$$|M_{fi}|^2\longrightarrow 16\pi^2e^4\left\{\frac{1}{t^2}\mathrm{Sp}(\rho'_-\gamma^\mu\rho_-\gamma^\nu)\,\mathrm{Sp}(\rho_+\gamma_\mu\rho'_+\gamma_\nu)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{tu}\mathrm{Sp}(\rho'_-\gamma^\mu\rho_-\gamma^\nu\rho_+\gamma_\mu\rho'_+\gamma_\nu)+\cdots\right\}$$

を計算する必要がある（残りの項は上に書いた項から ρ_+ と ρ'_- の置き換えによって求められる)．密度行列は

$$\rho_-=\frac{1}{2}\hat{p}_-(1-2\lambda_-\gamma^5),\quad \rho'_+=\frac{1}{2}\hat{p}'_+(1+2\lambda_+\gamma^5),\quad \rho'_-=\frac{1}{2}\hat{p}'_-,\quad \rho_+=\frac{1}{2}\hat{p}'_+.$$

ここで λ_+, $\lambda_- = \pm 1/2$ である（このとき，電子に対してと同様に陽電子に対しても $\lambda_+ = 1/2$ はスピンがその運動量に平行であることを意味している）．計算の結果

$$\frac{d\sigma}{dt} \propto \left(\frac{s^2+u^2}{t^2}+\frac{s^2+t^2}{u^2}+\frac{2s^2}{tu}\right)-4\lambda_+\lambda_-\left(\frac{s^2-u^2}{t^2}+\frac{s^2+t^2}{u^2}+\frac{2s^2}{tu}\right).$$

これから，断面積の比として問題4の（1）と一致する結果が得られる．

6. 電子による μ-中間子の散乱断面積を求めよ．

解 この過程は全部で一つの図形（74.17）によって記述される．(82.5) の代りに

$$d\sigma = \frac{\pi e^4 dt}{(p_e p_\mu)^2 - m^2\mu^2} f(t,u) = \frac{4\pi e^4 dt}{[s-(m+\mu)^2][s-(m-\mu)^2]} f(t,u),$$

$$f(t,u) = \frac{1}{16t^2}\mathrm{Sp}[(\hat{p}'_\mu+\mu)\gamma^\lambda(\hat{p}_\mu+\mu)\gamma^\nu]\,\mathrm{Sp}[(\hat{p}'_e+m)\gamma_\lambda(\hat{p}_e+m)\gamma_\nu] \tag{1}$$

となる（p_e, p_μ および p'_e, p'_μ は電子と μ-中間子の始めと終りの 4-運動量である．また m と μ はそれらの質量である）．不変量は

$$s = (p_e+p_\mu)^2 = m^2+\mu^2+2p_e p_\mu,$$

$$t = (p_e-p'_e)^2 = 2(m^2-p_e p'_e) = 2(\mu^2-p_\mu p'_\mu),$$

$$u = (p_e-p'_\mu)^2 = m^2+\mu^2-2p_e p'_\mu,$$

$$s+t+u = 2(m^2+\mu^2).$$

計算の結果は

$$f = \frac{2}{t^2}\left\{(p_e p_\mu)^2+(p_e p'_\mu)^2+\frac{1}{2}(m^2+\mu^2)t\right\}$$

$$= \frac{1}{t^2}\left\{\frac{s^2+u^2}{2}+(m^2+\mu^2)(2t-m^2-\mu^2)\right\}. \tag{2}$$

公式（1）および（2）が提起された問題の解になる．重心系では

$$d\sigma = \frac{e^4 do}{8(\varepsilon_e+\varepsilon_\mu)^2 p^4 \sin^4\frac{\theta}{2}}$$

$$\times\left[(\varepsilon_e\varepsilon_\mu+p^2)^2+(\varepsilon_e\varepsilon_\mu+p^2\cos\theta)^2-2(m^2+\mu^2)p^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right].$$

ここで $do = 2\pi\sin\theta\, d\theta$, ε_e, ε_μ は電子および μ-中間子のエネルギー，$p^2 = \varepsilon_e^2 - m^2 = \varepsilon_\mu^2 - \mu^2$ である．$p^2 \ll \mu^2$ のとき，動かないクーロン中心による散乱に対する公式 (81.9) にもどる．超相対論的（$p^2 \gg \mu^2$）な場合には

$$d\sigma = \frac{e^4}{8p^2}\frac{1+\cos^4\dfrac{\theta}{2}}{\sin^4\dfrac{\theta}{2}}do.$$

（衝突前の電子が静止している）実験室系では

$$d\sigma = 2\pi\left(\frac{e^2}{m}\right)^2\frac{d\varDelta}{v_\mu^2\varDelta^2}\left(1 - v_\mu^2\frac{\varDelta}{\varDelta_{\max}} + \frac{m^2}{2\varepsilon_\mu^2}\varDelta^2\right)$$

である．ここで ε_μ は通過する μ-中間子のエネルギー，$v_\mu = p_\mu/\varepsilon_\mu$ は速度である．$m\varDelta = \varepsilon_e' - m = \varepsilon_\mu - \varepsilon_\mu'$ は反跳電子のエネルギーである．そして

$$\varDelta_{\max} = \frac{2p_\mu^2}{m^2 + \mu^2 + 2m\varepsilon_\mu}$$

は（後方散乱のときに得られる）$\varDelta$ の極大値である．

7. 超相対論的 ($\varepsilon_\mu \gg \mu$, $\varepsilon_e \gg m$) な場合，平行および反平行スピンの螺線状電子と μ-中間子の散乱断面積の比を決定せよ．

解 問題 4 と同様にして

$$\frac{d\sigma_{\uparrow\uparrow}}{d\sigma_{\uparrow\downarrow}} = \cos^4\frac{\theta}{2}$$

である (θ は重心系における散乱角である)．

8. 電子対が μ-中間子対に変換する断面積を求めよ (В. Б. Берестецкий, И. Я. Померанчук, 1955)．

解 これは μe-散乱が関係する反応の別の交叉チャネルである．このチャネルでは

$$s = (p_e - \bar{p}_\mu)^2, \quad t = (p_e + \bar{p}_e)^2, \quad u = (p_e - p_\mu)^2.$$

ここで p_e, $\bar{p}_e$ は電子と陽電子の，そして p_μ, $\bar{p}_\mu$ は μ-中間子と反 μ-中間子の 4-運動量である．反応のしきいは（重心系で）2μ に等しい電子対のエネルギーに対応する．したがって $t > 4\mu^2$ でなければならない．衝突前の電子が静止している実験室系では，陽電子はエネルギー ε_+ を持ち

$$t = 2m(\varepsilon_+ + m) \approx 2m\,\varepsilon_+$$

であり，したがって $\varepsilon_+ > \varepsilon_{\text{しきい}}$ でなければならない．ここでしきいのエネルギー $\varepsilon_{\text{しきい}} = 2\mu^2/m$ である（ここおよび以下で，不等式 $\mu \gg m$ で許されるすべての省略が行なわれる）．

（問題 6 の（1），（2）の代りに）微分断面積は

$$d\sigma = \frac{4\pi\, e^4 ds}{(t-4m^2)\,t} f(t,u) \approx 4\pi e^4 \frac{ds}{t^4}\left[\frac{s^2+u^2}{2} + 2\mu^2 t - \mu^4\right].$$

t が与えられたとき，s という量は，方程式 $su \approx \mu^4$，$s+t+u \approx 2\mu^2$……で決定される境界のあいだの値をとる．すなわち

$$\mu^2 - \frac{t}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{t(t-4\mu^2)} \leqslant s \leqslant \mu^2 - \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{t(t-4\mu^2)}.$$

初等的な積分の結果

$$\sigma = \frac{4\pi}{3} r_e^2 \frac{m^2}{t}\sqrt{1-\frac{4\mu^2}{t}}\left(1+\frac{2\mu^2}{t}\right), \quad r_e = \frac{e^2}{m}$$

となる（実験室系で $t = 2m\varepsilon_+$ である）[1]．この公式はしきいの近傍では使えない．なぜかというと，このとき $\varepsilon_+ - \varepsilon_{しきい} \sim \mu e^4$ で，形成される μ-中間子は自由粒子と考えてはいけない（それらのあいだのクーロン相互作用を考慮すると，断面積は $\varepsilon_+ \longrightarrow \varepsilon_{しきい}$ のときに０に近づかないで，定数に近づく．III，§144 参照）．

§83. ブライトの方程式

よく知られているように，古典電気力学では相互作用をする粒子系は，ラグランジュ関数を使って記述される．これは粒子自身の座標と速度のみに依存し，$\sim 1/c^2$ の項までの精度で正しい（II，§65）．この事情は，輻射が $1/c^3$ の程度の効果としてのみ現われていることと関連している．

量子論ではこの事情は，２次の項を考慮するシュレーディンガー方程式によって系を記述できることに対応している．外部電磁場中を運動する電子に対しては，このような方程式は§33で確立された．今われわれは相互作用をする粒子系を記述する同様な方程式を導こうとしている．

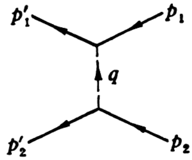
２粒子の散乱振幅の相対論的な式から出発しよう．非相対論的近似でそれは普通のボルン振幅に移行する．この振幅は２電荷の静電相互作用のポテンシャルのフーリエ成分に比例する．振幅を２次の程度まで計算して，$\sim 1/c^2$ の項を考慮した，対応するポテンシャルの形を確立することができる．

始めに２粒子は異なり，質量 m_1 および m_2 を持つと仮定しよう（たとえば，電子と

---

1)　この断面積は $\varepsilon_+ = 1.7\,\varepsilon_{しきい}$ のとき極大になる．極大におけるこの値は，同じエネルギーの２光子消滅の断面積の20分の１である．

μ-中間子). このとき散乱は図形



で記述される. これに振幅

$$M_{fi} = e^2(\bar{u}'_1 \gamma^\mu u_1)\, D_{\mu\nu}(q)\, (\bar{u}'_2 \gamma^\nu u_2),$$
$$q = p'_1 - p_1 = p_2 - p'_2 \tag{83.1}$$

が対応する（ここで粒子の電荷が同じであると仮定される. 逆の場合, e^2 は $-e^2$ に置き換えられる).

普通のでなくクーロン・ゲージの光子の伝播関数 $D_{\mu\nu}$ (77.12), (77.13) をとれば, これから先の計算は非常に簡単になる[1]. すなわち

$$D_{00} = -\frac{4\pi}{q^2}, \quad D_{0i} = 0, \quad D_{ik} = \frac{4\pi}{q^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}\left(\delta_{ik} - \frac{q_i q_k}{q^2}\right). \tag{83.2}$$

このとき散乱振幅は

$$M_{fi} = e^2\{(\bar{u}'_1 \gamma^0 u_1)(\bar{u}'_2 \gamma^0 u_2) D_{00} + (\bar{u}'_1 \gamma^i u_1)(\bar{u}'_2 \gamma^k u_2) D_{ik}\}. \tag{83.3}$$

$1/c$ を含むすべての項を無視すると, 波括弧内の第2項は完全に落ち, 第1項は

$$M_{fi} = -2m_1 \cdot 2m_2 (w_1^{(0)\prime *} w_1^{(0)}) (w_2^{(0)\prime *} w_2^{(0)})\, U(q) \tag{83.4}$$

を与える. ここで

$$U(q) = \frac{4\pi e^2}{q^2} \tag{83.5}$$

で, §23 で導入された非相対論的平面波の（2成分）スピノール振幅を $w_1^{(0)}$, $w_2^{(0)}$ で表わす. 関数 $U(q)$ はクーロン相互作用のポテンシャル・エネルギー $U(r) = e^2/r$ のフーリエ成分を表わしている.

($1/c$ についての) つぎの近似で自由粒子の（積分 $\int |\varphi_{シュレ}|^2 d^3x$ で規格化された）≪シュレーディンガー≫波動関数 $\varphi_{シュレ}$ は方程式

---

1) この節でわれわれは, すべての中間の式で因子 c を, また最後の式で $\hbar$ もまた書くことにしよう.

$$\mathrm{H}^{(0)}\varphi_{シュレ} = (\varepsilon - mc^2)\varphi_{シュレ}$$
$$\mathrm{H}^{(0)} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{\mathbf{p}^4}{8m^3c^2},\quad \mathbf{p} = -i\nabla \tag{83.6}$$

を満足する．ここでは運動エネルギーの相対論的表式の，つぎの展開項が考慮されている．このような平面波の（スピノール）振幅を w としよう（$1/c\to 0$ のとき，これは $w^{(0)}$ に移る）．もちろん，求める振幅はこのような振幅を使って表わされる必要がある．それは外観上粒子の相互作用の≪シュレーディンガー≫ポテンシャルを，考えられている近似で決定することができるようにするためである．

公式（33.11）に対応して自由粒子の双スピノール振幅は，ここで必要な精度で≪シュレーディンガー≫振幅を使って，つぎの形に表わされる．

$$u = \sqrt{2m}\begin{pmatrix}\left(1 - \dfrac{p^2}{8m^2c^2}\right)w \\ \dfrac{\sigma p}{2mc}w\end{pmatrix}. \tag{83.7}$$

この公式を使って

$$\bar{u}'_1\gamma^0 u_1 = u'^*_1 u_1 = 2m_1\left(1 - \frac{p'^2_1 + p^2_1}{8m^2_1c^2}\right)w'^*_1 w_1 + \frac{1}{2m_1c^2}w'^*_1(\sigma p'_1)(\sigma p_1)w_1$$
$$= 2m_1 w'^*_1\left\{1 - \frac{q^2}{8m^2_1c^2} + \frac{i\sigma[qp_1]}{4m^2_1c^2}\right\}w_1,$$
$$\bar{u}'_1\boldsymbol{\gamma}u_1 = u'^*_1\boldsymbol{\alpha}u_1 = \frac{1}{c}w'^*_1\{\sigma(\sigma p_1) + (\sigma p'_1)\sigma\}w_1$$
$$= \frac{1}{c}w'^*_1\{i[\sigma q] + 2p_1 + q\}w_1$$

（ここで $q = p'_1 - p_1 = p_2 - p'_2$ である）．（$\bar{u}'_2\gamma^0 u_2$）および（$\bar{u}'_2\boldsymbol{\gamma}u_2$）に対する同様な式は，添字1を2に置き換えるのと，それに対応して q を $-q$ に置き換える点だけが異なっている．結果として

$$M_{fi} = -2m_1\cdot 2m_2(w'^*_1 w'^*_2 U(p_1, p_2, q)w_1 w_2) \tag{83.8}$$

の形の散乱振幅を得る．ここで

$$U(p_1, p_2, q) = 4\pi e^2\left\{\frac{1}{q^2} - \frac{1}{8m^2_1c^2} - \frac{1}{8m^2_2c^2} + \frac{(qp_1)(qp_2)}{m_1m_2c^2q^4} - \frac{p_1p_2}{m_1m_2c^2q^2}\right.$$
$$+ \frac{i\sigma_1[qp_1]}{4m^2_1c^2q^2} - \frac{i\sigma_1[qp_2]}{2m_1m_2c^2q^2} - \frac{i\sigma_2[qp_2]}{4m^2_2c^2q^2} + \frac{i\sigma_2[qp_1]}{2m_1m_2c^2q^2}$$

$$+\frac{(\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{q})\,(\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{q})}{4m_1m_2c^2q^2}-\frac{\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2}{4m_1m_2c^2}\Bigg\}. \tag{83.9}$$

(パウリ行列の添字 1, 2 は，それが作用する双スピノールの添字を示している．すなわち $\boldsymbol{\sigma}_1$ は w_1 に，$\boldsymbol{\sigma}_2$ は w_2 に作用する)．

関数 $U(\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \boldsymbol{q})$ は運動量表示での粒子の相互作用の演算子である．これは座標表示での演算子 $\mathrm{U}(\mathbf{p}_1,\ \mathbf{p}_2,\ \boldsymbol{r})$ とつぎの式で結ばれている．

$$\int e^{-i(\boldsymbol{p}'_1\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{p}'_2\boldsymbol{r}_2)}\mathrm{U}(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\boldsymbol{r})\,e^{i(\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{r}_2)}d^3x_1\,d^3x_2$$
$$=(2\pi)^3\delta(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}'_1-\boldsymbol{p}'_2)\,U(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{q}). \tag{83.10}$$

もしも演算子 U が単に関数 $U(\boldsymbol{r})\,(\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)$ を表わすとすれば，$U(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{q})$ は $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2$ には依存しない．そして (83.10) は普通のフーリエ成分の普通の定義

$$\int e^{-i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}}U(\boldsymbol{r})\,d^3x=U(\boldsymbol{q})$$

になる．これから，$\mathrm{U}(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\boldsymbol{r})$ を見いだすためには積分

$$\int e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}}U(\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \boldsymbol{q})\,\frac{d^3q}{(2\pi)^3}$$

を計算し，続いて $\boldsymbol{p}_1$，$\boldsymbol{p}_2$ を演算子 $\mathbf{p}_1=-i\boldsymbol{\nabla}_1$，$\mathbf{p}_2=-i\boldsymbol{\nabla}_2$ に置き換え，これを他のすべての因子の右に置く必要がある．

つぎの式を微分することによって，必要な積分が計算される．

$$\int e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}}\frac{4\pi}{q^2}\frac{d^3q}{(2\pi)^3}=\frac{1}{r}. \tag{83.11}$$

そこで，勾配をとると

$$\int e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}}\frac{4\pi\,\boldsymbol{q}}{q^2}\frac{d^3q}{(2\pi)^3}=-i\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{r}=\frac{i\boldsymbol{r}}{r^3}. \tag{83.12}$$

さらに ($\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ を定ベクトルとして)

$$\int\frac{(\boldsymbol{a}\boldsymbol{q})\,(\boldsymbol{b}\boldsymbol{q})}{q^4}e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}}\frac{d^3q}{(2\pi)^3}=\frac{i}{2}\left(\boldsymbol{a}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\right)\int e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}}\left(\boldsymbol{b}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{q}}\right)\frac{1}{q^2}\frac{d^3q}{(2\pi)^3}.$$

得られた積分は部分積分をすると (83.11) となり

$$\int\frac{4\pi\,(\boldsymbol{a}\boldsymbol{q})\,(\boldsymbol{b}\boldsymbol{q})}{q^4}e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}}\frac{d^3q}{(2\pi)^3}=\frac{1}{2}\,(\boldsymbol{a}\boldsymbol{\nabla})\,\frac{\boldsymbol{b}\boldsymbol{r}}{r}=\frac{1}{2r}\left[\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}-\frac{(\boldsymbol{a}\boldsymbol{r})\,(\boldsymbol{b}\boldsymbol{r})}{r^2}\right] \tag{83.13}$$

を与える．最後に

$$\int \frac{4\pi (\boldsymbol{aq})(\boldsymbol{bq})}{\boldsymbol{q}^2} e^{i\boldsymbol{qr}} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} = -(\boldsymbol{a}\nabla)(\boldsymbol{b}\nabla)\frac{1}{r}.$$

微係数を開くときに，この式はそのなかに δ-関数 $\delta(\boldsymbol{r})$ を含んでいることを考慮する必要がある．それを分離するために，$\boldsymbol{r}$ の方向について平均したのち

$$-\overline{(\boldsymbol{a}\nabla)(\boldsymbol{b}\nabla)\frac{1}{r}} = -\frac{1}{3}(\boldsymbol{ab})\Delta\frac{1}{r} = \frac{4\pi}{3}(\boldsymbol{ab})\delta(\boldsymbol{r})$$

であることに注意しよう．今度は微係数を普通のように開いて

$$\int \frac{4\pi (\boldsymbol{aq})(\boldsymbol{bq})}{\boldsymbol{q}^2} e^{i\boldsymbol{qr}} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} = \frac{1}{r^3}\left\{\boldsymbol{ab} - 3\frac{(\boldsymbol{ar})(\boldsymbol{br})}{r^2}\right\} + \frac{4\pi}{3}\boldsymbol{ab}\,\delta(\boldsymbol{r}) \qquad (83.14)$$

を得る（$\boldsymbol{r}$ の方向で平均すると，第1項は0になり，当然のことだが δ-関数を含む項だけが残る）．

これらの公式を使って，粒子の相互作用の演算子として，つぎのような最終的な式を得る．

$$\begin{aligned} \mathrm{U}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \boldsymbol{r}) = {} & \frac{e^2}{r} - \frac{\pi e^2 \hbar^2}{2c^2}\left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2}\right)\delta(\boldsymbol{r}) \\ & - \frac{e^2}{2m_1 m_2 c^2 r}\left[\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 + \frac{\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\mathbf{p}_1)\mathbf{p}_2}{r^2}\right] - \frac{e^2\hbar}{4m_1^2 c^2 r^3}[\boldsymbol{r}\mathbf{p}_1]\boldsymbol{\sigma}_1 \\ & + \frac{e^2\hbar}{4m_2^2 c^2 r^3}[\boldsymbol{r}\mathbf{p}_2]\boldsymbol{\sigma}_2 - \frac{e^2\hbar}{2m_1 m_2 c^2 r^3}\{[\boldsymbol{r}\mathbf{p}_1]\boldsymbol{\sigma}_2 - [\boldsymbol{r}\mathbf{p}_2]\boldsymbol{\sigma}_1\} \\ & + \frac{e^2\hbar^2}{4m_1 m_2 c^2}\left\{\frac{\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2}{r^3} - 3\frac{(\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{r})(\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{r})}{r^5} - \frac{8\pi}{3}\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2\,\delta(\boldsymbol{r})\right\}. \end{aligned} \qquad (83.15)$$

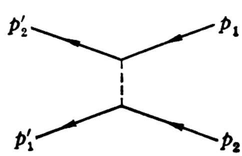
この近似で2粒子系の全ハミルトニアンは

$$\mathrm{H} = \mathrm{H}_1^{(0)} + \mathrm{H}_2^{(0)} + \mathrm{U}. \qquad (83.16)$$

ここで $\mathrm{H}^{(0)}$ は (83.6) からとった自由粒子のハミルトニアンである．

2個の電子

もしも両粒子が同一なら（2個の電子），散乱振幅のなかに ≪交換の≫ 図形



で表わされる2番目の項が現われる．しかしながら，相互作用演算子のなかでのその寄与を計算する必要はない．すなわち，シュレーディンガー方程式による同一粒子の系の記述は，もしも方程式の解の必要な対称化をすることにすれば，同一でない粒子に対するのと同じ相互作用演算子によって行なうことができるということである．特に，粒子の散乱の考察にあたって，このような対称化により両方のファインマン図形に対応する振幅への寄与を自動的に考慮している．

このようにして，単に $m_1 = m_2$ と置けば，2電子系のハミルトニアンは公式(83.15)，(82.16) から得られる[1]．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{H} &= \frac{1}{2m}(\mathbf{p}_1^2 + \mathbf{p}_2^2) - \frac{1}{8m^3c^2}(\mathbf{p}_1^4 + \mathbf{p}_2^4) + U(\mathbf{p}_1,\ \mathbf{p}_2,\ \boldsymbol{r}),\\
\mathrm{U}(\mathbf{p}_1,\ \mathbf{p}_2,\ \boldsymbol{r}) &= \frac{e^2}{r} - \pi\left(\frac{e\hbar}{mc}\right)^2\delta(\boldsymbol{r}) - \frac{e^2}{2m^2c^2r}\left(\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 + \frac{\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\mathbf{p}_1)\,\mathbf{p}_2}{r^2}\right)\\
&\quad + \frac{e^2\hbar}{4m^2c^2r^3}\left\{-(\boldsymbol{\sigma}_1 + 2\boldsymbol{\sigma}_2)\,[\boldsymbol{r}\mathbf{p}_1] + (\boldsymbol{\sigma}_2 + 2\boldsymbol{\sigma}_1)\,[\boldsymbol{r}\mathbf{p}_2]\right\}\\
&\quad + \frac{1}{4}\left(\frac{e\hbar}{mc}\right)^2\left\{\frac{\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2}{r^3} - \frac{3(\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{r})(\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{r})}{r^5} - \frac{8\pi}{3}\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2\,\delta(\boldsymbol{r})\right\}.
\end{aligned}
\tag{83.17}
$$

しかし $\delta(\boldsymbol{r})$ を持つ項の存在は，特別強い相互作用の存在を意味しない．すべての補正項の大体の大きさは同じである．そして上に行なった展開の意味で，これらすべては第1項，すなわちクーロン相互作用にくらべて小さいと考える必要がある．

相互作用演算子 (83.15) の項の異なる群は，異なる性質を持つ．第1行目の項は純軌道性の起源を持つ．第2行目と3行目の第1項は，粒子のスピン演算子に線型な項からなる．これはスピン軌道相互作用に対応する．最後に第3行目のスピン演算子について2次の項は，スピン－スピン相互作用を記述している[2]．

電子と陽電子

電子と陽電子からなる系は特別な考察を必要とする．この場合散乱振幅は2項から成り

---

1) ハミルトニアン (83.17) を持った波動方程式は，最初にブライトによって立てられた (G. Breit, 1929)．しかしその首尾一貫した量子力学的導出はエリ・デ・ランダウにより与えられた (1932)．

2) この相互作用は，原子準位の微細構造と関連してIII，§72 で触れた．また電子と原子核のスピン－スピン相互作用は，準位の超微細構造と関連して III，§120 で考察された．特に，公式III (120.9) はスピン－スピン相互作用の演算子中の δ-関数の項に対応する．

立っている．すなわち

$$M_{fi} = -e^2[\bar{u}(p'_-)\gamma^\mu u(p_-)]D_{\mu\nu}(p_- - p'_-)[\bar{u}(-p_+)\gamma^\nu u(-p'_+)]$$
$$+ e^2[\bar{u}(-p_+)\gamma^\mu u(p_-)]D_{\mu\nu}(p_- + p_+)[\bar{u}(p'_-)\gamma^\nu u(-p'_+)] \qquad (83.18)$$

である（1番目は散乱型，2番目は消滅型図形に対応する）．≪電子＋陽電子≫ 系の波動関数は反対称である必要はないので，2項とも相互作用演算子に独立な寄与をする．

第1項（この構造は振幅 (83.1) の構造と一致する）は当然 (83.17) と共通符号だけが異なる演算子へ導かれる．第2項の変形をしよう．

ここで普通のゲージの光子伝播関数

$$D_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{k^2}g_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{\dfrac{\omega^2}{c^2} - k^2}g_{\mu\nu}$$

を用いよう．与えられた場合 $k = p_+ + p_-$ である．そして粒子は≪ほとんど非相対論的≫であるので

$$\frac{\omega^2}{c^2} \equiv \frac{(\varepsilon_+ + \varepsilon_-)^2}{c^2} \approx 4m^2c^2 \gg (\boldsymbol{p}_+ + \boldsymbol{p}_-)^2 \equiv \boldsymbol{k}^2. \qquad (83.19)$$

したがって，光子の伝播関数として

$$D_{\mu\nu} \approx \frac{\pi}{m^2c^2}g_{\mu\nu}$$

と書けば十分である．

ここですでに因子 $1/c^2$ を含んでいる．したがって振幅 $u(p)$ はゼロ近似をとれば十分である．すなわち

$$u(p_-) = \sqrt{2m}\begin{pmatrix} w_-^{(0)} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u(-p_+) = \sqrt{2m}\begin{pmatrix} 0 \\ w^{(0)} \end{pmatrix}.$$

ここで $w_-^{(0)}$, $w^{(0)}$ は (23.12) に現われるスピノールである（以下これらの添字(0)は落とす）．これらの振幅を使って

$$\bar{u}(-p_+)\gamma^0 u(p_-) = u^*(-p_+)u(p_-) = 0,$$
$$\bar{u}(-p_+)\boldsymbol{\gamma}u(p_-) = u^*(-p_+)\boldsymbol{\alpha}u(p_-) = 2m(w^*\boldsymbol{\sigma}w_-).$$

これらの式を≪消滅型の≫項に代入したのち，散乱振幅は

$$M_{fi}^{(消)} = -e^2\frac{\pi}{m^2c^2}(2m)^2(w^*\boldsymbol{\sigma}w_-)(w'^*_-\boldsymbol{\sigma}w') \qquad (83.20)$$

の形になる．しかしながら，これから直接に相互作用の演算子の形についての結論をしてはいけない．第一に，振幅 $u(-p_+)$ を表わすスピノール w は，まだ言葉通りの意味で陽電子のものではない．陽電子振幅は $u(-p_+)$ から荷電共役変換によって得られる．(26.6) にしたがって，それに対応するスピノール（これを w_+ で表わそう）は w と関係式 $w_+ = \sigma_y w^*$ で結ばれる．これから

$$w^* = \sigma_y w_+ = -w_+\sigma_y, \quad w = -\sigma_y w_+^*. \tag{83.21}$$

第二に，散乱振幅は，電子（w_- および w'_-）のスピノールと陽電子（w_+ および w'_+）のスピノールが互いに逆になっているような形に導かれる必要がある．この目的は，公式

$$(w^*\boldsymbol{\sigma}w_-)(w'^*_-\boldsymbol{\sigma}w') = \frac{3}{2}(w'^*_-w_-)(w^*w') - \frac{1}{2}(w'^*_-\boldsymbol{\sigma}w_-)(w^*\boldsymbol{\sigma}w') \tag{83.22}$$

を使って達せられる．この式自身は (28.17) から出る．

最後に，w および w' を (83.21) にしたがい w_+ および w'_+ を使って表わし，容易に確かめられるように

$$\begin{aligned}(w^*w') &= (w'^*_+w_+),\\ (w^*\boldsymbol{\sigma}w') &= -(w'^*_+\boldsymbol{\sigma}w_+).\end{aligned} \tag{83.23}$$

(83.23) を (83.22) に，つぎに (83.20) に代入して，散乱振幅の消滅型部分に対して，最終的な式

$$M_{fi}^{(消)} = -4m^2\left(w'^*_-w'^*_+\left[\frac{\pi e^2}{2m^2c^2}(3+\boldsymbol{\sigma}_+\boldsymbol{\sigma}_-)\right]w_-w_+\right)$$

を得る（行列 $\boldsymbol{\sigma}_-$ および $\boldsymbol{\sigma}_+$ はそれぞれ w_- および w_+ に働く）．角括弧内の式は，運動量表示での相互作用の演算子を表わしている．対応する座標の演算子は

$$\mathrm{U}^{(消)}(\boldsymbol{r}) = \frac{\pi\hbar^2e^2}{2m^2c^2}(3+\boldsymbol{\sigma}_+\boldsymbol{\sigma}_-)\delta(\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_- - \boldsymbol{r}_+ \tag{83.24}$$

である (J. Pirenne, 1947; В. Б. Берестецкий, Л. Д. Ландау, 1949)．電子と陽電子の相互作用の全演算子は，(83.17) の U を使って

$$-\mathrm{U} + \mathrm{U}^{(消)}.$$

§84. ポジトロニウム

前節で得られた公式はポジトロニウム，すなわち電子と陽電子からなる水素類似の系に応用することができる．

重心系で，ポジトロニウム内の電子および陽電子の運動量は $\mathbf{p}_- = -\mathbf{p}_+ \equiv \mathbf{p}$ である．ここで $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$ は，相対動径ベクトル $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_- - \boldsymbol{r}_+$ に対応する，相対運動の運動量である．ポジトロニウムの全ハミルトニアンは[1]

$$
\begin{aligned}
\mathrm{H} &= \frac{\mathbf{p}^2}{m} - \frac{e^2}{r} + \mathrm{V}_1 + \mathrm{V}_2 + \mathrm{V}_3,\\
\mathrm{V}_1 &= -\frac{\mathbf{p}^4}{4m^3c^2} + 4\pi\mu_0^2\,\delta(\boldsymbol{r}) - \frac{e^2}{2m^2c^2r}\left\{\mathbf{p}^2 + \frac{\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\mathbf{p})\,\mathbf{p}}{r^2}\right\},\\
\mathrm{V}_2 &= 6\mu_0^2\frac{1}{r^3}\mathbf{lS},\\
\mathrm{V}_3 &= 6\mu_0^2\frac{1}{r^3}\left\{\frac{(\mathbf{S}\boldsymbol{r})(\mathbf{S}\boldsymbol{r})}{r^2} - \frac{1}{3}\mathbf{S}^2\right\} + 4\pi\mu_0^2\left(\frac{7}{3}\mathbf{S}^2 - 2\right)\delta(\boldsymbol{r}).
\end{aligned}
\tag{84.1}
$$

ここで $\mu_0 = e\hbar/2mc$ はボーア磁子，$\hbar\mathbf{l} = [\boldsymbol{r}\mathbf{p}]$ は軌道角運動量の演算子である．$\mathbf{S} = (\boldsymbol{\sigma}_+ + \boldsymbol{\sigma}_-)/2$ は系の全スピンの演算子である（その平方は $\mathbf{S}^2 = \frac{1}{2}(3 + \sigma_+\sigma_-)$ である）．V_1 のなかには純軌道性の補正項がすべて含まれる．V_2 にはスピン軌道相互作用，V_3 には《消滅型》相互作用のスピンのスピン相互作用が含まれる．

《非摂動》ハミルトニアン

$$
\mathrm{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{m} - \frac{e^2}{r}
$$

は，当然のことだが，水素原子のハミルトニアンと，電子の質量をその換算質量 $m/2$ に置き換えることだけが違っている．したがって，ポジトロニウムのエネルギー準位は（その絶対値で）水素原子の準位の半分である．すなわち

$$
E = -\frac{me^4}{4\hbar^2n^2}
\tag{84.2}
$$

である（n は主量子数である）．

(84.1) の残りの項は準位 (84.2) の分裂，すなわち微細構造の出現をもたらす．でき上った準位はまず第一に全角運動量 j の値で分類される．われわれはまた，粒子のスピン演算子はハミルトニアン (84.1) にその和 $\mathbf{S}$ の形でだけ入っていることを見るであろう．これは，ハミルトニアンが全スピンの平方の演算子 $\mathbf{S}^2$ と可換であること，すなわち，全スピンの大きさは今考察されている（$1/c$ について2次の）近似では保存しつづけることを意味している．したがって，ポジトロニウムのエネルギー準位は，また $S=0$ およ

1) 普通の単位で．

び $S=1$ の値をとる全スピンによっても分類される．スピン 0 の準位は**パラ・ポジトロニウム**，またスピン 1 の準位は**オルソ・ポジトロニウム**と呼ばれる．

ポジトロニウムにおける全スピンの保存は，$1/c$ についてのなんらの近似とも結びつかない正確な法則であることを強調する必要がある．これは電磁相互作用の CP-不変性からきている．ポジトロニウムは真正中性の系なので，その状態は一定の荷電および結合偶奇性で特長づけられる．後者は $(-1)^{S+1}$ に等しい（§27，問題参照）．S は二つの値 0 および 1 を持つので，結合偶奇性の保存は全スピンの保存と同等である．

$S=0$ のとき，全角運動量 j は軌道角運動量と一致する．スピン $S=1$ のときは与えられた j に対して，量子数 l は j, $j\pm1$ の値をとる．これに対応して，オルソ・ポジトロニウムの各準位 (n,j) は一般に三つの準位に分かれる．$l=j$ および $l=j\pm1$ の値は異なる偶奇性を持つので，ハミルトニアンはこれらの状態を結ぶ行列要素は持たない．しかしながら，摂動演算子（V_3 のなかの第 1 項）は一般に $l=j+1$ と $l=j-1$ の状態を結ぶ非対角要素を持つ．このときはもちろん量子数 l が軌道角運動量としての厳密な意味を失ってしまう．

ポジトロニウムにおけるゼーマン効果は，特別の性質を持つ（В. Б. Берестецкий, И. Я. Померанчук, 1949）．

ポジトロニウムの軌道磁気モーメントはつねに 0 に等しい．すなわち，ポジトロニウムでは $[\boldsymbol{r}_+\mathbf{p}_+]=[\boldsymbol{r}_-\mathbf{p}_-]$ であるから

$$\boldsymbol{\mu}_l=\mu_0([\boldsymbol{r}_+\mathbf{p}_+]-[\boldsymbol{r}_-\mathbf{p}_-])=0.$$

スピン磁気モーメントの演算子は

$$\boldsymbol{\mu}_s=\mu_0(\boldsymbol{\sigma}_+-\boldsymbol{\sigma}_-). \tag{84.3}$$

これは全スピン演算子 $\mathbf{S}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}_++\boldsymbol{\sigma}_-)$ と比例しない．また演算子 $\mathbf{S}^2$ と $\boldsymbol{\mu}_s$ とは可換でない．したがって，全スピンの大きさ S とその投影 S_z の一定値を持つ状態は，一般に磁気モーメントの固有状態ではない．

与えられた S および S_z を持つ状態は，つぎのような形を持つスピン関数 χ_{SS_z} によって記述される．

$$\chi_{11}=\alpha_+\alpha_-,\quad \chi_{1-1}=\beta_+\beta_-,$$
$$\chi_{10}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_+\beta_-+\alpha_-\beta_+), \tag{84.4}$$

$$\chi_{00} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_+\beta_- - \alpha_-\beta_+).$$

ここで α および β はスピンの投影が $+1/2$ および $-1/2$ に対応する，1個の粒子のスピン関数である（添字 + あるいは − は，関数が陽電子あるいは電子に関するものであることを示す）．このなかで最初の二つ（χ_{11} および χ_{1-1}）は同時に演算子 μ_z の固有関数になっていて，固有値 $\mu_z = 0$ に対応する．関数 χ_{10} および χ_{00} は μ_z の固有関数ではない．一次結合

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_{10} + \chi_{00}) = \alpha_+\beta_-, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_{10} - \chi_{00}) = \alpha_-\beta_+ \tag{84.5}$$

がこのような固有関数である．関数（84.4）によって計算される唯一の 0 でない行列要素 $\langle S' S'_z | \mu_z | S S_z \rangle$ は

$$\langle 00 | \mu_z | 10 \rangle = \langle 10 | \mu_z | 00 \rangle = 2\mu_0 \tag{84.6}$$

であることが容易にわかる．

弱い磁場（$\mu_0 H \ll \Delta$ とする，ここで Δ は $S=0$ と $S=1$ のエネルギー準位間の間隔である）のなかでは，ゼーマン分裂の計算の出発の近似は，全スピンの一定値の状態である．第一近似でこの分裂の摂動エネルギーの演算子

$$\mathrm{V}_H = -\mu_z H$$

の平均値である．しかし関数（84.4）を使って計算された，演算子 μ_z（それによりまた V_H）のすべての対角要素は 0 に等しい．このようにして弱い磁場中では，ポジトロニウムのゼーマンの線型効果は存在しない．

強い磁場（$\mu_0 H \gg \Delta$）の反対の極限の場合には，S の一定値の確立へと導くスピンの相互作用を無視できる．分裂した準位の成分はこの場合一定値 $\mu_z = \pm 2\mu_0$ の（関数(84.5)により記述される）状態に対応する．そしてそのずれの大きさは $\pm 2\mu_0 H$ に等しい．

問　題

1. パラ・ポジトロニウムの準位の微細構造を決定せよ（В. Б. Берестецкий, 1949）[1]．

---

1) オルソ・ポジトロニウムの微細構造の計算は，В. Б. Берестецкий, ЖЭТФ **19**, 1130 (1949); R. Ferrell, *Phys. Rev.* **84**, 858 (1951); А. А. Соколов, В.Н. Цытович, ЖЭТФ **24**, 253 (1953) 参照．

解　求める準位の分離エネルギーは，種々の値の $j=l(0, 1, \cdots\cdots, n-1$ に等しい) を持つ非摂動状態の波動関数を使って計算された，ハミルトニアン (84.1) 中の補正項の平均値により与えられる．$S=0$ のとき，0 と異なる寄与は $\mathbf{V}_1$ および $\mathbf{V}_3$ の第2項から生じる．

非摂動波動関数（これを ψ で表わそう）はシュレーディンガー方程式[1] を満足する．

$$\mathbf{p}^2\psi=-\Delta\psi=\left(E+\frac{1}{r}\right)\psi,\quad E=-\frac{1}{4n^2}.$$

したがって

$$\mathbf{p}^4\psi=\mathbf{p}^2\left(E+\frac{1}{r}\right)\psi=\left(E+\frac{1}{r}\right)^2\psi-\psi\Delta\frac{1}{r}-2\left(\nabla\frac{1}{r}\right)(\nabla\psi)$$
$$=\left(E+\frac{1}{r}\right)^2\psi+4\pi\delta(\mathbf{r})\psi+\frac{2}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial r}.$$

平均値は

$$\overline{\mathbf{p}^4}=\overline{\left(E+\frac{1}{r}\right)^2}+4\pi\,|\,\psi(0)\,|^2+\iint_0^\infty\frac{\partial\,|\,\psi\,|^2}{\partial r}\,dr\,do.$$

最後の積分は $-\int|\psi(0)|^2do$ に等しい．$l=0$ の時にのみ $\psi(0)\neq 0$ で，また S-状態の波動関数は球対称であるから，積分は $-4\pi\,|\,\psi(0)\,|^2$ に等しく，第2項と約せてしまう．

軌道角運動量の演算子 $\mathbf{l}=[\boldsymbol{r}\mathbf{p}]$ を導入して

$$-\mathbf{p}^2\psi=\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}-\frac{\mathbf{l}^2\psi}{r^2}=-\left(E+\frac{1}{r}\right)\psi$$

と書こう．これからわれわれに必要な他の平均値に対して

$$\int\psi^*\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}(\boldsymbol{r}\mathbf{p})\mathbf{p}\psi\,d^3x=-\int\psi^*\frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}d^3x$$
$$=\overline{\frac{1}{r}\left(E+\frac{1}{r}\right)}-4\pi\,|\,\psi(0)\,|^2-l\,(l+1)\overline{r^{-3}}$$

($l=0$ のときに最後の項はない)．

水素原子の理論のよく知られた公式（Ⅲ (36.14)，(36.16) 参照）を使い，電子の質量 m を $m/2$ に置き換えることを考慮して

---

1)　計算の際は，原子単位を使うのが便利である．

$$|\psi(0)|^2=\frac{1}{8\pi n^3}\delta_{l0},\quad \overline{r^{-1}}=\frac{1}{2n^2},\quad \overline{r^{-2}}=\frac{1}{2n^3(2l+1)},$$

$$\overline{r^{-3}}=\frac{1}{4n^3 l(l+1)(2l+1)}\qquad (l\neq 0).$$

列記した公式を使って，パラ・ポジトロニウムの求めるエネルギー準位に対し

$$E_{nl}=-\frac{1}{4n^2}-\alpha^2\frac{me^4}{\hbar^2}\frac{1}{2n^3}\left(\frac{1}{2l+1}-\frac{11}{32n}\right).$$

2. オルソ・ポジトロニウムとパラ・ポジトロニウムの基底状態（$n=1$，$l=0$）のエネルギーの差を求めよ．

解 $l=0$ のとき，エネルギーの全スピン S への依存性は V_3 の第2項の平均値中にのみ含まれる（球対称な S-状態で角度平均をとると第1項は0になる[1]）．オルソ・ポジトロニウム（$^3S_1$）の基底準位は，パラ・ポジトロニウム（$^1S_0$）の基底準位よりも

$$E(^3S_1)-E(^1S_0)=\frac{7}{12}\alpha^2\frac{me^4}{\hbar^2}=8.2\cdot 10^{-4}\,\mathrm{eV}$$

だけ高いところにある．

§85. 遠距離の原子の相互作用

（自分の固有の大きさにくらべて）大きい距離 r にある二つの中性原子間にも引力が働く．しかしながら，非常に大きい距離のときには，この力に普通の量子力学的計算（III，§89参照）は適用不可能である．それはこの計算には静電相互作用だけが考察されたこと，すなわち遅延効果が考慮されていないということである．相互作用をする原子のスペクトルの固有の波長 λ_0 にくらべて距離 r が小さいあいだは，このような考察は正しかった．この節では，このような制限のない計算を行なう．

われわれは §83 におけるとまったく同様な扱いをしよう．すなわち，二つの異なる原子の（内部状態の変化のない）弾性散乱の，最初の消えない近似での振幅を計算しよう．得られた式を，原子の相互作用をポテンシャル・エネルギー $U(r)$ で記述したとき得られるはずの振幅と比較する．

この場合，与えられた過程を記述する S-行列の最初の消えない要素は，第一近似の要

1) 角度平均は r による積分の前に行なう必要がある．これは V_3 の第1項を導いた積分 (83.14) の計算法からも明らかである．

素

$$S_{fi} = -i\int \psi_1'^*(\boldsymbol{r}_1)\,\psi_2'^*(\boldsymbol{r}_2)\,U(r)\,\psi_1(\boldsymbol{r}_1)\,\psi_2(\boldsymbol{r}_2)\,d^3x_1 d^3x_2 \times \int \exp\{-i(\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_1'-\varepsilon_2')t\}\,dt \qquad (85.1)$$

になるはずである．ここで ψ_1，ψ_2 および ψ_1'，ψ_2' は始めと終りの運動量を持つ並進運動を記述する2原子の波動関数（平面波）の時間に依存しない部分である．ε_1，ε_2 および ε_1'，ε_2' はこの運動の運動エネルギーである．原子全体としての座標 $\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$ は，その原子核の座標と考えることができ，その距離は $r=|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|$ である．(85.1) のなかの時間積分は，普通のように，エネルギー保存則を表わす δ-関数を与える．しかしながら，将来の比較に便利なように，形式的に原子の質量が無限大の極限の場合を考える．運動量が与えられたとき，0に等しいエネルギーがこれに対応する．別に，$1/\varepsilon$ の期間にくらべて小さい時間が考慮されると言ってもよい．このとき (85.1) は

$$S_{fi} = -it\iint \psi_1'^*\psi_2'^*\,U(r)\,\psi_1\psi_2\,d^3x_1 d^3x_2 \qquad (85.2)$$

の形になる．ここで t は時間についての積分の区間である．

弾性散乱の振幅の実際の計算は，ここで行なわれた仮定では2段階に分けられる．まず始めに（原子核の座標 $\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$ が与えられたとき）両方の原子の不変の（基底）状態の波動関数について，また光子の真空について S-演算子を平均する．この過程の始めと終りには光子は存在しない．この結果，原子核の相互の距離の関数である量を得る．これを $\langle \mathrm{S}(r)\rangle$ [1] としよう．求める遷移行列要素を見いだすために，つぎの積分

$$S_{fi} = \iint \psi_1'^*\psi_2'^*\langle \mathrm{S}(r)\rangle\psi_1\psi_2\,d^3x_1 d^3x_2 \qquad (85.3)$$

を計算する必要がある．(85.2) とくらべるともしも $\langle \mathrm{S}(r)\rangle$ の式を

$$\langle \mathrm{S}(r)\rangle = -itU(r)$$

の形に求めると，$U(r)$ は求める原子の相互作用のエネルギーである．

与えられた場合にわれわれは素粒子でなく複合粒子（原子，これは中間状態では励起することができる）の衝突を扱うわけだから，普通の図形手法の規則は，ここでは直接に使えない．われわれは展開 (73.10) の形の S-演算子の出発の式から始めよう．

原子の相互作用に対して，原子振動数と同程度の（および小さい）振動数の場の成分が重

1) 原子および光子場の状態を示す記号を伴った対角要素の記号の代りである．

要である．これに対応する波長は原子の大きさにくらべて大きい．したがって，電磁相互作用の演算子は

$$\mathbf{V} = -\mathbf{E}(\boldsymbol{r}_1)\mathbf{d}_1 - \mathbf{E}(\boldsymbol{r}_2)\mathbf{d}_2 \tag{85.4}$$

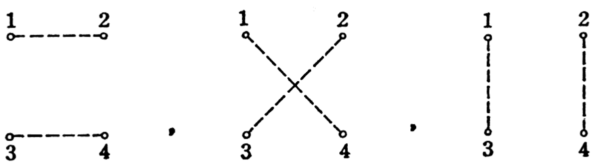
の形をとることができる．ここで $\mathbf{d}_1$，$\mathbf{d}_2$ は原子の2重極モーメントの演算子である（時間に依存するハイゼンベルク演算子であることを考慮する）．そして $\mathbf{E}(\boldsymbol{r})$ は対応する原子の見いだされる点での電場の演算子である．

よく知られているように，定常状態の原子の 2 重極モーメントの平均値は 0 に等しい（III，§75 参照）．ここから， 0 と異なる散乱振幅には4次近似の摂動論で初めて，すなわち演算子

$$\mathrm{S}^{(4)} = \frac{(-i)^4}{4!}\int dt_1 \cdots \int dt_4 \cdot \mathrm{T}\{\mathrm{V}(t_1)\,\mathrm{V}(t_2)\,\mathrm{V}(t_3)\,\mathrm{V}(t_4)\} \tag{85.5}$$

の行列要素として現われる．実際に，もっと低い次数では，演算子 V の積の各項は，演算子 $\mathbf{d}_1$ あるいは $\mathbf{d}_2$ のなかのいずれか一つが1次で含まれる．そして対応する原子の状態について平均すると0になる．

演算子 (85.5) を光子の真空について平均しよう．ヴィックの定理から，4個の場の演算子 E の積の平均は，その対の平均（縮約）の積の和に帰する．対への分解は三つの方法が可能で，それはつぎの図形に描かれる．



(85.6)

ここで点線は縮約を描き，文字は引数 t_1，t_2，t_3，t_4 に対応する．このほか，各点は空間座標 $\boldsymbol{r}_1$ あるいは $\boldsymbol{r}_2$ に対応することができる（このとき2点が $\boldsymbol{r}_1$ で，2点が $\boldsymbol{r}_2$ である．そうでない場合，与えられた和の項のなかでは，演算子 $\mathbf{d}_1$ あるいは $\mathbf{d}_2$ のなかの一つが1次で含まれ，原子の状態について平均すると 0 になる）．線によって結ばれている点は異なる $\boldsymbol{r}_1$ と $\boldsymbol{r}_2$ でなければならない．逆の場合は，図形（すなわち，行列要素の対応する項）は，$\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2$ の差の関数になる代りに，$\boldsymbol{r}_1$ および $\boldsymbol{r}_2$ の独立な関数の積になってし

まう．このような項は散乱には関係はない[1]．この条件に対応して，われわれは引数 $\boldsymbol{r}_1$ および $\boldsymbol{r}_2$ を四つの点に四つの方法で配置することができる．また演算子 $\mathbf{d}_1$ および $\mathbf{d}_2$ の可換性を考慮し，各原子の状態で平均し，このようにして得られた $3\times4=12$ 項がすべて同一であることを見いだす(これらは積分変数の置き方だけが異なっている)．結果として

$$\langle \mathrm{S}(\boldsymbol{r})\rangle=\frac{1}{2}\int dt_1\cdots\int dt_4\cdot\langle \mathrm{T}(\mathrm{E}_i(\boldsymbol{r}_1,\ t_1)\,\mathrm{E}_k(\boldsymbol{r}_2,\ t_2))\rangle$$
$$\times\langle \mathrm{T}(\mathrm{E}_l(\boldsymbol{r}_2,\ t_3)\,\mathrm{E}_m(\boldsymbol{r}_1,\ t_4))\rangle\langle \mathrm{T}(\mathrm{d}_{1i}(t_1)\,\mathrm{d}_{1m}(t_4))\rangle\langle \mathrm{T}(\mathrm{d}_{2k}(t_2)\,\mathrm{d}_{2l}(t_3))\rangle \qquad (85.7)$$

を得る．ここで $i,\ k$ は3次元ベクトル添字である．

$$D^E_{ik}(x_1-x_2)=\langle \mathrm{T}(\mathrm{E}_i(x_1)\,\mathrm{E}_k(x_2))\rangle \qquad (85.8)$$

という量を計算するためには，スカラー・ポテンシャル $\Phi=0$ になるポテンシャルのゲージを使う．このとき $\mathbf{E}=-\partial\mathbf{A}/\partial t$ で

$$D^E_{ik}(x_1-x_2)=\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2}\langle \mathrm{T}(\mathrm{A}_i(x_1)\,\mathrm{A}_k(x_2))\rangle=i\frac{\partial^2}{\partial t^2}D_{ik}(x).$$

ここで $x=x_1-x_2$．また $D_{ik}(x)$は与えられたゲージでの光子の伝播関数であるから[2]

$$D^E_{ik}(x)=-i\int\omega^2D_{ik}(k)\,e^{-ikx}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}. \qquad (85.9)$$

ここで $D_{ik}(k)$ は運動量表示での光子の伝播関数である．(77.14) にしたがって

$$D_{ik}(k)=-\frac{4\pi}{\omega^2-k^2+i0}\left(\delta_{ik}-\frac{k_ik_k}{\omega^2}\right). \qquad (85.10)$$

つぎに

$$\alpha_{ik}(t_1-t_2)=i\langle \mathrm{T}(\mathrm{d}_i(t_1)\,\mathrm{d}_k(t_2))\rangle \qquad (85.11)$$

をフーリエ積分に展開すれば

$$\alpha_{ik}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega t}\alpha_{ik}(\omega)\frac{d\omega}{2\pi}.$$

---

1) それはわれわれには興味のない，各原子の固有エネルギーの補正を与える．

2) 1次微係数 $\dfrac{\partial}{\partial t}D_{ik}(t)$ は $t=0$ で有限の，不連続を持っている．したがって，2次微係数，すなわち関数 $D^E_{ik}(t)$ はまた δ-関数の項 $(\sim\delta(x_2-x_1))$ も含んでいる．しかしながら，この項は $\boldsymbol{r}_1\neq\boldsymbol{r}_2$ のときいつも 0 に等しく，われわれは興味はない．

便宜上 $t_2=0$, $t_1=t$ と置き，T-積の定義にしたがって

$$\begin{aligned}\alpha_{ik}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\alpha_{ik}(t)dt \\ &= i\int_{-\infty}^{0} e^{i\omega t}\langle \mathrm{d}_k(0)\,\mathrm{d}_i(t)\rangle dt + i\int_0^{\infty} e^{i\omega t}\langle \mathrm{d}_i(t)\,\mathrm{d}_k(0)\rangle dt. \qquad (85.12)\end{aligned}$$

ここに現われる（原子の基底状態についての）平均値は，2重極モーメントの行列要素

$$\langle \mathrm{d}_k(0)\,\mathrm{d}_i(t)\rangle = \sum_n (d_k)_{0n}(d_i)_{n0}e^{i\omega_{n0}t},$$

$$\langle \mathrm{d}_i(t)\,\mathrm{d}_k(0)\rangle = \sum_n (d_i)_{0n}(d_k)_{n0}e^{-i\omega_{n0}t}$$

を使って表わされる．これらの式を (85.12) に代入して積分を行ない

$$\alpha_{ik}(\omega) = \sum_n \left\{\frac{(d_i)_{0n}(d_k)_{n0}}{\omega_{n0}-\omega} + \frac{(d_k)_{0n}(d_i)_{n0}}{\omega_{n0}+\omega}\right\} \qquad (85.13)$$

を得る[1]．もしも原子の基底状態が S-状態であれば，このテンソルはスカラーになる．すなわち $\alpha_{ik}(\omega)=\alpha(\omega)\delta_{ik}$ である．もしも原子が角運動量を持てば，その方向についての平均後にはまったく同じ結果が得られる．これは当然であろう（つまり，それらの相互の向きについて平均した原子の相互作用に興味がある）．(85.13) からまた

$$\alpha(-\omega) = \alpha(\omega)$$

であることがわかる．$\alpha(\omega)$ という量は（$\omega>0$ のとき）原子の分極率にほかならない（(60.17) を見よ）．

得られた式を (85.7) に代入して

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{S}(r)\rangle = \frac{1}{2}\int dt_1\cdots dt_4\cdot \frac{d\Omega_1}{2\pi}\frac{d\Omega_2}{2\pi}\frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}\frac{d^4k_2}{(2\pi)^4}\alpha_1(\Omega_1)\,\alpha_2(\Omega_2) \\ \times\, \omega_1^2 D_{ik}(k_1)\,\omega_2^2 D_{ik}(k_2) \\ \times \exp\{i(\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2)(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2) - i\omega_1(t_1-t_2) - i\omega_2(t_3-t_4) \\ - i\Omega_1(t_1-t_4) - i\Omega_2(t_2-t_3)\}.\end{aligned}$$

三つの時間による積分は δ-関数を与える（このために $-\Omega_1=\Omega_2=\omega_2=\omega_1\equiv\omega$ である）．しかし4番目のは因子 t を与える．すなわち

1) (85.12) のなかの積分の収束のために，そのなかの1番目では ω を $\omega-i0$, 2番目では $\omega+i0$ とみなす必要がある．これによって極の近くで (85.13) の式をどんな意味に理解する必要があるかが明らかになる．

$$\langle \mathrm{S}(r)\rangle = -itU(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|).$$

ここで

$$U(r) = \frac{i}{2(2\pi)^7}\int d^3k_1 d^3k_2 d\omega\cdot\omega^4 \alpha_1(\omega)\,\alpha_2(\omega)\,D_{ik}(\boldsymbol{k}_1,\ \omega)\,D_{ik}(\boldsymbol{k}_2,\ \omega)$$
$$\times \exp\{i\boldsymbol{r}(\boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2)\}.$$

あるいは (85.10) をこれに代入して

$$U(r) = \frac{i}{16\pi^5}\int d^3k_1 d^3k_2 d\omega\cdot\alpha_1(\omega)\,\alpha_2(\omega)$$
$$\times\frac{3\omega^4 - \omega^2(\boldsymbol{k}_1^2 + \boldsymbol{k}_2^2) + (\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2)^2}{(\omega^2 - \boldsymbol{k}_1^2 + i0)\,(\omega^2 - \boldsymbol{k}_2^2 + i0)}e^{i\boldsymbol{r}(\boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2)}. \quad (85.14)$$

この式は，原子の大きさ a にくらべて大きい任意の距離の，二つの原子の相互作用のエネルギーを与える．距離の《小さい》（$a \ll r \ll \lambda_0$）および《大きい》（$r \gg \lambda_0$）の極限の場合には，積分は簡単になり，完全に計算できる．

距離 r が与えられたとき，波動ベクトルの値が $|\boldsymbol{k}| \sim 1/r$ の領域で，積分に重要である．$r \ll \lambda_0$ のとき $|\boldsymbol{k}| \gg \omega_0$（$\omega_0$ は原子の振動数）である．そして (85.14) のなかの被積分関数で（関数 $\alpha(\omega)$ 以外は）$\boldsymbol{k}^2$ にくらべて ω^2 の項はいつも無視できる．その後 $U(r)$ を普通のロンドンの公式（III，§89）に導くのは困難ではない．

逆の場合 $r \gg \lambda_0$ を考察しよう．まず第一に (85.14) で $d\omega$ についての積分を行なう．複素数 ω の上半平面で積分路を閉じて，この半平面内の極での被積分関数の留数によって積分を計算しよう．このとき

$$\omega \sim |\boldsymbol{k}| \sim \frac{1}{r} \ll \omega_0$$

の傍にある分母のゼロ点だけを考慮すれば十分である．関数 $\alpha(\omega)$ の極は $\omega \sim \omega_0$ にあり，与えられた場合には重要でない．このようにして $d\omega$ についての積分を計算し，つづいて $\boldsymbol{k}_1$ および $\boldsymbol{k}_2$ についての積分を，$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2$ および $\boldsymbol{k} \equiv \boldsymbol{k}_2$ についての積分に変え，$U(r)$ をフーリエ積分

$$U(r) = \int U(q)\,e^{i\boldsymbol{qr}}\frac{d^3q}{(2\pi)^3} \quad (85.15)$$

の形に導こう．ここで

$$U(q) = -\frac{\alpha_1(0)\,\alpha_2(0)}{2\pi}\int\frac{d^3k}{kk_1}\,\frac{(\boldsymbol{kk}_1)^2 - kk_1\,(2k_1^2 + 2k^2 + 3\boldsymbol{kk}_1)}{k + k_1} \quad (85.16)$$

である（ここおよび以後では $\boldsymbol{k}_1=\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}$, $k_1=|\boldsymbol{k}_1|$, $k=|\boldsymbol{k}|$ とする）．$\omega\sim k$ の点での関数 $\alpha_1(\omega)$, $\alpha_2(\omega)$ で，引数の小さい値（$\omega\ll\omega_0$）を0に換えた．すなわち，これらの関数を原子の静的分極率で置き換えた．

積分 (85.16) は $k\to\infty$ のときに発散する．これはわれわれが用いた2重極近似が $k\gtrsim 1/a$ では使えないことに関連している．それは $r\to\infty$ のときの $U(r)$ の漸近的なふるまいの計算のためには，$U(q)$ のなかの $q=0$ に特異点を持つ項だけが重要であるということである．すなわち，これらの特異項は $U(r)$ に $(1/r)$ の冪の寄与を与える．$U(q)$ のなかの特異項は，われわれが見るように，積分 (85.16) の収束部分によって定義される．

(85.16) の積分要素 d^3k を $2\pi k^2\,dk\,d\cos\theta$ に置き換える（ここで θ は $\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{q}$ とのあいだの角である）．そして微分 $d\cos\theta$ を

$$d\cos\theta=\frac{k_1dk_1}{qk}$$

で置き換える．ここで

$$k_1=\sqrt{k^2+q^2+2kq\cos\theta},\quad kk_1=\frac{1}{2}(k_1^2+k^2-q^2).$$

このようにして，(85.16) で置き換え

$$\frac{d^3k}{kk_1}\longrightarrow\frac{2\pi}{q}\,dk\,dk_1$$

が行なわれる．このとき dk_1 についての積分は，$|k-q|$ から $k+q$ までの限界内で行なわれる．被積分関数の形から，特異点は分母の積分からのみ出てくると結論される．特異項だけに興味があるので，したがって分子を $k+k_1$ で冪展開をし，その0次の項のみに限る（言いかえれば，単に分子で $k_1=-k$ と置く）ことによって，われわれはただちに積分を簡単にできる．そうすると

$$U(q)=-\frac{\alpha_1(0)\,\alpha_2(0)}{4q}\int_0^\infty(8k^4-4k^2q^2+q^4)\ln\frac{2k+q}{k+|k-q|}\,dk.\qquad(85.17)$$

ここにある積分の（$q\to 0$ のときの）特異項は $q^5\ln q$ の形を持つ．これを分離して，相互作用のエネルギーのフーリエ成分として次式を得る[1)]．

---

1) (85.17) の積分は膨大になるが初等的である．上限を∞の代りに大きい数 N と書き，$\ln q$ を含む項を分離して (85.18) を得る．しかしながら，興味のあるのが，↗

$$U(q) = \frac{23\alpha_1(0)\alpha_2(0)}{120} q^4 \ln q. \tag{85.18}$$

フーリエの逆変換は，公式

$$\int e^{iqr} q^4 \ln q \frac{d^3q}{(2\pi)^3} = -\frac{30}{\pi r^7} \tag{85.19}$$

を使って実行される[1]．このようにして最終的に

$$U(r) = -\frac{23}{4\pi}\frac{\alpha_1(0)\,\alpha_2(0)}{r^7} \tag{85.20}$$

を得る．これにより大きい距離（$r \gg \lambda_0$）にある二つの原子の相互作用のエネルギーが定義される[2]．

↘$q \to 0$ で対数特異点の部分であるから，この部分は $k \gg q$ の積分領域で決定されることに注意すると，この結果は非常に簡単に求まる．対数を $q/2k$ の冪で展開して

$$\ln\frac{2k+q}{2k-q} \approx 2\left[\frac{q}{2k} + \frac{1}{3}\left(\frac{q}{2k}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{q}{2k}\right)^5\right].$$

$\int dk/k$ の形の発散積分を分離する．これは下限を $k \sim q$ で切断しなければならない（上限は重要でない）．

1) q－空間の球面座標での直接の積分で

$$\lim_{\delta\to+0}\int e^{iqr-q\delta} q^\nu \frac{d^3q}{(2\pi)^3} = -\frac{\Gamma(\nu+2)\sin\frac{\pi\nu}{2}}{2\pi^2 r^{\nu+3}}$$

が得られる．この公式をパラメータ ν で微分し，つぎに $\nu = 4$ と置いて，(85.19) の結果を得る．

2) この公式は最初にカシミールおよびポルダーにより得られた (H. B. Casimir, D. Polder, 1948)．上の導き方はイ・イエ・ジャロシンスキーによる．

第10章　電子と光子の相互作用

§86. 電子による光子の散乱

自由電子による光子の散乱（**コンプトン効果**）の際の4-運動量の保存は，等式

$$p+k = p'+k' \tag{86.1}$$

によって表わされる．ここで p および k は衝突前の，p' および k' は衝突後の電子および光子の4-運動量である．§67で導入された運動学的不変量は

$$\begin{aligned} s &= (p+k)^2 = (p'+k')^2 = m^2+2pk = m^2+2p'k', \\ t &= (p-p')^2 = (k'-k)^2 = 2(m^2-pp') = -2kk', \\ u &= (p-k')^2 = (p'-k)^2 = m^2-2pk' = m^2-2p'k, \\ & s+t+u = 2m^2. \end{aligned} \tag{86.2}$$

考察されている過程は，二つのファインマン図形(75.14)により記述され，その振幅は

$$M_{fi} = -4\pi e^2 e'^*_\mu e_\nu (\bar{u}' Q^{\mu\nu} u) \tag{86.3}$$

である．ここで

$$Q^{\mu\nu} = \frac{1}{s-m^2}\gamma^\mu (\hat{p}+\hat{k}+m)\gamma^\nu + \frac{1}{u-m^2}\gamma^\nu (\hat{p}-\hat{k}'+m)\gamma^\mu \tag{86.4}$$

である．ここで e, e' は始めおよび終りの光子の偏りの4-ベクトルで，u, u' は始めおよび終りの電子の双スピノール振幅である．

§66で記述された規則にしたがって，粒子の任意の偏りの状態に対して，平方 $|M_{fi}|^2$ は

$$|M_{fi}|^2 \longrightarrow 16\pi^2 e^4 \,\mathrm{Sp}\,\{\rho^{(e)\prime}\rho^{(\gamma)\prime}_{\lambda\mu} Q^{\mu\nu}\rho^{(e)}\rho^{(\gamma)}_{\nu\sigma}\bar{Q}^{\lambda\sigma}\} \tag{86.5}$$

で置き換えられる．ここで $\rho^{(e)}, \rho^{(e)\prime}$ は始めおよび終りの電子の，$\rho^{(\gamma)}, \rho^{(\gamma)\prime}$ は同じく光子の密度行列である．光子の（テンソル）添字はあらわに記されているが，電子の（双スピノール）添字は暗に了解されるものとする．記号 Sp はもちろん，後者の添字に関するも

のである．定義 $\bar{Q}_{\mu\nu}=\gamma^0 Q^+_{\mu\nu}\gamma^0$ の記号 $^+$ もこれらの添字に関するものである．

散乱後の偏りに関心を持たずに，偏らない電子による偏らない光子の散乱を，考察しよう．全粒子の偏りについての平均は，密度行列

$$\rho^{(\gamma)}_{\lambda\mu}=\rho^{(\gamma)\prime}_{\lambda\mu}=-\frac{1}{2}g_{\lambda\mu},\quad \rho^{(e)}=\frac{1}{2}(\hat{p}+m),\quad \rho^{(e)\prime}=\frac{1}{2}(\hat{p}'+m)$$

を使って求められる．終りの粒子の偏りについての和は，さらに $2\times2=4$ を掛けることによって実現される．

公式 (65.23) にしたがって（ここで今は $I^2=\frac{1}{4}(s-m^2)^2$ と置く必要がある．(65.15a) 参照)，断面積に対して

$$d\sigma=\frac{\pi e^4}{4}\frac{dt}{(s-m^2)^2}\mathrm{Sp}\{(\hat{p}'+m)Q^{\lambda\mu}(\hat{p}+m)\bar{Q}_{\lambda\mu}\}.$$

公式 (66.2a) を使って $\bar{Q}_{\mu\lambda}=Q_{\lambda\mu}$ であることがわかる．置き換え $k\leftrightarrow -k'$（および対応して $s\leftrightarrow u$）に際して互いに移りあう項を分けて，断面積を

$$d\sigma=dt\frac{\pi e^4}{(s-m^2)^2}[f(s,u)+g(s,u)+f(u,s)+g(u,s)]$$

の形に表わす．ここで

$$f(s,u)=\frac{1}{4(s-m^2)^2}\mathrm{Sp}\,\{(\hat{p}'+m)\gamma^\mu(\hat{p}+\hat{k}+m)\gamma^\nu(\hat{p}+m)\gamma_\nu(\hat{p}+\hat{k}+m)\gamma_\mu\},$$

$$g(s,u)=\frac{1}{4(s-m^2)(u-m^2)}\mathrm{Sp}\,\{(\hat{p}'+m)\gamma^\mu(\hat{p}+\hat{k}+m)\gamma^\nu(\hat{p}+m)\gamma_\mu(\hat{p}-\hat{k}'+m)\gamma_\nu\}$$

と置いた（この記法のなかでわれわれは前から，結果が不変量だけに依存することを念頭に置いた)．

μ および ν についての和は公式 (22.6) を使って行なわれる．続いて奇数個の因子 γ を持つ項を落として

$$f(s,u)=\frac{1}{(s-m^2)^2}\mathrm{Sp}\,\{\hat{p}'(\hat{p}+\hat{k})\hat{p}(\hat{p}+\hat{k})+4m^2(\hat{p}+\hat{k})(\hat{k}-\hat{p}')+m^2\hat{p}\hat{p}'+4m^4\}.$$

公式 (22.13) を使って跡を計算し，すべての量を不変量 s, u によって表わし，簡単な変換ののちに

$$f(s,u)=\frac{2}{(s-m^2)^2}\{4m^4-(s-m^2)(u-m^2)+2m^2(s-m^2)\}.$$

g も同様に計算されて

$$g(s,u)=\frac{2m^2}{(s-m^2)(u-m^2)}\{4m^2+(s-m^2)+(u-m^2)\}.$$

この結果，断面積に対して次式を得る．

$$d\sigma = 8\pi r_e^2 \frac{m^2 dt}{(s-m^2)^2}\left\{\left(\frac{m^2}{s-m^2}+\frac{m^2}{u-m^2}\right)^2+\left(\frac{m^2}{s-m^2}+\frac{m^2}{u-m^2}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{s-m^2}{u-m^2}+\frac{u-m^2}{s-m^2}\right)\right\}. \tag{86.6}$$

ここで $r_e = e^2/m$ である．この公式は断面積を，不変量を使って表わしている．これを使うと容易に任意の具体的な基準系での衝突パラメータによって，断面積を表わすことができる．

衝突前の電子が静止している実験室系に対してこれを行なおう．すなわち，$p=(m,0)$ である．ここで

$$s-m^2 = 2m\omega, \quad u-m^2 = -2m\omega'. \tag{86.7}$$

4-運動量の保存の方程式を $p+k-k' = p'$ の形に書き，これを2乗して

$$pk-pk'-kk' = 0.$$

ここから（実験室系で）

$$m(\omega-\omega')-\omega\omega'(1-\cos\vartheta) = 0.$$

ここで ϑ は光子の散乱角である．この等式によって，光子のエネルギーの変化と散乱角のあいだの関係が決定される．すなわち

$$\frac{1}{\omega'}-\frac{1}{\omega} = \frac{1}{m}(1-\cos\vartheta). \tag{86.8}$$

不変量 t は

$$t = -2kk' = -2\omega\omega'(1-\cos\vartheta).$$

エネルギー ω が与えられたとき（(86.8) を使って）

$$dt = 2\omega'^2 d\cos\vartheta = \frac{1}{\pi}\omega'^2 do' \qquad (do' = 2\pi\sin\vartheta\, d\vartheta).$$

上記の式を (86.6) へ代入すると，実験室系の散乱断面積に対するつぎのような公式が導かれる．

$$d\sigma = \frac{r_e^2}{2}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2\left(\frac{\omega}{\omega'}+\frac{\omega'}{\omega}-\sin^2\vartheta\right)do' \tag{86.9}$$

(O. Klein, 仁科芳雄, 1929; И. Е. Тамм, 1930).

角度 ϑ は関係式 (86.8) によって ω' と一意的に結ばれているので，断面積は散乱光子のエネルギーによって表わすことができる．

$$d\sigma = \pi r_e^2 \frac{m\,d\omega'}{\omega^2}\left[\frac{\omega}{\omega'}+\frac{\omega'}{\omega}+\left(\frac{m}{\omega'}-\frac{m}{\omega}\right)^2-2m\left(\frac{1}{\omega'}-\frac{1}{\omega}\right)\right]. \tag{86.10}$$

ここで ω' は限界

$$\frac{\omega}{1+2\dfrac{\omega}{m}} \leqslant \omega' \leqslant \omega \tag{86.11}$$

のあいだを変化する．

$\omega \ll m$ のとき，(86.9) のなかで $\omega' \approx \omega$ と置くことができ，当然のことながら，古典的な非相対論のトムソンの公式

$$d\sigma = \frac{1}{2} r_e^2 (1+\cos^2 \vartheta)\, do' \tag{86.12}$$

が得られる（II (78.7) 参照)．

全断面積の計算のために公式 (86.6) にもどろう．そこに含まれる s, t, u は不等式

$$s \geqslant m^2, \quad t \leqslant 0, \quad us \leqslant m^4 \tag{86.13}$$

を満足する値をとる．これらはすでに§68 で求められた (第9図の物理的領域 I に対応する)．不変量を重心系で書くと，このことは容易に直接確かめられる．ここでは $\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k}=0$ であり，電子と光子のエネルギー ε と ω とは $\varepsilon=\sqrt{\omega^2+m^2}$ によって結ばれる．不変量は

$$\begin{aligned} s &= (\varepsilon+\omega)^2 = m^2+2\omega(\omega+\varepsilon), \\ u &= m^2-2\omega(\varepsilon+\omega\cos\theta), \\ t &= -2\omega^2(1-\cos\theta). \end{aligned} \tag{86.14}$$

ここで θ は散乱角（$\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{p}'$ のあいだ，あるいは $\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{k}'$ のあいだのなす角）である．三つの不変量 (86.13) は条件 $\omega \geqslant 0$，$-1 \leqslant \cos\theta \leqslant 1$ から求められる．

s が与えられた（すなわち，粒子のエネルギーが与えられた）とき，t についての積分を $u=2m^2-s-t$ についての，区間

$$\frac{m^4}{s} \geqslant u \geqslant 2m^2-s$$

のあいだの積分に変えることができる．

s, u の代りに

$$x = \frac{s-m^2}{m^2}, \quad y = \frac{m^2-u}{m^2} \tag{86.15}$$

という量を導入し

$$\sigma=\frac{8\pi r_e^2}{x^2}\int_{x/(x+1)}^{x}\left[\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)^2+\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{1}{4}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\right]dy.$$

初等的な積分ののちに

$$\sigma=2\pi r_e^2\frac{1}{x}\left\{\left(1-\frac{4}{x}-\frac{8}{x^2}\right)\ln(1+x)+\frac{1}{2}+\frac{8}{x}-\frac{1}{2(1+x)^2}\right\}. \qquad (86.16)$$

展開の第1項は $x\ll 1$ のとき（非相対論的な場合）には

$$\sigma=\frac{8\pi r_e^2}{3}(1-x) \qquad (86.17)$$

を与える．第1項は古典的トムソン断面積である．逆に，超相対論的な場合（$x\gg 1$）には，公式(86.16)の展開は

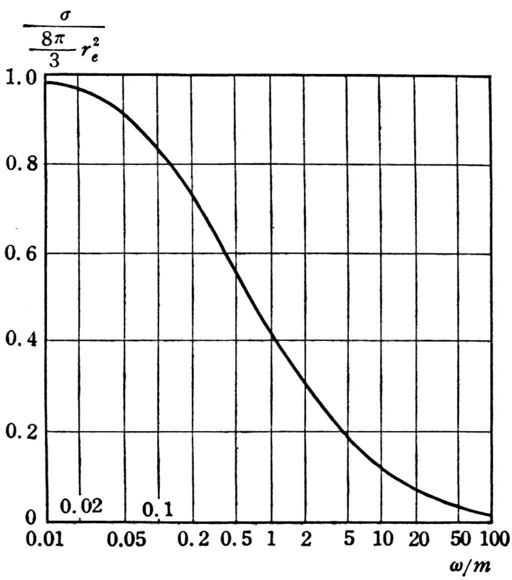
$$\sigma=2\pi r_e^2\frac{1}{x}\left(\ln x+\frac{1}{2}\right) \qquad (86.18)$$

を与える．

実験室系では

$$x=\frac{2\omega}{m} \qquad (86.19)$$

である．したがって公式(86.16)〜(86.18)は直接に，静止電子による散乱断面積の，光子エネルギーへの依存性を与える．第15図には σ の ω/m への依存性のグラフが与えられている．



第 15 図

超相対論的な場合にエネルギーが増大すると，実験室系でも（$\sigma\backsim\omega^{-1}\ln\omega$），また重心系でも（$x\approx 4\omega^2/m^2$, $\sigma\backsim\omega^{-2}\ln\omega$）断面積は減少する．超相対論的な場合に角度分布はこれら二つの基準系でまったく違った性質を持っている．

実験室系で微分断面積は前方に鋭い極大を持つ．$\vartheta\lesssim\sqrt{m/\omega}$ の狭い円錐内で $\omega'\sim\omega$ であり，断面積は $d\sigma/do'\sim r_e^2$ である（$\vartheta\to 0$ で r_e^2 に到達する）．この円錐外では断面積は減少し，$\vartheta^2\gg m/\omega$ の領域では（ここでは $\omega'\approx m/(1-\cos\vartheta)$ である）

$$\frac{d\sigma}{do'}=\frac{r_e^2}{2}\frac{m}{\omega(1-\cos\vartheta)}.$$

すなわち，断面積は $\sim m/\omega$ の減少になる．

重心系では微分断面積は後方に極大を持つ．$\pi-\theta\ll 1$ のとき，(86.14) から

$$\frac{s-m^2}{m^2}\approx\frac{4\omega^2}{m^2},\quad \frac{m^2-u}{m^2}\approx 1+\frac{\omega^2}{m^2}(\pi-\theta)^2.$$

断面積 (86.6) のなかの最大項は

$$d\sigma\approx 8\pi r_e^2\frac{m^2\,dt}{4(s-m^2)(m^2-u)}.$$

これから

$$d\sigma=\frac{r_e^2}{2}\frac{do'}{1+(\pi-\theta)^2\omega^2/m^2}.$$

$\pi-\theta\lesssim m/\omega$ の狭い円錐内での断面積は $d\sigma/do'\sim r_e^2$ である．このそとでは $\sim m^2/\omega^2$ の 減少になる．

§87. 電子による光子の散乱．偏りの効果

前節の出発点になった公式にもどり，始めおよび終りの光子および電子の偏りを考慮した計算を，どう行なわねばならないかを考えよう．

光子の密度行列は (8.17) にしたがって，条件 (8.16) を満足する単位4-ベクトルの対 $e^{(1)}$, $e^{(2)}$ を使って表わすことができる．与えられた場合これらのベクトルを，両方の光子に対してただ一つの方法で選ぶことができる．これは §71 で導入された4-ベクトルである[1]．すなわち

$$e^{(1)}=\frac{N}{\sqrt{-N^2}},\quad e^{(2)}=\frac{P}{\sqrt{-P^2}}.\tag{87.1}$$

---

1) 別の求め方はつぎのようなものである．始めにある基準系(たとえば，実験室系)を考察し，$e^{(1)}, e^{(2)}$ として光子の運動量に垂直な純空間的単位ベクトル ($e=(0,\boldsymbol{e})$) を選ぶ．すなわち

光子 $\boldsymbol{k}$ に対して；$\boldsymbol{e}^{(1)}=\dfrac{[\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}']}{|[\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}']|},\quad \boldsymbol{e}^{(2)}=\dfrac{1}{\omega}[\boldsymbol{k}\boldsymbol{e}^{(1)}]$,

光子 $\boldsymbol{k}'$ に対して；$\boldsymbol{e}^{(1)}=\dfrac{[\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}']}{|[\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}']|},\quad \boldsymbol{e}^{(2)}=\dfrac{1}{\omega'}[\boldsymbol{k}'\boldsymbol{e}^{(1)}]$

である．しかしながら，このとき，すべての計算は3次元形式で行なわれるので，その結果は不変形式を持たない．

ここで

$$P^{\lambda}=(p^{\lambda}+p'^{\lambda})-K^{\lambda}\frac{pK+p'K}{K^{2}},$$

$$N^{\lambda}=e^{\lambda\mu\nu\rho}P_{\mu}q_{\nu}K_{\rho},\tag{87.2}$$

$$K^{\lambda}=k^{\lambda}+k'^{\lambda},\quad q^{\lambda}=k'^{\lambda}-k^{\lambda}=p^{\lambda}-p'^{\lambda}.$$

(86.5) のなかの式 $Q^{\mu\nu}$ は (86.4) の式で与えられる．これは (これらが $\bar{u}'Q^{\mu\nu}u$ という，いわゆる≪囲まれた≫量を作ると，これが 4-テンソルを形成するという意味で) 4-テンソルの成分とみなすことができる．四つの互いに直交する 4-ベクトル，たとえば上で定義された P, N, q, K に投影すると，4-テンソルのすべての成分は全部尽すことができる．テンソル $\rho^{(\gamma)'}_{\mu\nu}$，$\rho^{(\gamma)}_{\mu\nu}$ は，P および N への成分だけを含んでいるので，実際に $Q_{\mu\nu}$ のこれらの 4-ベクトルへの成分だけがわれわれに必要になる．言いかえれば，$Q_{\mu\nu}$ のなかで

$$Q_{\mu\nu}=Q_{0}(e^{(1)}_{\mu}e^{(1)}_{\nu}+e^{(2)}_{\mu}e^{(2)}_{\nu})+Q_{1}(e^{(1)}_{\mu}e^{(2)}_{\nu}+e^{(2)}_{\mu}e^{(1)}_{\nu})$$
$$-iQ_{2}(e^{(1)}_{\mu}e^{(2)}_{\nu}-e^{(2)}_{\mu}e^{(1)}_{\nu})+Q_{3}(e^{(1)}_{\mu}e^{(1)}_{\nu}-e^{(2)}_{\mu}e^{(2)}_{\nu})\tag{87.3}$$

の形の項だけを求めればよいことになる．残りの項は (86.5) に代入するとすべて等しく落ちるはずである．Q_0 および Q_3 という量は $Q_{\mu\nu}$ が 4-テンソルであるのと同じ意味でスカラーである．したがって，それは γ の≪不変な≫結合だけを含んでいる．すなわち，$\hat{K}$ その他である．これと同じ意味で Q_1 および Q_2 は擬スカラー (N は擬ベクトルである!) であり γ^5 を含まなければならない．

テンソル $Q_{\mu\nu}$ を直接に投影することによって

$$Q_{0}=\frac{1}{2}Q^{\mu\nu}(e^{(1)}_{\mu}e^{(1)}_{\nu}+e^{(2)}_{\mu}e^{(2)}_{\nu}),$$

その他を得る．計算には始めに，$Q_{\mu\nu}$ を互いに直交する 4-ベクトル P, N, q, K を使って表わすと便利である．すなわち

$$Q^{\mu\nu}=\gamma^{\mu}\frac{\frac{1}{2}\hat{P}+m}{s-m^{2}}\gamma^{\nu}+\gamma^{\nu}\frac{\frac{1}{2}\hat{P}+m}{u-m^{2}}\gamma^{\mu}-\frac{1}{t}(\gamma^{\mu}\hat{K}\gamma^{\nu}-\gamma^{\nu}\hat{K}\gamma^{\mu}).$$

これから先の計算は，§22 で導入された公式を使う，純代数的な変形である．このほか将来，積 $\bar{u}'Q^{\mu\nu}u$ を作るときに結果には影響しない置き換えを，$Q^{\mu\nu}$ のなかで行なうことができる．たとえば

$$\bar{u}'(\hat{p}+\hat{p}')u = 2m\bar{u}'u,$$

$$\bar{u}'\gamma^5\hat{q}u_1 = \bar{u}'(\gamma^5\hat{p}+\hat{p}'\gamma^5)u = 2m\bar{u}'\gamma^5 u$$

であるから，$Q^{\mu\nu}$ のなかで

$$\hat{p}+\hat{p}' \longrightarrow 2m, \quad \gamma^5\hat{q} \longrightarrow 2m\gamma^5 \tag{87.4}$$

と置き換えてもよい．

計算の詳細を省略して，つぎの結果に到達する[1]．

$$\begin{aligned} Q_0 &= -ma_+, & Q_1 &= \frac{i}{2}a_+\gamma^5\hat{K}, \\ Q_2 &= -ma_+\gamma^5, & Q_3 &= ma_+ + \frac{1}{2}a_-\hat{K}, \end{aligned} \tag{87.5}$$

ここで

$$a_\pm = \frac{1}{s-m^2} \pm \frac{1}{u-m^2}.$$

これから先の計算のためには，光子の密度行列に対して §8 で書いたのと，まったく同じ形式的な書き方を $Q_{\mu\nu}$ に適用すると便利である．つまりテンソル (87.3) の $e^{(1)}$, $e^{(2)}$方向の四つの成分を，2行2列の行列Qにまとめて，続いてそれをパウリ行列に展開する．(8.18) の式と同様に

$$Q = Q_0\cdot 1+\mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}, \quad \mathbf{Q} = (Q_1, Q_2, Q_3). \tag{87.6}$$

(86.5) に現われるテンソル $\bar{Q}_{\mu\nu} = \gamma^0 Q^{+}_{\mu\nu}\gamma^0$ に関しては，(87.3) および (87.5) から ((66.2a) の法則を使って) この成分が $Q_{\mu\nu}$ の成分からQ_0, Q_1, …… という量を $\bar{Q}_0, \bar{Q}_1$, …… で置き換え，と同時に添字 $\mu\nu$ を交換することによって得られることが容易に確かめられる[2]．ここで

$$\bar{Q}_0 = Q_0, \ \bar{Q}_1 = -Q_1, \ \bar{Q}_2 = -Q_2, \ \bar{Q}_3 = Q_3. \tag{87.7}$$

行列の形でこれは

---

1) (87.5) の値を使った (87.3) の式は，§71 で一般的考察から立てられた (71.11)～(71.13) の形と一致している．T-不変性から出る等式 $f_3 = f_6 = 0$ のほかに，ここではさらに一つの不変振幅 (f_2) が 0 に等しいことがわかる．これは摂動近似で考察された性質で，高次の近似ではなくなるはずである．

2) 出発点になった形 (86.4) での行列 $Q_{\mu\nu}$ に対しては，簡単に $\bar{Q}_{\mu\nu} = Q_{\nu\mu}$ が成立したはずである．しかしながら，この性質は (87.4) の形の変換，その他を含む変換の結果失われる．

$$\overline{\mathrm{Q}} = \overline{\mathrm{Q}}_0 \cdot 1 + \overline{\mathbf{Q}}\tilde{\sigma} \tag{87.8}$$

を意味する.

今度は光子の偏りとの関係について, 4-ベクトル $e^{(1)}, e^{(2)}$ の意味を, はっきりさせよう. 各光子に対して偏りの独立な方向は, 3-ベクトル $e^{(1)}, e^{(2)}$ [1] の (光子の運動量 $\boldsymbol{k}$ に関して) 横成分で決定される. 重心系でも (始めの電子が静止している) 実験室系でも, ベクトル $\boldsymbol{P}$ は平面 $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}'$ 上にあり, ベクトル $\boldsymbol{N}$ はその平面に垂直である. したがって, 方向 $e^{(1)}$ は散乱面に垂直な, $e^{(2)}$ は散乱面内の偏りの意味を持つ. また, ストークスのパラメータ ξ_1, ξ_2, ξ_3 は ($\boldsymbol{k}$ 方向に z 軸を持つ) 右手系を形成する xyz 軸に関して定義されていることも考慮する必要がある. 始めの光子に対して, ベクトル $\boldsymbol{N}, \boldsymbol{P}_\perp, \boldsymbol{k}$ が終りの光子に対してはベクトル $\boldsymbol{N}, -\boldsymbol{P}'_\perp, \boldsymbol{k}'$ が ($\boldsymbol{P}_\perp, \boldsymbol{P}'_\perp$ は, それぞれ $\boldsymbol{k}$ および $\boldsymbol{k}'$ に垂直な $\boldsymbol{P}$ の成分である) このような系を形成する. 光子の密度行列 (8.17) のなかの $e^{(2)}$ の符号を変えることは, ξ_1 および ξ_2 の符号を変えることと同値である. したがって, 4-基底 $e^{(1)}, e^{(2)}$ に関する始めおよび終りの光子の密度行列は

$$\rho^{(\gamma)} = \frac{1}{2}(1+\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\sigma}), \quad \boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3);$$

$$\rho^{(\gamma)\prime} = \frac{1}{2}(1+\boldsymbol{\xi}'\boldsymbol{\sigma}), \quad \boldsymbol{\xi}' = (-\xi_1', -\xi_2', \xi_3'). \tag{87.9}$$

さてテンソルの跡

$$\rho^{(\gamma)\prime}_{\lambda\mu} \mathrm{Q}^{\mu\nu} \rho^{(\gamma)}_{\nu\rho} \widetilde{\overline{\mathrm{Q}}}^{\rho\lambda}$$

は行列 (87.6)～(87.9) の行列積の跡として, (33.5) を使って計算される.

結果として

$$\begin{aligned}|M_{fi}|^2 = 8\pi^2 e^4 \,\mathrm{Sp}\{&(\rho^{(e)\prime}\mathrm{Q}_0\rho^{(e)}\overline{\mathrm{Q}}_0 + \rho^{(e)\prime}\mathbf{Q}\rho^{(e)}\overline{\mathbf{Q}}) + (\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\xi}')(\rho^{(e)\prime}\mathrm{Q}_0\rho^{(e)}\overline{\mathbf{Q}} \\ &+ \rho^{(e)\prime}\mathbf{Q}\rho^{(e)}\overline{\mathrm{Q}}_0) - i(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}')[\rho^{(e)\prime}\mathbf{Q}\cdot\rho^{(e)}\overline{\mathbf{Q}}] + (\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}')(\rho^{(e)\prime}\mathrm{Q}_0\rho^{(e)}\overline{\mathrm{Q}}_0 \\ &- \rho^{(e)\prime}\mathbf{Q}\rho^{(e)}\overline{\mathbf{Q}}) + \rho^{(e)\prime}(\boldsymbol{\xi}'\mathbf{Q})\rho^{(e)}(\boldsymbol{\xi}\overline{\mathbf{Q}}) + \rho^{(e)\prime}(\boldsymbol{\xi}\mathbf{Q})\rho^{(e)}(\boldsymbol{\xi}'\overline{\mathbf{Q}}) \\ &- i[\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}'](\rho^{(e)\prime}\mathrm{Q}_0\rho^{(e)}\overline{\mathbf{Q}} - \rho^{(e)\prime}\mathbf{Q}\rho^{(e)}\overline{\mathrm{Q}}_0)\}.\end{aligned} \tag{87.10}$$

偏らない電子による散乱

偏らない電子による偏った光子の散乱断面積は, 終りの電子の偏りについて和をとっ

---

1) この場合には e の縦成分は (4-ベクトル e の時間成分と同様), 簡単に無視できる. このことは, ゲージ不変性によって保証される.

て，完全に計算できる．このためには (87.10) に

$$\rho^{(e)} = \frac{1}{2}(\hat{p}+m), \quad \rho^{(e)\prime} = \frac{1}{2}(\hat{p}'+m)$$

を代入し，その結果を2倍する必要がある．そしてこれを，断面積に対する公式(65.22)

$$d\sigma = \frac{1}{32\pi^2}\frac{dt\,d\varphi}{(s-m^2)^2}|M_{fi}|^2$$

のなかの $|M_{fi}|^2$ の代りに置く必要がある（φ は重心系あるいは実験室系での方位角）．(87.10)の一連の項（4行目の項，および1，2および3行目の一部分）は恒等的に0になる．残りの項の計算は ((86.15) の記号を使って) つぎのような最終的結果へと導く．

$$d\sigma = \frac{1}{2}d\bar{\sigma}+2r_e^2\frac{dy\,d\varphi}{x^2}\Big\{(\xi_3+\xi_3')\Big[-\Big(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\Big)^2-\Big(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\Big)\Big]+\xi_1\xi_1'\Big(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{1}{2}\Big)$$
$$+\xi_2\xi_2'\frac{1}{4}\Big(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\Big)\Big(1+\frac{2}{x}-\frac{2}{y}\Big)+\xi_3\xi_3'\Big[\Big(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\Big)^2+\Big(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\Big)+\frac{1}{2}\Big]\Big\}. \quad (87.11)$$

$d\bar{\sigma}$ は，偏りのない光子による散乱断面積で，公式 (86.9) で与えられる．因子 1/2 は，(87.11) には，終りの光子の偏りについての和がないことからきている．

実験室系では公式 (87.11) は

$$d\sigma = \frac{r_e^2}{4}\Big(\frac{\omega'}{\omega}\Big)^2 do'\{F_0+F_3(\xi_3+\xi_3')+F_{11}\xi_1\xi_1'+F_{22}\xi_2\xi_2'+F_{33}\xi_3\xi_3'\},$$
$$do' = \sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi \quad (87.12)$$

の形になる．ここで

$$F_0 = \frac{\omega}{\omega'}+\frac{\omega'}{\omega}-\sin^2\vartheta, \quad F_3 = \sin^2\vartheta,$$
$$F_{11} = 2\cos\vartheta, \quad F_{22} = \Big(\frac{\omega}{\omega'}+\frac{\omega'}{\omega}\Big)\cos\vartheta, \quad F_{33} = 1+\cos^2\vartheta \quad (87.13)$$

である (U. Fano, 1949)．(87.12) の式は散乱面の方位角への依存性をあらわには含まないが，パラメータ ξ_1,ξ_2,ξ_3 が散乱面と結びついた x,y,z 軸に関して定義されているので，あらわでない依存性は持っている．両方の光子に対して x 軸は同じで，散乱面に垂直であること，すなわち

$$\boldsymbol{x} \parallel [\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}']$$

であり，y 軸は散乱面内に存在すること，すなわち

$$\boldsymbol{y} \parallel [\boldsymbol{k}[\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}']], \quad \boldsymbol{y}' \parallel [\boldsymbol{k}'[\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}']]$$

であることを思い起こそう.

$\boldsymbol{\xi}'$ の符号の異なる断面積の和をとり(すなわち, $\boldsymbol{\xi}'=0$ と置き結果を2倍して), われわれは偏りのない電子による偏った光子の散乱の（終りの光子の偏りについての和をとった）全断面積を得る. これを $d\sigma(\boldsymbol{\xi})$ と置いて

$$d\sigma(\boldsymbol{\xi})=\frac{1}{2}r_e^2\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 F do'. \tag{87.14}$$

ここで

$$F=F_0+\xi_3 F_3=\frac{\omega}{\omega'}+\frac{\omega'}{\omega}-(1-\xi_3)\sin^2\vartheta \tag{87.15}$$

である. 散乱面に垂直に偏った ($\xi_3=1$) 光子の散乱断面積は, 散乱面内に偏った ($\xi_3=-1$) 光子のよりも大きいことがわかる. 断面積は円偏光には依存しない. またそれはパラメータ ξ_1 にも依存しない. したがって, x あるいは y 軸方向の直線偏光がなければ ($\xi_3=0$), あるいはこれらの軸と 45° をなしている方向の偏りであっても, 散乱断面積は偏りのない光子に対する断面積と一致する.

偏った光子を検出する, 偏りのない光子の散乱断面積も類似の性質を持つ. この断面積(これを $d\sigma(\boldsymbol{\xi}')$ と置こう）は $\boldsymbol{\xi}=0$ と置けば公式 (87.12) から得られる. すなわち

$$d\sigma(\boldsymbol{\xi}')=\frac{1}{4}r_e^2\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 F' do',\quad F'=F_0+\xi_3' F_3. \tag{87.16}$$

また公式 (87.12) から, 2次光子の偏りがどのようなものであるかがわかる. この偏りを, 検出される偏り $\boldsymbol{\xi}'$ と区別して $\boldsymbol{\xi}^{(f)}$ によって表わそう. §66 に記述された法則により $\boldsymbol{\xi}^{(f)}$ は, ξ_i' の係数と, $\boldsymbol{\xi}'$ を含まない項との比に等しい. すなわち

$$\xi_1^{(f)}=\frac{F_{11}}{F}\xi_1,\quad \xi_2^{(f)}=\frac{F_{22}}{F}\xi_2,\quad \xi_3^{(f)}=\frac{F_3+F_{33}\xi_3}{F}. \tag{87.17}$$

特に, 偏りのない光子の散乱の際には

$$\xi_1^{(f)}=\xi_2^{(f)}=0,\quad \xi_3^{(f)}=\frac{\sin^2\vartheta}{\omega/\omega'+\omega'/\omega-\sin^2\vartheta}. \tag{87.18}$$

このときは $\xi_3^{(f)}>0$ である. すなわち, 2次光子は散乱面に垂直に偏っている. 2次光子の円偏光は, 1次光子が円偏光のときにのみ生じる. すなわち, $\xi_2\neq 0$ のときにのみ $\xi_2^{(f)}\neq 0$ である.

入射光子が完全な直線偏光 ($\xi_2=0$, $\xi_1^2+\xi_3^2=1$) の場合を考察しよう. そして2次光子の直線偏光が検出されるような散乱断面積を見いだそう. パラメータ ξ_i および ξ_i' を, 光子の偏りのベクトル $\boldsymbol{e}$ および $\boldsymbol{e}'$ の成分を使って表わし, 散乱断面積に対するつぎのよ

うな式を得る．

$$d\sigma = \frac{r_e^2}{4}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2\left(\frac{\omega}{\omega'}+\frac{\omega'}{\omega}-2+4\cos^2\Theta\right)do'. \tag{87.19}$$

ここで Θ は入射および散乱光子の偏りの方向のあいだの角である[1]．

この公式にしたがうと断面積は，偏り e および e' が互いに垂直な場合と，それらが一平面上にある場合とで本質的に異なったふるまいをする．これら二つの場合を添字 $\perp$ および $\parallel$ で区別して，非相対論的極限で $(\omega \ll m,\ \omega' \approx \omega)$

$$d\sigma_\perp = 0, \quad d\sigma_\parallel = r_e^2 \cos^2\Theta\, do' \tag{87.20}$$

を得る．これは古典的公式と一致する．逆の超相対論的な場合には，$\omega \gg m$，$\omega' \approx m/(1-\cos\vartheta)$ である．ここでは大きい角と小さい角の（ω/ω' が大きいかあるいは小さい）領域を区別する必要がある．すなわち

$$\begin{aligned} d\sigma_\perp = d\sigma_\parallel &= \frac{1}{4}r_e^2\frac{\omega'}{\omega}do' = \frac{1}{4}r_e^2\frac{m\,do'}{\omega(1-\cos\vartheta)} \quad \left(\vartheta^2 \gg \frac{m}{\omega}\right), \\ d\sigma_\perp = 0, \quad d\sigma_\parallel &= r_e^2\cos^2\Theta\, do' \quad \left(\vartheta^2 \ll \frac{m}{\omega}\right). \end{aligned} \tag{87.21}$$

非常に小さい角度の領域では散乱断面積は古典論と一致することがわかる．非常に小さくはない角度のときの等式 $d\sigma_\perp \approx d\sigma_\parallel$ は，この領域で超相対論的散乱の場合に輻射が偏らないことを意味している．しかしながら，この結論はもちろん直線偏光の入射光子に関するものであることを強調しよう．すなわち，(87.17) から超相対論的な場合の円偏光に対しては，$\xi_2^{(f)} \approx \cos\vartheta\cdot\xi_2$ であることがわかる．

偏った電子による散乱

偏った電子に対し公式 (87.10) のなかの跡の計算は，原理的な困難はないが非常に膨大なものになる．ここでこのような計算[2]の二，三の最終結果を示そう．

---

1) 公式 (87.19) 自身は，始めに散乱振幅 (86.3) のなかで $e=(0,\boldsymbol{e})$，$e'=(0,\boldsymbol{e}')$ と置き，さらに先の振幅の平方の計算を（すなわち，4-ベクトルの時間および空間成分を分けて）3次元形式で行なうことにより，簡単に得られる．$\cos^2\Theta = (\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}')^2$ を $\boldsymbol{e}$ および $\boldsymbol{e}'$ の方向について ((45.4a) を使って) 平均し，断面積を2倍し（$\boldsymbol{e}'$ についての和に移り），(86.9) にもどることになる．

2) この結果の完全な導き方は原論文を参照すること： F. Lipps, H. A. Tolhoek, *Physica* **20**, 85, 395 (1954).
総合報告も参照のこと：H. A. Tolhoek, *Rev. Mod. Phys.* **28**, 277 (1956), H. McMaster, *Rev. Mod. Phys.* **33**, 8 (1961).

一般の場合に断面積は，始めおよび終りの光子の偏りのパラメータ $\boldsymbol{\xi}$ および $\boldsymbol{\xi}'$ にも，またベクトル $\boldsymbol{\zeta}$ および $\boldsymbol{\zeta}'$ で特長づけられる始めおよび終りの電子の偏りにも依存する．断面積のこれらのパラメータに対する依存性は線型である．断面積は

$$d\sigma = \frac{1}{2}d\sigma(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}')+\frac{r_e^2}{8}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 do'\{\boldsymbol{f\zeta}\xi_2+\boldsymbol{f}'\boldsymbol{\zeta}\xi_2'+\boldsymbol{g\zeta}'\xi_2+\boldsymbol{g}'\boldsymbol{\zeta}'\xi_2'+G_{ik}\zeta_i\zeta_k'+\cdots\} \quad (87.22)$$

の形になる．ここで $d\sigma(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}')$ は断面積 (87.12) である．二つの偏りのパラメータの積を含むすべての項が書かれている．三つあるいは四つのパラメータの積を含む項は落とされた．二つの粒子のみの偏りのあいだの相関にわれわれが興味を持つならば，これらの項は重要ではない．他の二つの粒子の偏りのパラメータが 0 に等しいときにこれらは 0 になる．実験室系での係数中の若干の値を示そう．

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{f} &= -\frac{1}{m}(1-\cos\vartheta)(\boldsymbol{k}\cos\vartheta+\boldsymbol{k}'),\\
\boldsymbol{f}' &= -\frac{1}{m}(1-\cos\vartheta)(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}'\cos\vartheta),\\
\boldsymbol{g} &= -\frac{1}{m}(1-\cos\vartheta)\left[(\boldsymbol{k}\cos\vartheta+\boldsymbol{k}')-(1+\cos\vartheta)\frac{\omega+\omega'}{\omega-\omega'+2m}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\right],\\
\boldsymbol{g}' &= -\frac{1}{m}(1-\cos\vartheta)\left[(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}'\cos\vartheta)-(1+\cos\vartheta)\frac{\omega+\omega'}{\omega-\omega'+2m}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\right].
\end{aligned} \quad (87.23)$$

断面積 (87.22) には $\boldsymbol{G\zeta}$ の形の項はない．これは電子の偏りが，($\boldsymbol{\xi}'$ と $\boldsymbol{\zeta}'$ について加えた) 偏りのない光子の全散乱断面積には影響しないことを意味する．また $\boldsymbol{G}'\boldsymbol{\zeta}'$ の形の項もない．これは偏りのない光子の散乱の際に，反跳電子が偏らないことを意味する．

われわれはまた，電子と光子の偏りについて双 1 次の項は，光子の円偏光に対応するパラメータ ξ_2, ξ_2' だけを含むことがわかる．電子の偏りのベクトル $\boldsymbol{\zeta}$ および $\boldsymbol{\zeta}'$ は，これらのベクトルの散乱面への投影だけを含むようなスカラー乗積 $\boldsymbol{f\zeta}$, …… の形でのみ入っている．したがってたとえば，偏った電子による偏った光子の散乱断面積は

$$d\sigma(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\zeta}) = d\sigma(\boldsymbol{\xi})+\frac{1}{2}r_e^2\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2\xi_2\boldsymbol{f\zeta}\, do' \quad (87.24)$$

となり，光子には，円偏光が存在し，電子では平均スピンの散乱面への投影が 0 と異なるときにのみ $d\sigma(\boldsymbol{\xi})$ と異なる．同じ理由で反跳電子は，光子が円偏光を持つ場合にのみ偏っている．このとき電子に生じた偏りのベクトルは散乱面内にある．すなわち

$$\boldsymbol{\zeta}^{(f)} = \frac{1}{F}\xi_2\boldsymbol{g}. \quad (87.25)$$

対称関係

最後に，電子による光子の散乱の際の偏りの効果の定性的性質は，対称性の一般的要求からだけでも導かれることを示そう．

円偏光のパラメータ ξ_2 は擬スカラーである（§8参照）．したがって，P-不変性の要求から散乱振幅中の $\backsim \xi_2$（あるいは $\backsim \xi'_2$）の形の項は，ξ_2 とわれわれが使えるベクトル $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}'$ から作られるなんらかの擬スカラーとの積の形になることはできる[1]．しかし二つの極性ベクトルから擬スカラーは作れない．ここから，断面積中に上記の項は存在できないことが言える．

直線偏光のパラメータ ξ_1 および ξ_3 は，2次元の（$\boldsymbol{k}$ に垂直な平面内の）対称テンソルの成分である．

$$(S_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2}(\rho^{(\gamma)}_{\alpha\beta}+\rho^{(\gamma)}_{\beta\alpha}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+\xi_3 & \xi_1 \\ \xi_1 & 1-\xi_3\end{pmatrix}.$$

与えられた場合，偏りの軸の一つがベクトル $\boldsymbol{\nu}=[\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}']$ 方向に選ばれ，他は $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}'$ 面内（一方あるいは他方の光子に対して，ベクトル $[\boldsymbol{k}\boldsymbol{\nu}]$ あるいは $[\boldsymbol{k}'\boldsymbol{\nu}]$ の方向）にある．$\backsim \xi_1$ の項は断面積中に積 $S_{\alpha\beta}\nu_\alpha[\boldsymbol{k}'\boldsymbol{\nu}]_\beta$（あるいは同じことだが $S_{\alpha\beta}\nu_\alpha k'_\beta$）としてのみ含まれうる．しかしながら，$\boldsymbol{\nu}$ は軸性，$\boldsymbol{k}$ は極性ベクトルで，$S_{\alpha\beta}$ は真性テンソルであるからこのような積は反転に関して不変ではない．したがって，$\backsim \xi_1$（あるいは $\backsim \xi'_1$）の項は断面積中には存在できない．$\backsim \xi_3$（あるいは $\backsim \xi'_3$）の項は積 $S_{\alpha\beta}\nu_\alpha\nu_\beta$ などの形で現われるので，対称性の考察によっては禁止されない．

断面積中の電子の偏り $\boldsymbol{\zeta}$ に比例する項は，偶奇性によっては禁止されない．なぜかというと，このような項は二つの軸性ベクトルの積として作られうるはずだからである．すなわち $\boldsymbol{\zeta\nu}$ である．しかしながら，われわれが考察している摂動論の消えない近似では，その近似での散乱行列のエルミート性の結果，それらは存在することができない（§72）．

このエルミート性のために，散乱振幅の2乗（およびそれとともに断面積）は始および終状態の交換に際して変化しない．と同時に断面積は，時間反転，すなわち同時に全部の粒子の運動量および角運動量の符号の変化（このときストークスのパラメータ ξ_1, ξ_2, ξ_3 は変わらない —— §8参照）を伴う，始および終状態の交換に対して不変でなければならない．この二つの要求を結びつけて，今考えられている近似で，始および終状態の交換な

1) われわれは $\boldsymbol{p}=0$，$\boldsymbol{p}'=\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'$ である実験室系での過程を考える．われわれに興味のある対称性の要求の結果，（断面積中にあれこれの項が存在したりしなかったりすること）は基準系の選び方には依存しないのは明らかである．

しに，同時にすべての運動量および角運動量の符号を変えても，すなわち，パラメータ ξ, ξ' を変えないで行なう変換

$$\boldsymbol{k} \to -\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{k}' \to -\boldsymbol{k}', \quad \boldsymbol{\zeta} \to -\boldsymbol{\zeta}, \quad \boldsymbol{\zeta}' \to -\boldsymbol{\zeta}' \tag{87.26}$$

に対しては，断面積は変化してはならない.

変換 (87.26) は積 $\boldsymbol{\zeta\nu}$ の符号を変える. したがって，このような項は断面積に現われることができない. しかしながら，この禁止は対称性の厳密な要求の結果ではなく，したがって摂動論のつぎの近似では破られうることを強調しよう.

光子の偏り相互の2重相関の項のなかで，偶奇性についての対称性は $\xi_1\xi_3$ および $\xi_2\xi_3$ の形の項だけを禁止し，光子と電子の相関のなかでは何も禁止されない. しかしながら始めの近似では，変換 (87.26) に関する不変性の要求によって，$\xi_1\xi_2$, $\xi_1\boldsymbol{\zeta}$, $\xi_3\boldsymbol{\zeta}$ の形のすべての項が禁止される. そこで $\xi_1\xi_2'$ および $\xi_1\boldsymbol{\zeta}$ の形の項は（偶奇性を守るという観点では）スカラー，たとえば $\xi_2' S_{\alpha\beta} k_\alpha' \nu_\beta$ および $(S_{\alpha\beta} k_\alpha' \nu_\beta)(\boldsymbol{\zeta k})$ を作ることができるはずである. しかしながら，これらの結合は変換 (87.26) で符号を変える.

$\xi_2\boldsymbol{\zeta}$ の形の許された相関項は，$\xi_2(\boldsymbol{\zeta k})$ の形の積として作られうる. 電子の偏りのベクトルはそのなかに，散乱面への投影の形で含まれる.

最後に，交叉不変性の要求から，許される項の係数間の一連の関係が出てくる. 始めおよび終りの光子の交換だけが違っている反応チャネルは，同じ過程，すなわち電子による光子の散乱に対応している. したがって，振幅の絶対値の2乗およびそれとともに散乱断面積は，電子の運動量と偏りが不変のときこれらのチャネルの一方から他方へ移ることを表わす変換

$$k \leftrightarrow -k', \quad e \leftrightarrow e'^*$$

に対して不変でなければならない. 3次元形式ではこの変換は，置き換え

$$\begin{gathered} \omega \leftrightarrow -\omega', \quad \boldsymbol{k} \leftrightarrow -\boldsymbol{k}', \\ \xi_1 \leftrightarrow \xi_1', \quad \xi_2 \leftrightarrow -\xi_2', \quad \xi_3 \leftrightarrow \xi_3' \end{gathered} \tag{87.27}$$

を意味する. パラメータ ξ_2 の符号の変化は $\xi_2 = i[\boldsymbol{ee}^*]\boldsymbol{n}$ という式から明らかである. このなかでベクトル $[\boldsymbol{ee}^*]$ は置き換え $\boldsymbol{e} \leftrightarrow \boldsymbol{e}^*$ で符号を変える. そしてベクトル $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}/\omega$ は置き換え $\boldsymbol{k} \leftrightarrow -\boldsymbol{k}$, $\omega \leftrightarrow -\omega$ に際し不変である. 変換 (87.27) は電子の運動量には触れないで，実験室系を実験室系のままにしておく. したがって，この変換に際して，断面積 (87.22) はその形を変える必要はない. 公式 (87.12), (87.22), (87.23) は実際にこの条

件を満足している。

§88.　2光子性電子対消滅

2光子（k_1 および k_2）の形成を伴う，電子と陽電子（4-運動量 p_- および p_+）の消滅は，二つの図形



(88.1)

に対応する．これは電子による光子の散乱と，置き換え

$$p \to p_-,\quad p' \to -p_+,\quad k \to -k_1,\quad k' \to k_2 \tag{88.2}$$

だけが異なっている．両過程は同一の(一般化された)反応の交叉チャネルである．(88.2)の置き換えののち，運動学的不変量(86.2)はつぎのような意味を持つ．

$$\begin{aligned} s &= (p_- - k_1)^2,\\ t &= (p_- + p_+)^2 = (k_1 + k_2)^2,\\ u &= (p_- - k_2)^2. \end{aligned} \tag{88.3}$$

もしも光子の散乱が s-チャネルであるならば，その消滅は t-チャネルである．

消滅に対する（電子の偏りについて平均され，光子の偏りについて和をとった）平方 $|M_{fi}|^2$ は，不変量 s，u によって表わされると，不変量の意味だけを変えた散乱に対する類似の量と一致する[1]．断面積に対する公式(65.23)のなかで，$|M_{fi}|^2$ に掛かる因子中で，$s \leftrightarrow t$ の置き換えをする必要がある．このとき量 I は(65.15a)にしたがって，$I^2 = t(t-4m^2)/4$ である．公式(86.6)で対応する変更を行ない，結果として消滅断面積を得る．

$$d\sigma = 8\pi r_e^2 \frac{m^2 ds}{t(t-4m^2)}\left\{\left(\frac{m^2}{s-m^2}+\frac{m^2}{u-m^2}\right)^2+\left(\frac{m^2}{s-m^2}+\frac{m^2}{u-m^2}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{4}\left(\frac{s-m^2}{u-m^2}+\frac{u-m^2}{s-m^2}\right)\right\}. \tag{88.4}$$

消滅チャネルの物理的領域は第9図の領域 II である．(重心系のエネルギーが与えられれば）t が与えられたとき，s の変化の区間は境界の方程式 $su = m^4$ で定義される．関

1）　このとき，光子と電子が同数の（2個の）独立な偏りを持つので，$|M_{fi}|^2$ が何について平均され，何について和をとるかは重要ではない．

係式 $s+t+u=2m^2$ とともに，それは

$$-\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{t(t-4m^2)} \leqslant s-m^2 \leqslant -\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{t(t-4m^2)} \tag{88.5}$$

を与える．

(88.4) 式の積分は初等的である．二つの終りの粒子（光子）の同一性を考慮して，結果をさらに2で割る必要がある．このようにして

$$\sigma=\frac{2\pi r_e^2}{\tau^2(\tau-4)}\left[(\tau^2+4\tau-8)\ \ln\frac{\sqrt{\tau}+\sqrt{\tau-4}}{\sqrt{\tau}-\sqrt{\tau-4}}-(\tau+4)\sqrt{\tau(\tau-4)}\right]. \tag{88.6}$$

ここで $\tau=t/m^2$ である (P. A. M. Dirac, 1930).

非相対論的極限（$\tau\to4$）では，これから

$$\sigma=\frac{\pi r_e^2}{\sqrt{\tau-4}}. \tag{88.7}$$

超相対論的な場合（$\tau\to\infty$）には

$$\sigma=\frac{2\pi r_e^2}{\tau}(\ln\tau-1). \tag{88.8}$$

粒子の一つ（たとえば電子）が衝突前に静止しているような実験室系では，不変量 τ は

$$\tau=2(1+\gamma),\quad \gamma=\frac{\varepsilon_+}{m}. \tag{88.9}$$

公式 (88.6)～(88.8) は全断面積の，陽電子のエネルギーへの依存性を与える．

$$\sigma=\frac{\pi r_e^2}{\gamma+1}\left[\frac{\gamma^2+4\gamma+1}{\gamma^2-1}\ln(\gamma+\sqrt{\gamma^2-1})-\frac{\gamma+3}{\sqrt{\gamma^2-1}}\right]. \tag{88.10}$$

特に非相対論的な場合には [1)]

$$\sigma=\frac{\pi r_e^2}{v_+}\qquad\text{(非相)} \tag{88.11}$$

ここで v_+ は陽電子の速度である．

電子陽電子の重心系で，2光子は同じエネルギー $\varepsilon=\omega$ を持つ．不変量は

$$m^2-s=2\varepsilon(\varepsilon-|\boldsymbol{p}|\cos\theta),\quad m^2-u=2\varepsilon(\varepsilon+|\boldsymbol{p}|\cos\theta),$$
$$t=4\varepsilon^2. \tag{88.12}$$

ここで θ は，電子と光子のなかの一つとの運動量のあいだの角度である．(88.4) に代入して，対消滅の光子の角度分布を得る．

---

1) しかしながら，$v_+\lesssim\alpha$ のときにはこの公式は使えない．そして対の成分のクーロン相互作用を無視してはいけない．

$$d\sigma = \frac{r_e^2 m^2}{4\varepsilon|\boldsymbol{p}|}\left[\frac{\varepsilon^2+p^2(1+\sin^2\theta)}{\varepsilon^2-p^2\cos^2\theta}-\frac{2p^4\sin^4\theta}{(\varepsilon^2-p^2\cos^2\theta)^2}\right]do. \tag{88.13}$$

超相対論的な場合に，$\theta=0$ および $\theta=\pi$ の方向に対称的な極大を持っている．$\theta=0$ の近くでは

$$d\sigma \approx \frac{r_e^2 m^2\, do}{2\varepsilon^2(\theta^2+m^2/\varepsilon^2)} \qquad (\text{超相}) \tag{88.14}$$

となる．全断面積は (88.6) から求められる．すなわち

$$\sigma = \pi r_e^2 \frac{1-v^2}{4v}\left[\frac{3-v^4}{v}\ln\frac{1+v}{1-v}-2(2-v^2)\right]. \tag{88.15}$$

ここで $v=|\boldsymbol{p}|/\varepsilon=\sqrt{\varepsilon^2-m^2}/\varepsilon$ は衝突粒子の速度である．

われわれはここで消滅の際の偏りの効果を詳しく考察することはよそう[1]．衝突粒子の速度 v が大きいかあるいは小さい極限で，これらの効果の若干の定性的特異性だけを詳述することにしよう．そのために，重心系でこの過程を考察しよう．

$v\to 0$ の極限で断面積への 0 と異なる寄与は，相対運動の軌道角運動量 $l=0$ を持つ状態だけが与える．しかし《電子＋陽電子》系の S-状態は負の偶奇性を持っている（§27 の問題参照）．2 光子系の奇状態ではその偏りは互いに直交する (§9)．したがって，非相対論的な場合には，対消滅の光子はこのような性質を持つ必要がある．

その非相対論的な場合には，もしも電子と陽電子が偏っていると，これらの消滅はスピン反平行のときにのみ可能であると主張することができる．事実，対消滅は S-状態で起こるので，系の全角運動量は粒子の全スピンと一致し，スピン平行のときは 1 に等しい．2 光子系は一般に全角運動量 1 の状態は持たない（§9）．

超相対論的な場合（$v\to 1$）には，縦方向に偏った (螺線状) 電子と陽電子の対消滅は，それらの螺線度の符号が異なるときにのみ可能である[2]．この極限では，螺線状粒子はニュートリノのようにふるまう (§81 末尾参照)．したがって，電子と陽電子の対消滅は，ニュートリノと反ニュートリノに類似しているはずである．このことから上記の主張が導かれる．

同一螺線度を持つ電子と陽電子の対消滅は，超相対論的な場合には m を含む項を考慮す

---

1) L. A. Page, *Phys. Rev.* **106**, 394 (1957) ; H. McMaster, *Rev. Mod. Phys.* **33**, 8 (1961) 参照．

2) 同時に（重心系で）粒子の運動量の方向が逆であるから，螺線度の符号が異なることは，スピン平行に対応する．

る場合にのみ起こる．この過程の振幅の大きさの程度は，スピン平行な対消滅の振幅と，因子 m/ε だけ異なる．断面積はそれにしたがって，因子 $(m/\varepsilon)^2$ だけ異なる．

問　　題

2光子の衝突の際の電子対生成の断面積を求めよ（G. Breit, J. A. Wheeler, 1934）．

解　この過程は2光子性電子対消滅の逆である．二つの過程の振幅は同じで，その断面積との関係は，今は $I^2 = (k_1k_2)^2 = t^2/4$ である点が違っている．したがって

$$d\sigma_{生} = d\sigma_{消}\frac{t-4m^2}{t}.$$

重心系（$t = 4\varepsilon^2 = 4\omega^2$）では

$$d\sigma_{生} = v^2 d\sigma_{消}.$$

ここで v は対の成分の速度である．全断面積を求める目的の積分にあたって，終りの粒子が同一でないため（電子と陽電子）に対消滅の場合のように結果を2で割ってはいけないことを考慮する必要がある．したがって（重心系で）

$$\sigma_{生} = 2v^2\sigma_{消} = \frac{\pi r_e^2}{2}(1-v^2)\left\{(3-v^4)\ln\frac{1+v}{1-v}-2v(2-v^2)\right\}. \quad (1)$$

2光子 k_1 および k_2 が向かいあって飛ぶ，任意の基準系 K では，（k_1k_2 の不変性から）

$$\omega_1\omega_2 = \omega^2$$

を得る．ここで ω は重心系での光子のエネルギーである．重心系では光子および対の成分のエネルギーは一致し，$\omega = \varepsilon = m/\sqrt{1-v^2}$ である．したがって系 K に移るためには，(1)に

$$v = \sqrt{1-\frac{m^2}{\omega_1\omega_2}}$$

を代入する必要がある．

§89. ポジトロニウムの消滅

運動量保存則のために，ポジトロニウム中の電子と陽電子の消滅は，少なくとも2光子の放出を伴う必要がある．しかしながら，このような崩壊は（基底状態では）パラ・ポジトロニウムに対してのみ可能である．§9 で2光子系の全角運動量は1に等しくなりえないことを示した．したがって $^3S_1$ 状態にあるポジトロニウムは2光子に崩壊できない．さらに，$^3S_1$ 状態でポジトロニウムは荷電奇の系である（§27 の問題参照）ので，ファリー

の定理（§80）のために，任意の偶数個の光子への崩壊は一般に不可能である．反対に $^1S_0$ 状態でポジトロニウムは荷電偶である．したがって，任意の奇数個の光子へのパラ・ポジトロニウムの崩壊は禁止される．

このようにして，ポジトロニウムの寿命を決定する基本的な過程は，パラ・ポジトロニウムのときは2光子性消滅であり，オルソ・ポジトロニウムのときには3光子性消滅である（И. Я. Померанчук, 1948）．崩壊確率は自由な対の消滅の断面積と関係づけることができる．

ポジトロニウム内の電子と陽電子の運動量は $\sim me^2/\hbar$ である．すなわち，mc にくらべて小さい．したがって，消滅確率の計算にあたって，座標原点で静止している2粒子の極限に移してもよい．$\bar{\sigma}_{2\gamma}$ を，両粒子のスピンの方向で平均された，自由な対の光子性消滅の断面積としよう．非相対論的な極限では，(88.11) にしたがって

$$\bar{\sigma}_{2\gamma}=\pi\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\frac{c}{v} \tag{89.1}$$

となる[1]．ここで v は粒子の相対速度である．われわれは $v|\psi(0)|^2$ に等しい電流密度を $\bar{\sigma}_{2\gamma}$ に掛けて，消滅の確率 $\overline{w}_{2\gamma}$ を得る．ここで $\psi(r)$ は1に規格化された基底状態のポジトロニウムの波動関数である．

$$\psi(r)=\frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}e^{-\frac{r}{a}},\qquad a=\frac{2\hbar^2}{me^2} \tag{89.2}$$

（換算質量が 1/2 である関係から，ボーア半径 a は水素原子のそれの2倍である）．しかしながら，この確率は始状態のスピンについて平均されたものに対応している．それにもかかわらず，ポジトロニウムにおいては2粒子系の四つの可能なスピン状態のなかで，一つ（全スピン0のもの）のみが2光子性消滅を行ないうる．したがって，平均崩壊確率 $\overline{w}_{2\gamma}$ はパラ・ポジトロニウムの崩壊確率 w_0 と関係式 $\overline{w}_{2\gamma}=w_0/4$ で結ばれる．このようにして

$$w_0=4|\psi(0)|^2(v\bar{\sigma}_{2\gamma})_{v\to0}. \tag{89.3}$$

(89.1), (89.2) の値を代入して，パラ・ポジトロニウムの寿命を得る．

$$\tau_0=\frac{2\hbar}{mc^2\alpha^5}=1.23\cdot10^{-10}\text{ sec.} \tag{89.4}$$

準位幅 $\Gamma_0=\hbar/\tau_0$ がそのエネルギー

$$|E_{\text{基底}}|=\frac{me^4}{4\hbar^2}=mc^2\frac{\alpha^2}{4}$$

1）　公式 (89.1)～(89.7) は普通の単位で書かれている．

にくらべて小さいことに注目しよう．すなわち，この事情はポジトロニウムを準古典的な系とみなすことを許している．

同様にして，オルソ・ポジトロニウムの崩壊は，スピンで平均された，自由な対の3光子性崩壊の断面積と関係式

$$w_1 = \frac{4}{3}\overline{w}_{3\gamma} = \frac{4}{3}|\psi(0)|^2(v\bar{\sigma}_{3\gamma})_{v\to 0} \tag{89.5}$$

によって結ばれていることがわかる（3/4はスピン1の状態の統計的重みである）．先廻りして

$$\bar{\sigma}_{3\gamma} = \frac{4(\pi^2-9)c}{3v}\alpha\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \tag{89.6}$$

であることを指摘しよう．したがってオルソ・ポジトロニウムの寿命は

$$\tau_1 = \frac{9\pi}{2(\pi^2-9)}\frac{\hbar}{mc^2\alpha^6} = 1.4\cdot 10^{-7}\,\mathrm{sec}. \tag{89.7}$$

不等式 $\Gamma_1 \ll |E_{基底}|$ はこの場合にはもちろん，パラ・ポジトロニウムの場合よりも，はるかに高い程度で満足されている．

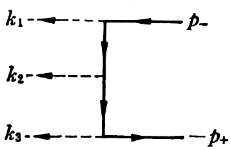
さて自由な対の3光子性消滅の断面積の計算を行なおう (A. Ore, J. L. Powell, 1949)[1]．

(65.18) にしたがって，重心系で今考えられている過程の断面積は，振幅の平方を使い公式

$$d\sigma_{3\gamma} = \frac{(2\pi)^4|M_{fi}|^2}{4I}\delta(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2+\boldsymbol{k}_3)\delta(\omega_1+\omega_2+\omega_3-2m)\frac{d^3k_1\,d^3k_2\,d^3k_3}{(2\pi)^9 2\omega_1\cdot 2\omega_2\cdot 2\omega_3} \tag{89.8}$$

により表わされる．このとき (65.16) にしたがって，$I = 2m\cdot\frac{m}{2}v = m^2v$ である．ここで v は陽電子と電子の相対速度である（これは小さいと仮定されている）．$\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, \boldsymbol{k}_3$ と $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ は発生する光子の波動ベクトルとエネルギーである．そして δ-関数はエネルギーと運動量の保存則を表わしている．これらの法則のために，三つの振動数 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ は周囲が $2m$ の三角形の辺の長さとして描かれる．言いかえると運動量 $\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, \boldsymbol{k}_3$ の大きさ，およびそれらのあいだの角度は二つの振動数が与えられると完全に決定される．

3光子性消滅には図形(右図)



---

1) 同じ反応の他のチャネルは，2重コンプトン効果，すなわち $e+\gamma \longrightarrow e+\gamma+\gamma$ である（この過程の断面積は F. Mandl, T. H. R. Squirme, *Proc. Roy. Soc.* **A 215**, 497 (1952) 参照）．

および光子 k_1, k_2, k_3 の交換によって得られる，あと五つの図形が対応する．したがって，振幅は

$$M_{fi} = (4\pi)^{3/2}\, e_{\lambda}^{(3)*}\, e_{\mu}^{(2)*}\, e_{\nu}^{(1)*}\, \bar{u}(-p_+) Q^{\lambda\mu\nu} u(p_-) \tag{89.9}$$

の形に書ける．ここで

$$Q^{\lambda\mu\nu} = \sum_{\text{交換}} \gamma^{\lambda} G(k_3-p_+)\gamma^{\mu} G(p_- - k_1)\gamma^{\nu}. \tag{89.10}$$

ここで和は，同時に対応するテンソル添字 $\lambda\mu\nu$ の交換を伴った，光子の番号 1，2，3 のすべての交換について行なわれる．電子および陽電子の偏りについて平均され，光子の偏りについて加えられた，振幅の絶対値の2乗は

$$\frac{1}{4}\sum_{\text{偏り}} |M_{fi}|^2 = (4\pi)^3\, \mathrm{Sp}\, \{\rho_+ Q^{\lambda\mu\nu} \rho_- \bar{Q}_{\lambda\mu\nu}\}. \tag{89.11}$$

ここで

$$\rho_- = \frac{1}{2}(\hat{p}_- + m), \quad \rho_+ = \frac{1}{2}(\hat{p}_+ - m).$$

行列 $\bar{Q}^{\lambda\mu\nu}$ は行列 $Q^{\lambda\mu\nu}$ と，和の各項の因子の順序をさかさにした点が違っている．われわれに興味のある電子と陽電子の速度が小さい極限の場合，その3-運動量 $\boldsymbol{p}_-$ および $\boldsymbol{p}_+$ を0に等しいと置くことができる．すなわち，$p_- = p_+ = (m, 0)$ である．このとき電子のグリーン関数は

$$G(p_- - k_1) = \frac{\hat{p}_- - \hat{k}_1 + m}{(p_- - k_1)^2 - m^2} \approx \frac{-\hat{k}_1 + m(\gamma^0 + 1)}{-2m\omega_1}$$

などである．また密度行列は

$$\rho_{\mp} = \frac{m}{2}(\gamma^0 \pm 1).$$

(89.11) の乗算の際に多数の項ができる．しかしながら，もしも光子の交換に関する対称性が十分に利用されれば，計算すべき項の数は非常に少なくすることができる．そして $\bar{Q}_{\lambda\mu\nu}$ のなかのいずれか1個と，$Q^{\lambda\mu\nu}$ (89.10) のなかの6項を掛ければ十分である．このようにして残った六つの跡のなかで，光子の種々の交換で互いに移りうるいくつかの部分に分けることができる．跡の展開で生じる4-ベクトル p, k_1, k_2, k_3 の積は，すべて $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ を使って表わされる．$p = (m, 0)$ であるから，$pk_1 = m\omega_1, \cdots\cdots$ である．積 $k_1, k_2, \cdots\cdots$ は4-運動量保存の方程式から決定される．すなわち，$2p = k_1 + k_2 + k_3$ である．したがって，この等式を $2p - k_3 = k_1 + k_2$ の形に書き直し，その平方をとり

$$k_1k_2 = 2m(m-\omega_3), \cdots\cdots \tag{89.12}$$

非常に長々とした計算ののち

$$\frac{1}{4}\sum_{\text{偏り}} |M_{fi}|^2 = (4\pi)^3 e^6\cdot 16\left[\left(\frac{m-\omega_1}{\omega_2\omega_3}\right)^2+\left(\frac{m-\omega_2}{\omega_1\omega_3}\right)^2+\left(\frac{m-\omega_3}{\omega_1\omega_2}\right)^2\right].$$

この式を (89.8) に代入して，3 光子性消滅の微分断面積を得る．

$$d\bar{\sigma}_{3\gamma} = \frac{e^6}{\pi^2 m^2 v}\left[\left(\frac{m-\omega_1}{\omega_2\omega_3}\right)^2+\left(\frac{m-\omega_2}{\omega_1\omega_3}\right)^2+\left(\frac{m-\omega_3}{\omega_1\omega_2}\right)^2\right]$$

$$\times\delta(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2+\boldsymbol{k}_3)\delta(\omega_1+\omega_2+\omega_3-2m)\frac{d^3k_1\,d^3k_2\,d^3k_3}{\omega_1\omega_2\omega_3}. \tag{89.13}$$

ここでさらに δ-関数を消去しなければならない．これらのなかの一番目のは d^3k_3 の積分で消去される．その後，残りの微分を置き換える．すなわち

$$d^3k_1\,d^3k_2 \longrightarrow 4\pi\omega_1^2 d\omega_1\cdot 2\pi\omega_2^2 d(\cos\theta_{12})d\omega_2$$

となり，θ_{12} は $\boldsymbol{k}_1$ と $\boldsymbol{k}_2$ のあいだの角である．すでに $\boldsymbol{k}_1$ の方向と $\boldsymbol{k}_1$ に対する $\boldsymbol{k}_2$ の方位角についての積分は行なわれたものと理解する．等式

$$\omega_3 = \sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2+2\omega_1\omega_2\cos\theta_{12}}$$

を微分して

$$d\cos\theta_{12} = \frac{\omega_3}{\omega_1\omega_2}d\omega_3.$$

$d\omega_3$ についての積分は二番目の δ-関数を消去する．その結果，与えられたエネルギーの光子の生成を伴う消滅に対するつぎの形の断面積を得る．

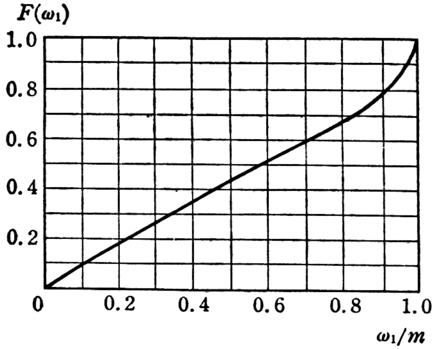
$$d\bar{\sigma}_{3\gamma} = \frac{1}{6}\frac{8e^6}{vm^2}\left\{\left(\frac{m-\omega_3}{\omega_1\omega_2}\right)^2+\left(\frac{m-\omega_2}{\omega_1\omega_3}\right)^2+\left(\frac{m-\omega_1}{\omega_2\omega_3}\right)^2\right\}d\omega_1 d\omega_2 \tag{89.14}$$

(先の振動数についての積分を考え，ここでは光子の同一性を考慮して因子 1/6 が導入された．291頁の脚注を見よ)．

振動数 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ のおのおのは 0 から m までの値をとることができる (m という値は 2 個の振動数が達することができる．このとき第三のは 0 になる)．ω_1が与えられたとき，振動数 ω_2 は $m-\omega_1$ から m のあいだを変化する．

(89.14) を $d\omega_2$ についてこの限界内で積分すると，崩壊光子のスペクトル分布が得られる．

$$d\bar{\sigma}_{3\gamma} = \frac{8e^6}{3vm^3}F(\omega_1)\,d\omega_1,$$



第 16 図

$$F(\omega_1) = \frac{\omega_1(m-\omega_1)}{(2m-\omega_1)^2} + \frac{2m-\omega_1}{\omega_1} + \left[\frac{2m(m-\omega_1)}{\omega_1^2} - \frac{2m(m-\omega_1)^2}{(2m-\omega_1)^3}\right] \times \ln\frac{m-\omega_1}{m}.$$

関数 $F(\omega_1)$ は $\omega_1=0$ のときの 0 から，$\omega_1=m$ のときの 1 までの単調増加関数である．第16図にはそのグラフが描かれている．

対消滅の全断面積は，(89.14) を両方の振動数について積分して得られる．

$$\sigma_{3\gamma} = \frac{4e^6}{3vm^2}3\int_0^m\int_{m-\omega_1}^m \frac{(\omega_1+\omega_2-m)^2}{\omega_1^2\omega_2^2}d\omega_1 d\omega_2.$$

ここにある積分は $(\pi^2-9)/3$ に等しい．そしてわれわれはすでに導入された公式 (89.6) に達する．

§90. 原子核での電子の制動輻射．非相対論的な場合

この節およびこの先の若干の節は**制動輻射**，すなわち粒子の衝突に伴う輻射という重要な現象に費される．われわれは電子と原子核の非相対論的衝突から始めよう．原子核が動かないままでいると考えよう．すなわち，動かない中心を持つクーロン場による電子散乱の際の輻射を考察しよう (A. Sommerfeld, 1931)．

2 重極輻射の確率に対する公式 (45.5)

$$dw = \frac{\omega^3}{2\pi}|e^*d_{fi}|^2 do_k \tag{90.1}$$

から出発しよう．与えられた場合，電子の始および終状態は連続スペクトルに属し，光子の振動数は

$$\omega = \frac{1}{2m}(p^2-p'^2) \tag{90.2}$$

である．ここで $p=mv$ および $p'=mv'$ は電子の始めおよび終りの運動量である．もしも電子の始めおよび終りの波動関数が，≪体積 $V=1$ につき 1 個で≫ 規格化されている

とすれば, (90.1) の式は $d^3p'/(2\pi)^3$ を掛け, 入射電流密度 $v/V=v$ で割ると, 状態区間 d^3p' への電子の散乱を伴う, 光子 $\boldsymbol{k}$ の立体角 $do_{\boldsymbol{k}}$ 内への輻射断面積 $d\sigma_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{p}'}$ を与える. 2重極モーメント $\boldsymbol{d}=e\boldsymbol{r}$ の行列要素を

$$d_{fi}=-\frac{1}{i\omega}\frac{e}{m}\boldsymbol{p}_{fi}$$

にしたがって運動量の行列要素で置き換え, 断面積に対する式を

$$d\sigma_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{p}'}=\frac{\omega e^2}{(2\pi)^4 mp}|\boldsymbol{e}^*\boldsymbol{p}_{fi}|^2\,do_{\boldsymbol{k}}d^3p' \tag{90.3}$$

の形に書く[1]. ここで

$$\boldsymbol{p}_{fi}=\int\psi_f^*\hat{\mathbf{p}}\psi_i d^3x=-i\int\psi_f^*\nabla\psi_i d^3x.$$

ψ_i および ψ_f としては, クーロン引力場内の正確な波動関数で, 漸近的に平面波および球面波を含むような関数が使われる必要がある. そして ψ_f のなかの球面波は収束し, ψ_i のなかのは発散しなければならない (III, §134 参照). これらの関数は

$$\psi_i=A_i e^{i\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}}F(i\nu,1,i(pr-\boldsymbol{p}\boldsymbol{r})),\quad \nu=\frac{Ze^2m}{p};$$
$$\psi_f=A_f e^{i\boldsymbol{p}'\boldsymbol{r}}F(-i\nu',1,-i(p'r+\boldsymbol{p}'\boldsymbol{r})),\quad \nu'=\frac{Ze^2m}{p'} \tag{90.4}$$

の形を持つ. そして規格化係数は[2]

$$A_i=e^{\pi\nu/2}\Gamma(1-i\nu),\quad A_f=e^{\pi\nu'/2}\Gamma(1+i\nu'). \tag{90.5}$$

$$\nabla F(i\nu,1,i(pr-\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}))=i\left(p\frac{\boldsymbol{r}}{r}-\boldsymbol{p}\right)F'=-\frac{\boldsymbol{p}}{r}\left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{p}}\right)_\nu$$

であることに注意し, 勾配 $\nabla\psi_i$ を

$$\nabla\psi_i=i\boldsymbol{p}\psi_i-A_i e^{i\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}}\frac{p}{r}\left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{p}}\right)_\nu$$

の形に書く. ψ_f^* を掛けて積分すると, 第1項は ψ_i と ψ_f の直交性から0になる. したがって行列要素 $\boldsymbol{p}_{fi}$ に対して

$$\boldsymbol{p}_{fi}=iA_iA_f p\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{p}} \tag{90.6}$$

を得る. ここで J は積分

---

1) この節では $p=|\boldsymbol{p}|$, $p'=|\boldsymbol{p}'|$ と置く.
2) III, §134 の $\delta(\boldsymbol{p})$ による規格化の代りに, 単位密度の規格化である!

$$J=\int\frac{e^{-i\boldsymbol{qr}}}{r}F(i\nu',1,i(p'r+\boldsymbol{p}'\boldsymbol{r}))F(i\nu,1,i(pr-\boldsymbol{pr}))d^3x,$$
$$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p} \tag{90.7}$$

を表わす．われわれは，Jを微分するときは，$\nu, \nu', \boldsymbol{q}$ は独立のパラメータとみなす必要があり，微分を実行したのちにνと$\boldsymbol{q}$を，$\boldsymbol{p}$を使って表わすものと約束した上で，$\partial/\partial\boldsymbol{p}$ を積分記号のなかから出した．

積分は，各合流型超幾何関数を，その径路積分の形に置き換えることによって計算される．ここでは結果だけを示そう[1]．

$$J=BF(i\nu',i\nu,1,z),$$
$$B=4\pi e^{-\pi\nu}(-\boldsymbol{q}^2-2\boldsymbol{qp})^{-i\nu}(\boldsymbol{q}^2-2\boldsymbol{qp}')^{-i\nu'}(\boldsymbol{q}^2)^{i\nu+i\nu'-1},$$
$$z=2\frac{\boldsymbol{q}^2(pp'+\boldsymbol{pp}')-2(\boldsymbol{qp})(\boldsymbol{qp}')}{(\boldsymbol{q}^2-2\boldsymbol{qp}')(\boldsymbol{q}^2+2\boldsymbol{qp})}. \tag{90.8}$$

ここで $F(i\nu',i\nu,1,z)$ は完全な超幾何関数である．

(90.6) の微分を行なったのち，$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p}$ と置ける．このとき

$$z=-2\frac{pp'-\boldsymbol{pp}'}{(p-p')^2},\quad \boldsymbol{q}^2=(p-p')^2(1-z) \tag{90.9}$$

($z<0$) である．また

$$-\boldsymbol{q}^2-2\boldsymbol{qp}=\boldsymbol{q}^2-2\boldsymbol{qp}'=\boldsymbol{p}^2-\boldsymbol{p}'^2>0$$

であることを指摘しよう．その結果，行列要素として最終的に次式を得る．

$$p_{fi}=A_iA_f\frac{8\pi ie^{-\pi\nu}}{(p-p')^3(p+p')}\left(\frac{p+p'}{p-p'}\right)^{-i(\nu+\nu')}$$
$$\times(1-z)^{i(\nu+\nu')-1}[i\nu p\boldsymbol{q}F(z)+(1-z)F'(z)(p'\boldsymbol{p}-p\boldsymbol{p}')]. \tag{90.10}$$

ここで簡単のためにつぎのように置く．

$$F(z)=F(i\nu',i\nu,1,z). \tag{90.11}$$

断面積は (90.10) を (90.3) に代入して得られる．しかし一般式は非常に膨大で，見通しが困難である．したがって，われわれはただちに輻射のスペクトル分布の計算，すなわち光子と終りの電子の方向についての断面積の積分に移ろう．

$do_{\boldsymbol{k}}$ についての積分と光子の偏りについての和は，$\boldsymbol{e}$ のすべての方向の平均に $2\cdot4\pi$ を掛けることになる．すなわち，置き換え

1) 計算方法は A. Nordsieck, *Phys. Rev.* **93**, 785 (1954) 参照．

$$e_i e_k^* do_k \longrightarrow \frac{8\pi}{3}\delta_{ik}$$

に帰する．こうすると断面積は

$$d\sigma_{\boldsymbol{p}'} = \frac{4\omega e^2}{3pm}|\boldsymbol{p}_{fi}|^2 \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} = \frac{\omega e^2 p'}{6\pi^3 p}|\boldsymbol{p}_{fi}|^2 d\omega\, do_{\boldsymbol{p}'}. \tag{90.12}$$

平方 $|\boldsymbol{p}_{fi}|^2$ は (90.9)～(90.11) を使い

$$|\Gamma(1-i\nu)|^2 = \frac{\pi\nu}{\sinh \pi\nu}$$

であることを考慮して計算される．

$$|\boldsymbol{p}_{fi}|^2 = \frac{32\pi(Ze^2)^2 m^3}{p(p+p')^2(p-p')^4(1-e^{-2\pi\nu'})(e^{2\pi\nu}-1)}$$

$$\times\left\{\frac{\nu\nu'}{1-z}|F|^2 - z|F'|^2 + i\frac{\nu+\nu'}{2}\frac{z}{1-z}(FF'^*-F^*F')\right\}. \tag{90.13}$$

断面積 (90.12) を $do_{\boldsymbol{p}'} = 2\pi\sin\vartheta d\vartheta$ について積分するために，変数 ϑ (散乱角) から変数

$$z = -\frac{2pp'}{(p-p')^2}(1-\cos\vartheta), \quad do_{\boldsymbol{p}'} \longrightarrow \frac{\pi(p-p')^2}{pp'}dz$$

に移ろう． dz についての積分をするために，(90.13) のなかの波括弧内の式を変形しよう．超幾何関数の微分方程式 (III (e. 2) 参照) にしたがって

$$z(1-z)F'' + [1-(1+i\nu+i\nu')z]F' + \nu\nu' F = 0,$$

$$z(1-z)F''^* + [1-(1-i\nu-i\nu')z]F'^* + \nu\nu' F^* = 0.$$

これら二つの方程式にそれぞれ F^* および F を掛けて加えると

$$(1-z)\left[\frac{d}{dz}z(F'F^*+F'^*F) - 2z|F'|^2 + \frac{i(\nu+\nu')z}{1-z}(F'^*F-F'F^*) + \frac{2\nu\nu'}{1-z}|F|^2\right] = 0.$$

ここから (90.13) の波括弧内の式は

$$\{\cdots\} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dz}z(F'F^*+FF'^*) \tag{90.14}$$

に等しく，直接に積分される．

得られた式をまとめて，振動数区間 $d\omega$ 内への制動輻射に対する最終的な式を得る[1]．

$$d\sigma_\omega = \frac{64\pi^2}{3}Z^2\alpha r_e^2 \frac{m^2c^2}{(p-p')^2}\frac{p'}{p}\frac{1}{(1-e^{-2\pi\nu'})(e^{2\pi\nu}-1)}\left(-\frac{d}{d\xi}|F(\xi)|^2\right)\frac{d\omega}{\omega}. \tag{90.15}$$

---

1) 公式 (90.15)～(90.19) は普通の単位で書いている．

ここで

$$\nu=\frac{Z\alpha mc}{p}=\frac{Ze^2}{\hbar v},\quad \nu'=\frac{Ze^2}{hv'},\quad p'=\sqrt{p^2-2m\hbar\omega}\,,$$

$$F(\xi)=F(i\nu',i\nu,1,\xi),\quad \xi=-\frac{4pp'}{(p-p')^2}.$$

$\nu\gg 1$ および $\hbar\omega\ll p^2/2m$ の極限の場合（これらの不等式中の1番目はクーロン場内の電子の運動の準古典性の条件であり，2番目は遷移行列要素の準古典性の条件である），量子力学的公式 (90.15) は，古典論の結果（II, §70 参照）に移行する必要がある．極限移行の実現は超幾何関数の引数およびパラメータの大きい値に対する漸近式を求めることが要求される．しかしこれについてわれわれは深く立ち入ることはよそう．

両方の速度がかなり大きくて $\nu\ll 1$，$\nu'\ll 1$（しかしもちろん前と同様に $v\ll 1$ であり，したがって $Z\alpha\ll\nu\ll 1$ になる．これは Z が小さいときにのみ可能である）のような極限の場合を考えよう．この場合微係数 $F'(\xi)$ を計算するために，公式

$$\frac{d}{dz}F(\alpha,\beta,\gamma,z)=\frac{\alpha\beta}{\gamma}F(\alpha+1,\ \beta+1,\ \gamma+1,\ z)$$

が使われる．これは超幾何級数を微分することによって容易に得られる．

$$F'(\xi)\approx i\nu\cdot i\nu' F(1,1,2,\xi)=\frac{\nu\nu'}{\xi}\ln(1-\xi)$$

となる（最後の等式は対応する級数を直接くらべることによって明らかである）．関数 $F(\xi)$ については簡単に

$$F(\xi)\approx F(0,0,1,\xi)=1$$

となる．この結果 (90.15) から

$$d\sigma_\omega=\frac{16}{3}Z^2\alpha r_e^2\frac{c^2}{v^2}\ln\frac{v+v'}{v-v'}\frac{d\omega}{\omega},$$
$$\frac{Ze^2}{\hbar v}\ll 1,\quad \frac{Ze^2}{\hbar v'}\ll 1. \tag{90.16}$$

ν および ν' が小さいことはそのまま，クーロン相互作用の場合にボルン近似の適用可能の条件でもある．したがって，公式 (90.16) 自身は，摂動論を使って直接に求めるのが簡単である（問題1参照）．

今度は速い($\nu\ll 1$)電子が，輻射でその大部分のエネルギーを失い，したがって，$v'\ll v$ となり，ν' が小さくないとしよう．このとき

$$-\xi \approx \frac{4p'}{p} = \frac{4\nu}{\nu'} \ll 1, \quad F(\xi) \approx F(i\nu', 0, 1, \xi) = 1,$$

$$F'(\xi) \approx -\nu\nu' F(1+i\nu', 1, 2, \xi) \approx -\nu\nu'$$

となり，断面積は

$$d\sigma_\omega = \frac{64\pi}{3} Z^3 \alpha^2 r_e^2 \left(\frac{c}{v}\right)^3 \frac{1}{1-\exp(-2\pi Ze^2/\hbar v')} \frac{d\omega}{\omega},$$

$$\frac{Ze^2}{\hbar v} \ll 1, \quad \frac{Ze^2}{\hbar v'} \gtrsim 1. \tag{90.17}$$

$\nu' \ll 1$のとき，この公式は，$v' \ll v$のときの公式 (90.16) のような極限の公式

$$d\sigma_\omega = \frac{32}{3} Z^2 \alpha r_e^2 \frac{c^2 v'}{v^3} \frac{d\omega}{\omega}$$

を与える．したがって公式 (90.16), (90.17) は ($\nu \ll 1$のとき) ν' の値のすべての領域を覆っている．

$\omega \to \omega_0$ (ここで $\hbar\omega_0 = mv^2/2$) のとき，速度は $v' \to 0$ で $\nu' \to \infty$ である．この極限で (90.17) は

$$d\sigma_\omega = \frac{128\pi}{3} Z^3 \alpha^2 r_e^2 \left(\frac{c}{v}\right)^3 \frac{\hbar d\omega}{mv^2} \tag{90.18}$$

を与える．このようにして $\omega \to \omega_0$ の極限で $d\sigma_\omega/d\omega$ はある有限の値に近づく．この事情は一般的な形で，III, § 144 のなかで述べられたのと類似の考察によって基礎づけることができる．物理的に，これは振動数 $\omega = \omega_0$ が，連続制動スペクトルの端にあることと結びついている．電子はまた振動数 $\omega > \omega_0$ を輻射して，結合状態に移ることもできる．しかしクーロン場内の高励起の結合状態は，その性質が境界の近くの自由状態とわずかしか異ならない．したがって，離散と連続スペクトルを分ける境界は，本来物理的な分離点ではない．

すべて列記した公式はクーロン引力場に関するものである．斥力場での輻射断面積は置き換え $\nu \to -\nu$, $\nu' \to -\nu'$ によって (90.15) から得られる．このとき，特に，極限のボルンの公式 (90.16) は一般に変わらない．$\nu \ll 1$, $\nu' \to \infty$ の極限では (90.18) の代りに

$$d\sigma_\omega = \frac{128\pi}{3} Z^3 \alpha^2 r_e^2 \left(\frac{c}{v}\right)^3 \exp\left(-\frac{\sqrt{2mc^2}\,\pi Z\alpha}{\sqrt{\hbar(\omega_0-\omega)}}\right) \frac{\hbar d\omega}{mv^2}. \tag{90.19}$$

すなわち，微分断面積は $\omega \to \omega_0$ のとき指数関数的に 0 に近づく．この結果はやはり自然である．なぜかというと，斥力場には結合状態はなく，$\omega = \omega_0$ は真の輻射スペクトルの境界になるからである．

問　　題

1.　比 e/m の異なる二つの粒子の非相対論的衝突の際の，制動輻射の断面積をボルン近似で求めよ．

解　電荷 e_1, e_2 および質量 m_1, m_2 を持つ2粒子の2重極モーメントは重心系で

$$\boldsymbol{d} = \mu\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)\boldsymbol{r}.$$

ここで　$\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$,　$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2$ である．ここから

$$\ddot{\boldsymbol{d}} = \left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)\mu\ddot{\boldsymbol{r}} = -\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)\nabla\frac{e_1 e_2}{r}.$$

行列要素

$$\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{p}'\boldsymbol{p}} = -\frac{1}{\omega^2}(\ddot{\boldsymbol{d}})_{\boldsymbol{p}'\boldsymbol{p}},\quad \omega = \frac{p^2-p'^2}{2\mu}$$

($\boldsymbol{p} = \mu\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{p}' = \mu\boldsymbol{v}'$ は相対運動の運動量である) は平面波[1]

$$\psi_{\boldsymbol{p}} = e^{i\boldsymbol{pr}},\quad \psi_{\boldsymbol{p}'} = e^{i\boldsymbol{p}'\boldsymbol{r}}$$

により公式

$$\left(\nabla\frac{1}{r}\right)_{\boldsymbol{p}'\boldsymbol{p}} = \frac{4\pi i\boldsymbol{q}}{q^2},\quad \boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p}$$

を使って計算される．結果として

$$d\sigma_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{p}'} = \frac{e_1^2 e_2^2}{\pi^2}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2\frac{v'}{v}\frac{\mu^2}{q^4}(\boldsymbol{e}\boldsymbol{q})(\boldsymbol{e}^*\boldsymbol{q})\frac{d\omega}{\omega}do_{\boldsymbol{p}'}do_{\boldsymbol{k}}.$$

偏りについての和ののち，輻射の角度分布は因子 $\sin^2\Theta$ によって与えられる．ここで Θ は光子 $\boldsymbol{k}$ の方向と散乱面内のベクトル $\boldsymbol{q}$ の方向とのあいだの角度である．((45.4a) 参照)．

光子の方向についての積分ののち

$$d\sigma_{\omega\theta} = \frac{16}{3}e_1^2 e_2^2\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2\frac{v'}{v}\frac{d\omega}{\omega}\frac{\sin\theta\, d\theta}{v^2+v'^2-2vv'\cos\theta}.$$

θ は散乱角である．最後に，$d\theta$ についての積分は

$$d\sigma_{\omega} = \frac{16}{3}e_1^2 e_2^2\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2\frac{1}{v^2}\ln\frac{v+v'}{v-v'}\frac{d\omega}{\omega}$$

を与える．動かないクーロン中心の場内での輻射に対しては，この公式は (90.16) に一致

1)　2粒子を換算質量を持つ1粒子に置き換えることは，非相対論的な結合にのみ許される．

する．

2.　2電子の非相対論的衝突の際の制動輻射の断面積を，ボルン近似で求めよ[1]．

解　この場合は2重極輻射はない．したがって，4重極輻射を考える必要がある．古典論では4重極輻射の全強度のスペクトル分布は公式

$$I_\omega = \frac{1}{90}|(\dddot{D}_{ik})_\omega|^2 \quad {}^{2)}$$

で与えられる．ここで $D_{ik} = \sum e(3x_i x_k - r^2\delta_{ik})$ は電荷系の4重極モーメントのテンソルである．2電子に対してその重心系では

$$D_{ik} = \frac{e}{2}(3x_i x_k - r^2\delta_{ik}), \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2.$$

量子論への移行にあたっては，フーリエ成分を行列要素で置き換える必要がある（§45で2重極輻射について述べられたことを見よ）．そして波動関数（平面波）の必要な規格化をおこない，光子のエネルギー ω で割ったのちに，状態区間 d^3p' への電子の散乱を伴う輻射断面積を得る．

$$d\sigma_{\boldsymbol{p}'} = \frac{1}{90\omega}|(\dddot{D}_{ik})_{\boldsymbol{p}'\boldsymbol{p}}|^2 \frac{d^3p'}{v(2\pi)^3}.$$

ここで $v = 2p/m$ は，相対運動の始めの速度である．輻射される振動数は $\omega = (p^2 - p'^2)/m$ である．

演算子 $\dddot{\mathrm{D}}_{ik}$ は，演算子 D_{ik} とハミルトニアン

$$\mathrm{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{m} + \frac{e^2}{r}$$

を3重に交換することによって計算され

$$\dddot{\mathrm{D}}_{ik} = \frac{2e^3}{m}\Big[6\Big(\frac{x_i}{r^3}\mathrm{p}_k + \mathrm{p}_k\frac{x_i}{r^3}\Big) + 6\Big(\frac{x_k}{r^3}\mathrm{p}_i + \mathrm{p}_i\frac{x_k}{r^3}\Big) - 9\Big(\frac{x_i x_k x_l}{r^5}\mathrm{p}_l + \mathrm{p}_l\frac{x_i x_k x_l}{r^5}\Big)$$
$$- \delta_{ik}\Big(\frac{x_l}{r^3}\mathrm{p}_l + \mathrm{p}_l\frac{x_l}{r^3}\Big)\Big]$$

---

1)　衝突速度 v は，条件 $\alpha \ll e^2/\hbar v \ll 1$ を満足する．古典的な場合 $(e^2/\hbar v \gg 1)$ は，II，§71の問題で考察されている．

2)　この公式は II (71.5) から求められる．それは II (67.11) が II (67.8) から求められるのと同様である．

に等しい[1]. 両粒子の同一性（電子）のために，行列要素は波動関数

$$\psi_{\mathbf{p}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}\pm e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}}),\quad \psi_{\mathbf{p}'}=\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\mathbf{p}'\mathbf{r}}\pm e^{-i\mathbf{p}'\mathbf{r}})$$

によって計算される．ここで＋および－は電子のスピンの総和が 0 および 1 に対応する（電子の交換が置き換え $\mathbf{r}\to-\mathbf{r}$ に対応する）.

膨大な計算[2]は輻射のスペクトル分布に対する，つぎのような式をもたらす.

$$d\sigma_\omega=\frac{4}{15}\alpha r_e^2\left\{17-\frac{3x^2}{(2-x)^2}+\frac{12(2-x)^4-7(2-x)^2x^2-3x^4}{(2-x)^3\sqrt{1-x}}\operatorname{arc\,cosh}\frac{1}{\sqrt{x}}\right\}\times\frac{\sqrt{1-x}}{x}dx.$$

ここで $x=\omega/\varepsilon$ で，$\varepsilon=p^2/m$ は電子の相対運動の始めのエネルギーである．断面積は電子の全スピンの値について平均されている．輻射のエネルギー損失の断面積は

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon\omega\,d\sigma_\omega=8.1\,\alpha r_e^2.$$

3. 原子核が s-状態の非相対論的な電子を放出する際，生ずる輻射エネルギーを決定せよ.

解 原子核から放出される電子の，全電流 1 で規格化された波動関数は

$$\psi_i=\frac{1}{\sqrt{4\pi v}}\frac{e^{ipr}}{r}$$

（III (33.12) 参照）．電子の（光子放出後の）終状態の波動関数としては平面波を選ぼう.

$$\psi_f=e^{i\mathbf{p}'\mathbf{r}}.$$

遷移行列要素は

$$\mathbf{p}_{fi}=(\mathbf{p}_{if})^*=\left(\int\psi_i^*\mathbf{p}\psi_f d^3x\right)^*$$
$$=\frac{\mathbf{p}'}{\sqrt{4\pi v}}\int e^{-i\mathbf{p}'\mathbf{r}+ipr}\frac{d^3x}{r}=\sqrt{\frac{4\pi}{v}}\frac{\mathbf{p}'}{p'^2-p^2}=-\sqrt{\frac{\pi}{v}}\frac{\mathbf{v}'}{\omega}$$

---

1) この式は古典的公式

$$\dddot{D}_{ik}=\frac{4e^3}{m^2}\left[6\frac{x_i}{r^3}p_k+6\frac{x_k}{r^3}p_i-9\frac{x_ix_k}{r^5}pr-\frac{1}{r^3}\delta_{ik}pr\right]$$

と似ている．これは古典運動方程式

$$\frac{m}{2}\ddot{\mathbf{r}}=\frac{e^2\mathbf{r}}{r^3}$$

を考慮して，D_{ik} を微分した結果得られる.

2) 計算のやり方はベ・カ・フェシューシン，ЖЭТФ, 22, 140 (1952) 参照.

(積分は (57.6a) により計算された)．輻射エネルギーは，公式 (45.8) に $d^3p'/(2\pi)^3$ を掛け，p' の方向について積分して（これは結果として 4π を掛けることになり）求められる．この結果，輻射エネルギーのスペクトル分布として次式を得る．

$$dE_\omega = \frac{2e^2v'^3}{3\pi v}d\omega.$$

$\omega \to 0$ のとき電子の終りの速度は $v' \to v$ となり，当然この公式は古典的結果の非相対論的な結果（II, § 69 の問題参照）と一致する．全輻射エネルギーは（普通の単位で）

$$E = \frac{4}{15\pi}\alpha\left(\frac{v}{c}\right)^2\varepsilon.$$

ここで $\varepsilon = mv^2/2$ は電子の始めのエネルギーである．

4. 非相対論的電子が無限に高い≪ポテンシャルの壁≫で反射する際，発生する輻射エネルギーを決定せよ．

解 電子が壁に垂直に運動するとしよう．光子は任意の方向に放出されることができるけれども，非相対論的な場合には光子の運動量は電子の運動量にくらべて小さいので，反射された電子は壁面に垂直に運動するものと考えられる．壁が $x=0$ にあり，電子は $x>0$ の側を運動するとしよう．$\delta(p)\,(p=p_x)$ で規格化された 1 次元の定常運動の波動関数は，停立波の形になる（III, § 21 参照）．すなわち

$$\psi_i = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin px, \quad \psi_f = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin p'x.$$

演算子 $\mathrm{p} = \mathrm{p}_x$ の行列要素は[1]

$$p_{fi} = -\frac{2i}{\pi}\int_0^\infty \sin p'x\frac{d}{dx}\sin px\,dx$$

$$= -\frac{2ip}{\pi}\int_0^\infty \sin p'x\cos px\,dx = \frac{2i}{\pi}\frac{pp'}{p^2-p'^2}.$$

電子の 1 回の反射の際輻射されるエネルギーは，(45.8) から $dp' = d\omega/v'$ を掛けて，$v/2\pi$（始めの関数 ψ_i の障壁に進む波の電流密度）で割ることによって得られる．

$$dE_\omega = \frac{4\omega^2e^2}{3m^2}|p_{fi}|^2\frac{2\pi d\omega}{vv'} = \frac{8}{3\pi}e^2vv'd\omega. \qquad (1)$$

振動数が小さいとき ($\omega \ll \varepsilon = mv^2/2$) には $v' \approx v$ となり，(1) は古典式 II (69.5) に移行する（これは角度について積分し，$v = \Delta v/2$ であることを考慮する必要がある．ここで

---

1) この形の積分は，被積分式に因子 $e^{-\delta x}$ をつけたときに得る値の，$\delta \to 0$ の極限と考えねばならない．

Δv は反射の際の電子の速度の変化である)．したがって，壁での反射の際の衝突時間が短い条件 II (69.1) はいつも満足されているから，当然そうなるはずである．しかし，量子論の公式 (1) はまた全輻射エネルギーを与えることができる．すなわち (普通の単位で)

$$E = \int_0^{\varepsilon} \frac{dE_\omega}{d\omega} d\omega = \frac{16}{9\pi} \alpha \varepsilon \frac{v^2}{c^2}.$$

§ 91. 原子核での電子の制動輻射．相対論的な場合

電子が相対論的速度の場合の，原子核での電子の制動輻射にかかろう[1]．この際，ボルン近似の適用可能の条件が満足されること，すなわち電子の始めの速度 (v) に対しても，終りの (v') に対しても $Ze^2/\hbar v \ll 1$，$Ze^2/\hbar v' \ll 1$ を仮定しよう．この際いつも原子核の電荷はそう大きくなってはならない．すなわち $Z\alpha \ll 1$ である．

前節と同様に，原子核の反跳を無視しよう．したがって，原子核は外場の源としての役割だけを演じる (このような近似の正当性については § 94 参照)．

(65.25) にしたがってこの過程の断面積は

$$d\sigma = |M_{fi}|^2 \frac{1}{8|\boldsymbol{p}|\varepsilon'\omega} \delta(\varepsilon - \varepsilon' - \omega) \frac{d^3p' d^3k}{(2\pi)^5}. \qquad (91.1)$$

ここで $\boldsymbol{p}, \varepsilon$ および $\boldsymbol{p}', \varepsilon'$ は電子の始めおよび終りの運動量およびエネルギーである．δ-関数は $d\varepsilon'$ についての積分を消去する．$\boldsymbol{k}, \omega$ は光子の運動量およびエネルギーである．$\boldsymbol{p}'$ と $\boldsymbol{k}$ は独立変数であるので，これは非常に簡単にできる．

$$d^3p' = |\boldsymbol{p}'| \varepsilon' d\varepsilon' do', \quad d^3k = \omega^2 d\omega do_k$$

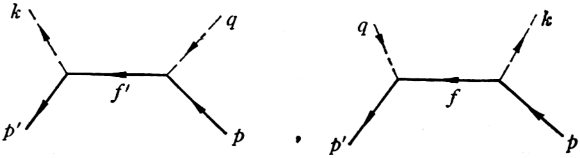
であることに注意し，ただ置き換え

$$\delta(\varepsilon - \varepsilon' - \omega) d^3p' d^3k \longrightarrow \omega^2 |\boldsymbol{p}'| \varepsilon' do_k do' d\omega$$

だけが必要である．このとき

$$d\sigma = \frac{1}{(2\pi)^5} |M_{fi}|^2 \frac{\omega |\boldsymbol{p}'|}{8|\boldsymbol{p}|} do_k do' d\omega. \qquad (91.2)$$

行列要素 M_{fi} の最初の消えない近似は，つぎの二つの図形に対応する．



(91.3)

1) 以下に述べられる結果の大部分は，最初にベーテとハイトラー (H. A. Bethe, W. Heitler, 1934)，およびそれと独立にザウター (F. Sauter, 1934) によって得られた．

自由端 q は外場に対応する．したがって $q = p'-p+k$ は原子核の反跳の運動量の 4-ベクトルである．反跳の無視は，時間成分 $q^0 = 0$ を意味する．

図形 (91.3) にしたがって

$$M_{fi} = -e^2 A_0^{(e)}(\boldsymbol{q})\sqrt{4\pi}\, e_\mu^* \bar{u}'\left(\gamma^\mu \frac{\hat{f}'+m}{f'^2-m^2}\gamma^0+\gamma^0\frac{\hat{f}+m}{f^2-m^2}\gamma^\mu\right)u. \qquad (91.4)$$

中間の 4-運動量は $f = p-k$, $f' = p'+k$ である．

$$f^2-m^2 = -2kp \equiv -2\kappa\omega, \quad f'^2-m^2 = 2kp' \equiv 2\kappa'\omega \qquad (91.5)$$

と置く．$A_0^{(e)}$ は外場のスカラー・ポテンシャルである．純クーロン場に対しては

$$A_0^{(e)}(\boldsymbol{q}) = \frac{4\pi Ze}{\boldsymbol{q}^2}. \qquad (91.6)$$

(91.2) に代入し，断面積に対して

$$d\sigma = \frac{Z^2e^6}{4\pi^2}\frac{|\boldsymbol{p}'|\omega}{|\boldsymbol{p}|\boldsymbol{q}^4}e_\mu^* e_\nu (\bar{u}'\mathrm{Q}^\mu u)(\bar{u}\overline{\mathrm{Q}}^\nu u')do_k do' d\omega$$

を得る．ここで

$$\mathrm{Q}^\mu = \gamma^\mu \frac{\hat{f}'+m}{2\omega\kappa'}\gamma^0-\gamma^0\frac{\hat{f}+m}{2\omega\kappa}\gamma^\mu,$$

$$\overline{\mathrm{Q}}^\nu = \gamma^0\mathrm{Q}^{\nu+}\gamma^0 = \gamma^0\frac{\hat{f}'+m}{2\omega\kappa'}\gamma^\nu-\gamma^\nu\frac{\hat{f}+m}{2\omega\kappa}\gamma^0.$$

偏りの効果を考えないで，始めの電子のスピンについて平均し，終りの電子と光子の偏りについて和をとる．これは置き換え

$$e_\mu^* e_\nu(\bar{u}'\mathrm{Q}^\mu u)(\bar{u}\overline{\mathrm{Q}}^\nu u') \longrightarrow -\frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,\mathrm{Q}_\mu(\hat{p}+m)\overline{\mathrm{Q}}^\mu(\hat{p}'+m)$$

に帰する．跡の計算は標準公式 (§22) によって行なわれる．$p = (\varepsilon, \boldsymbol{p})$ のとき $\tilde{p} = (\varepsilon, -\boldsymbol{p})$ として，等式

$$\gamma^0\hat{p}\gamma^0 = \hat{\tilde{p}}$$

を使って計算をいくらか簡単にできる．このほか，置き換え $p\leftrightarrow p'$, $k\to -k$, $q\to -q$ に対する対称性（このような置き換えは行列の積のなかの因子の循環的交換に帰する．したがってその跡は変わらない）を考慮すると，計算すべき項の数は減らすことができる．

この結果，与えられた振動数と方向の光子を放出し，与えられた方向へ2次電子が飛び去るような制動輻射の微分断面積に対してつぎのような結果が得られる[1]．

---

1) この節のここおよび以後，p, p', q は3次元ベクトルの絶対値を表わす．すなわち $p = |\boldsymbol{p}|$, $p' = |\boldsymbol{p}'|$, $q = |\boldsymbol{q}|$.

$$d\sigma = \frac{Z^2\alpha r_e^2}{4\pi^2}\frac{p'm^4}{pq^4}\frac{d\omega}{\omega}do_k do'$$
$$\times\left\{\frac{q^2}{\kappa\kappa' m^2}(2\varepsilon^2+2\varepsilon'^2-q^2)+q^2\left(\frac{1}{\kappa}-\frac{1}{\kappa'}\right)^2-4\left(\frac{\varepsilon}{\kappa'}-\frac{\varepsilon'}{\kappa}\right)^2\right.$$
$$\left.+\frac{2\omega q^2}{m^2}\left(\frac{1}{\kappa'}-\frac{1}{\kappa}\right)-\frac{2\omega^2}{m^2}\left(\frac{\kappa'}{\kappa}+\frac{\kappa}{\kappa'}\right)\right\}. \qquad (91.7)$$

ここで

$$\kappa = \varepsilon-\boldsymbol{np},\quad \kappa' = \varepsilon'-\boldsymbol{np}'\quad (\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}/\omega),\quad \boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}'+\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}.$$

簡単な変換により，これらの公式に研究用の多少便利な形を与えることができる．すなわち

$$d\sigma = \frac{Z^2\alpha r_e^2}{2\pi}\frac{d\omega}{\omega}\frac{p'm^2}{pq^4}\sin\theta\, d\theta\sin\theta'\, d\theta'\, d\varphi$$
$$\times\left\{\frac{p'^2}{\kappa'^2}(4\varepsilon^2-q^2)\sin^2\theta'+\frac{p^2}{\kappa^2}(4\varepsilon'^2-q^2)\sin^2\theta\right.$$
$$\left.+\frac{2\omega^2}{\kappa\kappa'}(p^2\sin^2\theta+p'^2\sin^2\theta')-\frac{2pp'}{\kappa\kappa'}(2\varepsilon^2+2\varepsilon'^2-q^2)\sin\theta\sin\theta'\cos\varphi\right\}. \qquad (91.8)$$

ここで

$$\kappa = \varepsilon-p\cos\theta,\quad \kappa' = \varepsilon'-p'\cos\theta'$$
$$q^2 = p^2+p'^2+\omega^2-2p\omega\cos\theta+2p'\omega\cos\theta'$$
$$-2pp'(\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos\varphi)$$

である．θ および θ' は $\boldsymbol{k}$ と，それぞれ $\boldsymbol{p}$ および $\boldsymbol{p}'$ のあいだの角度で，φ は $(\boldsymbol{k},\boldsymbol{p})$ および $(\boldsymbol{k},\boldsymbol{p}')$ 面のあいだの角度である．

光子および2次電子の方向についての積分 (91.8) は非常に膨大である．その結果輻射のスペクトル分布に対して，つぎのような公式が出る[1]．

$$d\sigma_\omega = Z^2\alpha r_e^2\frac{d\omega}{\omega}\frac{p'}{p}\left\{\frac{4}{3}-2\varepsilon\varepsilon'\frac{p^2+p'^2}{p^2p'^2}+m^2\left(l\frac{\varepsilon'}{p^3}+l'\frac{\varepsilon}{p'^3}-\frac{ll'}{pp'}\right)\right.$$
$$+L\left[\frac{8\varepsilon\varepsilon'}{3pp'}+\frac{\omega^2}{p^3p'^3}(\varepsilon^2\varepsilon'^2+p^2p'^2+m^2\varepsilon\varepsilon')\right.$$
$$\left.\left.+\frac{m^2\omega}{2pp'}\left(l\frac{\varepsilon\varepsilon'+p^2}{p^3}-l'\frac{\varepsilon\varepsilon'+p'^2}{p'^3}\right)\right]\right\} \qquad (91.9)$$

---

1)　2次電子一つの方向だけについての積分は，また解析的な形で行なうことができる．R. L. Gluckstern, M. H. Hull, *Phys. Rev.* **90**, 1030 (1925) 参照．
また総合報告の論文，H. W. Koch, J. W. Motz, *Rev. Mod. Phys.* **31**, 920 (1959) もあげておこう．ここには制動輻射の式のグラフも与えられている．

ここで

$$L=\ln\frac{\varepsilon\varepsilon'+pp'-m^2}{\varepsilon\varepsilon'-pp'-m^2},$$

$$l=\ln\frac{\varepsilon+p}{\varepsilon-p},\quad l'=\ln\frac{\varepsilon'+p'}{\varepsilon'-p'}.$$

上に得られた公式のなかで，振動数の許される値は，電子の終りの速度に課される条件 $(Ze^2/v'\ll 1)$ だけによって制限される．すなわち電子は，そのエネルギーのほとんどすべてを失ってはいけないからである．$\omega\to 0$ のとき断面積は $d\omega/\omega$ のように発散する．これは §95 で考察される一般法則が姿を見せたものである．

非相対論的極限（$p\ll m$）では，光子の運動量は電子の運動量にくらべて小さい．すなわち

$$\omega=\frac{p^2-p'^2}{2m}\ll p\,.$$

したがって，$q^2\approx(\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p})^2$ となる．(91.8) のなかで $\varepsilon\approx\varepsilon'=m$ と置いて，m にくらべてすべての p,p',ω を無視すると

$$d\sigma=\frac{2}{\pi}Z^2\alpha r_e^2\frac{d\omega}{\omega}\frac{p'm^2}{pq^4}\sin\theta\,d\theta\,\sin\theta'\,d\theta'\,d\varphi$$
$$\times(p^2\sin^2\theta+p'^2\sin^2\theta'-2pp'\sin\theta\sin\theta'\cos\varphi),$$

あるいは

$$d\sigma=\frac{Z^2\alpha^3}{\pi^2}\frac{p'}{p}[\boldsymbol{n}\boldsymbol{q}]^2\frac{do_k\,do'}{q^4}\frac{d\omega}{\omega}\tag{91.10}$$

を得る．これは § 90 の問題 1 でボルン近似で得られた式と一致する．したがって，輻射のスペクトル分布に対して，われわれによく知られた結果 (90.16) が得られる[1]．

電子の始めのエネルギーも，終りのも大きい（$\varepsilon,\varepsilon'\gg m$）ような超相対論的な場合には，光子および 2 次電子の角度分布は非常に特徴的な性質を持っている．角度 θ,θ' が小さいとき，公式 (91.8) の分母に現われる量 κ,κ' は

$$\kappa\approx\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{m^2}{\varepsilon^2}+\theta^2\right),\quad \kappa'\approx\frac{\varepsilon'}{2}\left(\frac{m^2}{\varepsilon'^2}+\theta'^2\right)\tag{91.11}$$

に等しい．そして $\theta\lesssim m/\varepsilon$ の領域では非常に小さい．この領域ではベクトル $\boldsymbol{q}$ の大きさもまた小さい（$q\sim m$）．このようにして，超相対論的な場合には光子と 2 次電子は前方

1) しかしながら，(91.9) での極限移行によってこれらの式を求めるのは，一連の項が約されるために非常に面倒である．

の頂角 $\sim m/\varepsilon$ の狭い円錐内へ飛び去る．

超相対論的な場合に，角度分布に対する定量的な公式は，(91.11) から κ, κ' を代入し，他の場所では $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}'$ を $\varepsilon, \varepsilon'$ で置き換え，ε^2 にくらべて q^2 を無視して (91.8) から求めることができる．便利な記号

$$\delta = \frac{\varepsilon}{m}\theta, \quad \delta' = \frac{\varepsilon'}{m}\theta' \tag{91.12}$$

を導入し，この公式をつぎの形に表わす．

$$\begin{aligned} d\sigma = \frac{8}{\pi} Z^2 \alpha r_e^2 \frac{\varepsilon' m^4}{\varepsilon q^4} \frac{d\omega}{\omega} \delta\, d\delta \cdot \delta'\, d\delta'\, d\varphi \\ \times\Big\{\frac{\delta^2}{(1+\delta^2)^2} + \frac{\delta'^2}{(1+\delta'^2)^2} + \frac{\omega^2}{2\varepsilon\varepsilon'} \frac{\delta^2+\delta'^2}{(1+\delta^2)(1+\delta'^2)} \\ -\Big(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}+\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\Big)\frac{\delta\delta' \cos\varphi}{(1+\delta^2)(1+\delta'^2)}\Big\}. \end{aligned} \tag{91.13}$$

$q^2 = [\boldsymbol{n}\boldsymbol{q}]^2 + (\boldsymbol{n}\boldsymbol{q})^2 \quad (\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}/\omega)$ と書くと，小さな角度に対して

$$\frac{q^2}{m^2} = (\delta^2+\delta'^2-2\delta\delta'\cos\varphi) + m^2\Big(\frac{1+\delta^2}{2\varepsilon} - \frac{1+\delta'^2}{2\varepsilon'}\Big)^2 \tag{91.14}$$

であることが容易にわかる．$\delta \sim \delta' \sim 1$ のときには，ここの第2項は第1項にくらべて小さい．両方の項は $\delta \sim m/\varepsilon$ であるような小さい角度領域で同程度になる．ここで q は特に小さい ($q \sim m^2/\varepsilon \ll m$) にもかかわらず，この領域からの断面積への積分の全寄与は，$\delta \lesssim 1$ の全領域からの寄与にくらべて非常に小さい（容易にわかるように，m^2/ε^2 の比である）．しかしもしも

$$|\delta-\delta'| \lesssim \frac{m}{\varepsilon}, \quad \varphi \lesssim \frac{m}{\varepsilon} \tag{91.15}$$

ならば，$\delta \sim \delta' \sim 1$ のときに q は $q \sim m^2/\varepsilon$ の値に達することができる．この領域の寄与は，全積分断面積と同程度の大きさである（あるいは，そのなかで基本的なものでありさえする——以下参照）．

公式 (91.13) の $d\varphi$ および $d\delta'$ についての積分は2次電子の方向に無関係な（与えられた振動数の）光子の角度分布を与える[1]．すなわち

---

1) 始めに $d\varphi$ についての積分が（0から 2π までの限界で）行なわれる．$d\delta'$ についての積分は，差 $|\Delta| = |\delta'-\delta|$ についての積分に変えた方が便利である．そしてその領域を二つの部分に分ける．すなわち，0からある Δ_0 と，Δ_0 から ∞ までである．ここで Δ_0 は不等式 $m/\varepsilon \ll \Delta_0 \ll 1$ を満足するものである．各領域では被積分関数のなかで，適当な近似が可能である．

$$d\sigma = 8Z^2\alpha r_e^2 \frac{d\omega}{\omega}\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\frac{\delta\cdot d\delta}{(1+\delta^2)^2}$$
$$\times\left\{\left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}+\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}-\frac{4\delta^2}{(1+\delta^2)^2}\right]\ln\frac{2\varepsilon\varepsilon'}{m\omega}-\frac{1}{2}\left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}+\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}+2-\frac{16\delta^2}{(1+\delta^2)^2}\right]\right\}. \quad (91.16)$$

$d\delta$ についての積分をして，超相対論的な場合に，輻射のスペクトル分布を得る．

$$d\sigma_\omega = 4Z^2\alpha r_e^2\frac{d\omega}{\omega}\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}+\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}-\frac{2}{3}\right)\left(\ln\frac{2\varepsilon\varepsilon'}{m\omega}-\frac{1}{2}\right) \quad (91.17)$$

((91.9) から直接にこの公式を得ることができる)．

(91.16) および (91.17) に対数的な大きい量 ($\omega\sim\varepsilon$ のときでさえ比 $\frac{\varepsilon\varepsilon'}{m\omega}\sim\frac{\varepsilon'}{m}\gg 1$) が存在することに注目しよう．もしもその量が大きくて，その対数も大きいならば，上記の式中で対数を含む項が主となる．この対数が (91.15) の領域の積分から生じることを指摘しよう[1]．このようにして，対数近似では（すなわち，大きい対数を含まない項を省略するときは)，2 次電子は入射方向に対して $\sim(m/\varepsilon)^2$ の角内に飛び去る．

最後に，超相対論的電子がそのエネルギーのほとんど全部を輻射するような，すなわち $\omega\approx\varepsilon\gg\varepsilon'$ の領域である，スペクトルの硬端の近くの領域に対する，極限の公式を導こう．(91.9)から容易に

$$d\sigma_\omega = 2Z^2\alpha r_e^2\frac{d\omega}{\varepsilon}\left\{\frac{\varepsilon'^2}{p'^2}\ln\frac{\varepsilon'+p'}{\varepsilon'-p'}-\frac{m^2\varepsilon'}{4p'^3}\ln^2\frac{\varepsilon'+p'}{\varepsilon'-p'}-\frac{\varepsilon'}{p'}\right\}. \quad (91.18)$$

公式 (91.17), (91.18) は，超相対論的な始めの電子に対する ω の値の全区間を覆っていることを指摘しておこう．$\omega\approx\varepsilon\gg\varepsilon'\gg m$ のとき二つの公式は一致する．もしも 2 次電子が非相対論的 ($p'\ll m$) ならば

$$d\sigma_\omega = 2Z^2\alpha r_e^2\frac{\sqrt{2m(\varepsilon-\omega)}}{m}\frac{d\omega}{\varepsilon}. \quad (91.19)$$

偏りの効果

制動輻射における偏りの効果は，§66 で記述された一般的方法によって調べることがで

---

1) φ と $\Delta=\delta'-\delta$ が条件 $m/\varepsilon\ll\Delta$, $\varphi\ll 1$ を満足するような積分領域を考えれば．これは容易に証明される．この領域では $q^2/m^2\approx\Delta^2+\varphi^2\delta^2$ であり，(91.13) のなかの波括弧は，φ^2 あるいは Δ^2 に比例する項を含んでいる ($\varphi=0$ および $\Delta=0$ のときこれは 0 になる)．

$$\int\frac{\varphi^2 d\varphi\, d\Delta}{(\Delta^2+\delta^2\varphi^2)^2} \quad \text{あるいは} \quad \int\frac{\Delta^2 d\varphi\, d\Delta}{(\Delta^2+\delta^2\varphi^2)^2}$$

の形の積分は対数的に発散する．その《切断》は変数の上記の値である．

きる．与えられた場合に，4-ベクトル $e^{(1)}$, $e^{(2)}$ を選ぶ問題は特に簡単である．この過程は実際には一つの定まった基準系（原子核の静止系）で考察するのが便利なので，$e^{(1)}=(0, \boldsymbol{e}^{(1)})$, $e^{(2)}=(0, \boldsymbol{e}^{(2)})$ と置けば十分である．ここで $\boldsymbol{e}^{(1)}$, $\boldsymbol{e}^{(2)}$ は $\boldsymbol{k}$ に垂直な単位ベクトルで，そのなかの一つは $(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{p})$ 面内にあり，他はそれに垂直である．

われわれはここで，非常に膨大な計算も，その定量的な結果を導くこともよそう[1]．ただ偏りの効果の若干の定性的性質だけを指摘しよう．これらの性質は，§87 でコンプトン効果に対して行なわれたのとまったく同様に，種々の対称関係を使って得られる．

記述された定理は摂動論の最初の消えない近似に対応している．この近似で断面積は，始めの電子の偏り（$\boldsymbol{\zeta}$）あるいは終りの電子の偏り（$\boldsymbol{\zeta}'$）のベクトル一つだけに比例する項を含むことはできない．$\backsim \boldsymbol{\zeta}$ の項が存在しないことは，（光子および2次電子の偏りについて加えられた）全輻射断面積が入射電子の偏りには依存しないことを意味している．

光子の偏りのパラメータ（ξ_1', ξ_2', ξ_3'）の一つだけに比例する項のなかで，$\backsim \xi_2'$ の項は存在しない．これは，偏りのない電子による輻射のときに，光子は円偏光を持たないことを意味する．しかし，ここにコンプトン効果に対する類似の結果との相違がある．後者の場合には，われわれの自由に配置ができる，ただ二つの独立ベクトル $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{k}'$ から擬スカラーを作りえないことと関連して，このような項は空間的偶奇性によって禁止された．制動輻射の場合には，三つの独立な運動量 $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}', \boldsymbol{k})$ が存在する．そしてこれは擬スカラー $(\boldsymbol{k}[\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}'])$ を作るのに十分である．$\xi_2'(\boldsymbol{k}[\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}'])$ の形の項は空間的偶奇性とは矛盾しない．したがって厳密に言えば0と異なる．しかしながら，それはすべての運動量の符号の変化（(87.26) 参照）に関して不変ではない．したがって，1次のボルン近似には現われない．

擬スカラー $(\boldsymbol{k}[\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}'])$ の存在は，また断面積中に $\backsim \xi_3'$ の項と並んで $\backsim \xi_1'$ の項も許される結果をもたらす（コンプトン効果のときと逆の立場である）．これらの項は

$$S_{\alpha\beta}\nu_\alpha[\boldsymbol{k}\boldsymbol{\nu}]_\beta(\boldsymbol{k}[\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}'])$$

の形の積として現われる（ここで $\boldsymbol{\nu}=[\boldsymbol{k}\boldsymbol{p}]$ である）．そしてこれは空間反転に関しても，

1) これらの導き方は原論文参照：R. L. Gluckstern, M. H. Hull, G. Breit, *Phys. Rev.* **90**, 1026, 1030 (1953)；Г. Л. Высоцкий, А. А. Креснин, Л. Н. Розенцвейг, ЖЭТФ **32**, 1078 (1957)；K. McVoy, *Phys. Rev.* **106**, 828 (1957)；**111**, 1333 (1958)；H. Banerjee, *Phys. Rev.* **111**, 532 (1958)；C. Fronsdal, H. Überall, *Phys. Rev.* **111**, 580 (1958)（これらの論文には詳細な引用文が付けられている）．また総合報告の論文：H. McMaster, *Rev. Mod. Phys.* **33**, 8 (1961) も参照．

またすべての運動量の符号の変化に関しても不変量である．このようにして，輻射される光子は（軸 $e^{(1)}$ および $e^{(2)}$ の方向の，またはこれらの軸から45°の ≪対角≫ 方向の）二つの型の直線偏光を持つ．しかしながら，これは，2次電子が飛び去る方向が記録される条件に関係する．p' の方向のすべてについて積分すると断面積中の $\infty \xi_1'$ の項は0になる．これは対称性の考察からすでに明らかである．すなわち，積分後では，二つの互いに一致しない ≪対角≫ 方向は同値で，したがってこれらのなかのどちらかに傾く偏り（これは $\xi_1' \neq 0$ のときには起こった）は不可能だからである．

直線偏光の程度は入射電子の偏りの状態には依存しない．すなわち1次のボルン近似のなかで $\xi_1'\zeta$ および $\xi_3'\zeta$ の形の相関項は禁止されるからである．$\xi_2'\zeta$ の項が許されるので，偏った電子による輻射の際には，光子は円偏光を持っている（Я. Б. Зельдович, 1952）．

遮　　蔽

上に得られた公式は純クーロン場に対して導かれた．もしも≪裸の≫原子核とでなく，原子との衝突の際の輻射について語るとすれば，原子核の電場の電子による遮蔽を考慮する必要がある．そしてこれは断面積の減少をもたらす．このためには外場のポテンシャル $A^{(e)}(q)$ のなかに構造因子 $F(q)$ を導入する必要がある（III, §137参照）．III (137.2) にしたがって Z を $Z-F(q)$ で置き換えればよい．遮蔽が重要になるための条件を明らかにしよう．

構造因子中の q の一定値には，原子内の電子の電荷の空間的分布の方では距離 $r\sim 1/q$ が対応する．構造因子は $q\lesssim 1/a$ で Z という値に近づく（完全遮蔽）．ここで a は原子の大きさである．

他面，超相対論的な場合には輻射断面積への重要な寄与は，前に見たように，電子の始めと終りのエネルギーが与えられたときに，q が取りうる最小値の近くの領域からくる．超相対論的な場合には

$$q_{\min} = p-p'-\omega = \sqrt{\varepsilon^2-m^2}-\sqrt{\varepsilon'^2-m^2}-(\varepsilon-\varepsilon') \approx \frac{m^2\omega}{2\varepsilon\varepsilon'}.$$

もしも $q_{\min}\lesssim 1/a$ あるいは

$$\frac{\varepsilon\varepsilon'}{m\omega} \gtrsim \frac{a}{1/m} \tag{91.20}$$

ならば，遮蔽は重要になる．この条件はどの場合にも入射電子のエネルギーが十分に大きいときは満足される．

$q_{\min} \ll 1/a$ (≪完全遮蔽≫) ならば，対数的精度でただちに，輻射のスペクトル分布に対する影響を書くことができる．実際には (91.17) の対数記号のなかは，ちょうど不等式 $\varepsilon\varepsilon'/m\omega \gg ma$ の左辺になる．不等式にしたがうとき，この対数に導く dq についての積分は，不等式の右辺の大きさの程度の値になる．トーマス=フェルミ模型にしたがうと，$a \sim a_0 Z^{-1/3}$である．ここで$a_0 \sim 1/me^2$ はボーア半径である (III, §70参照)．このとき $am \sim 1/\alpha Z^{1/3}$ である．このようにして完全遮蔽のときは (91.17) の対数は $\ln(1/\alpha Z^{1/3})$ に置き換えねばならない[1]．

エネルギー損失

輻射への電子のエネルギー損失は≪有効制動≫

$$\kappa_{輻} = \int_0^{\varepsilon - m} \omega \, d\sigma_\omega \tag{91.21}$$

によって特徴づけられる．(91.17) の $d\sigma_\omega$ を使った積分の計算は，つぎのような結果[2]へ導く．

$$\kappa_{輻} = Z^2 \alpha r_e^2 \varepsilon \left\{ \frac{12\varepsilon^2 + 4m^2}{3\varepsilon p} \ln \frac{\varepsilon + p}{m} \right.$$
$$\left. - \frac{(8\varepsilon + 6p)m^2}{3\varepsilon p^2} \ln^2 \frac{\varepsilon + p}{m} - \frac{4}{3} + \frac{2m^2}{\varepsilon p} F\left(\frac{2p(\varepsilon + p)}{m^2} \right) \right\}. \tag{91.22}$$

ここで関数 $F(x)$ はつぎのように定義される．

$$F(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+y)}{y} dy.$$

x が小さいときは

$$F(x) = x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} - \frac{x^4}{16} + \cdots\cdots.$$

x が大きいときは正確な公式

$$F(x) = \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2} \ln^2 x - F\left(\frac{1}{x}\right)$$

を使うことができる．

---

1) この問題のいっそう詳しい記述は，H. A. Bethe, W. Heitler, *Proc. Roy. Soc.* A **146**, 83 (1934); H. A. Bethe, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **30**, 524 (1934) 参照．

2) (91.17) の公式は，上限の近くで使用できないが積分が収束するから，この事情は重要ではない．

非相対論的な場合に (91.22) は

$$\kappa_{\text{輻}} = \frac{16}{3} Z^2 \alpha r_e^2 m \tag{91.23}$$

に移る．非相対論的なボルンの公式 (90.16) の直接の積分によってこの式を得ることができる．

超相対論的な場合には

$$\kappa_{\text{輻}} = 4 Z^2 \alpha r_e^2 \varepsilon \left(\ln \frac{2\varepsilon}{m} - \frac{1}{3}\right). \tag{91.24}$$

比 $\kappa_{\text{輻}}/\varepsilon$ はまた輻射によるエネルギー損失の断面積と呼ぶ．ε が大きいときそれは対数的に発散する．しかしながらこの増大は遮蔽を考慮すると打消される．完全遮蔽のときは， $\kappa_{\text{輻}}/\varepsilon$ は一定の極限 $\approx 4Z^2 \alpha r_e^2 \ln(1/\alpha Z^{1/3})$ に近づく．

原子との衝突に対してはまた，原子核のみならず電子によっても若干の輻射が起こることを考慮する必要がある．われわれはのちに (§94)，超相対論的な場合には電子による電子の輻射断面積は，原子核による輻射断面積から因子 Z^2 がなくなるだけが異なることを見るだろう．したがって，Z 個の原子内電子の存在は，Z^2 を $Z(Z+1)$ で置き換えることによって近似的に考慮することができる．

§92. 原子核の電場内での光子による対生成

光子が原子核に衝突するときの電子－陽電子対生成 ($Z+\gamma \longrightarrow Z+e^-+e^+$) は，電子の原子核での制動輻射 ($Z+e^- \longrightarrow Z+e^-+\gamma$) と同じ反応の別のチャネルである．したがって，この過程の振幅 M_{fi} は簡単な置き換え

$$\begin{gathered} \varepsilon, \boldsymbol{p} \longrightarrow -\varepsilon_+, -\boldsymbol{p}_+, \quad \varepsilon', \boldsymbol{p}' \longrightarrow \varepsilon_-, \boldsymbol{p}_-, \\ \omega, \boldsymbol{k} \longrightarrow -\omega, -\boldsymbol{k} \end{gathered} \tag{92.1}$$

によって，制動輻射の振幅から得られる（添字＋および－は陽電子および電子に関するものである）．絶対値と角度を使って運動量の変換は

$$p \to p_+, \quad p' \to p_-, \quad \theta \to \pi - \theta_+, \quad \theta' \to \theta_-, \quad \varphi \to \varphi - \pi$$

である．ここで $\theta_\pm$ は $\boldsymbol{p}_\pm$ と $\boldsymbol{k}$ の，φ は $(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{p}_+)$ 面と $(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{p}_-)$ 面とのあいだの角度である．

今は断面積は M_{fi} を使って ((91.1) の代りに)

$$d\sigma = |M_{fi}|^2 \frac{1}{8\omega\varepsilon_-\varepsilon_+} \delta(\omega - \varepsilon_+ - \varepsilon_-) \frac{d^3p_+ d^3p_-}{(2\pi)^5},$$

あるいは δ-関数を消去して

$$d\sigma = \frac{p_+ p_-}{(2\pi)^5 \omega} |M_{fi}|^2 do_+ do_- d\varepsilon_+$$

のように表わされる（この節では $p_\pm = |\boldsymbol{p}_\pm|$, $q = |\boldsymbol{q}|$ である）．(91.2) とくらべて，対生成の断面積を制動輻射の断面積から求めるためには，後者において置き換え(92.1)を行ない，それに

$$\frac{p_+^2}{\omega^2} \frac{d\varepsilon_+}{d\omega} \tag{92.2}$$

を掛け，$do' do_k$ を $do_+ do_-$ で置き換える必要がある．

このようにして，(91.8) から，対の成分の偏りについて平均された[1]，偏らない光子による対生成の微分断面積に対し，つぎのような式を得る．

$$d\sigma = -\frac{Z^2 \alpha r_e^2}{2\pi} \frac{m^2 p_+ p_- d\varepsilon_+}{\omega^3 q^4} \sin\theta_+ d\theta_+ \sin\theta_- d\theta_- d\varphi$$
$$\times \left\{ \frac{p_+^2}{\kappa_+^2} (4\varepsilon_-^2 - q^2) \sin^2\theta_+ + \frac{p_-^2}{\kappa_-^2} (4\varepsilon_+^2 - q^2) \sin^2\theta_- \right.$$
$$\left. - \frac{2\omega^2}{\kappa_+ \kappa_-} (p_+^2 \sin^2\theta_+ + p_-^2 \sin^2\theta_-) - \frac{2p_+ p_-}{\kappa_+ \kappa_-} (2\varepsilon_+^2 + 2\varepsilon_-^2 - q^2) \sin\theta_+ \sin\theta_- \cos\varphi \right\},$$
$$\kappa_\pm = \varepsilon_\pm - p_\pm \cos\theta_\pm, \quad q^2 = (\boldsymbol{p}_+ + \boldsymbol{p}_- - \boldsymbol{k})^2, \quad \varepsilon_+ + \varepsilon_- = \omega \tag{92.3}$$

(H. A. Bethe, W. Heitler, 1934).

このような変換によって，(91.9) からは対の成分のエネルギー分布が得られる．すなわち

$$d\sigma_{\varepsilon_+} = Z^2 \alpha r_e^2 \frac{p_+ p_-}{\omega^3} d\varepsilon_+ \left\{ -\frac{4}{3} - 2\varepsilon_+ \varepsilon_- \frac{p_+^2 + p_-^2}{p_+^2 p_-^2} + m^2 \left(l_- \frac{\varepsilon_+}{p_-^3} + l_+ \frac{\varepsilon_-}{p_+^3} - l_+ l_- \frac{1}{p_+ p_-} \right) \right.$$
$$+ L \left[-\frac{8\varepsilon_+ \varepsilon_-}{3p_+ p_-} + \frac{\omega^2}{p_+^3 p_-^3} (\varepsilon_+^2 \varepsilon_-^2 + p_+^2 p_-^2 - m^2 \varepsilon_+ \varepsilon_-) \right.$$
$$\left.\left. - \frac{m^2 \omega}{2p_+ p_-} \left(l_+ \frac{\varepsilon_+ \varepsilon_- - p_+^2}{p_+^3} + l_- \frac{\varepsilon_+ \varepsilon_- - p_-^2}{p_-^3} \right) \right] \right\}, \tag{92.4}$$
$$L = \ln \frac{\varepsilon_+ \varepsilon_- + p_+ p_- + m^2}{\varepsilon_+ \varepsilon_- - p_+ p_- + m^2}, \quad l_\pm = \ln \frac{\varepsilon_\pm + p_\pm}{\varepsilon_\pm - p_\pm}.$$

得られた公式はボルン近似に基づいているので，これらは条件 $Ze^2/v_\pm \ll 1$ のときにのみ正しい．電子と陽電子に関する公式 (92.3)，(92.4) の対称性はもちろんボルン近似の結

---

1) 光子による対生成での偏りの効果については，§91 で示された制動輻射に対するのと同じ文献参照．

果であることを指摘しよう．それはより高次の近似ではなくなるはずである．

超相対論的な場合 ($\varepsilon_\pm \gg m$)，電子と陽電子は入射光子の方向に $\theta_\pm \sim m/\varepsilon_\pm$ の角度に飛び去る．角度分布は (91.13) に類似の公式で与えられる．

$$d\sigma = \frac{8}{\pi} Z^2 \alpha r_e^2 \frac{m^4 \varepsilon_+ \varepsilon_-}{\omega^3 q^4} d\varepsilon_+ \left\{ -\frac{\delta_+^2}{(1+\delta_+^2)^2} - \frac{\delta_-^2}{(1+\delta_-^2)^2} + \frac{\omega^2}{2\varepsilon_+\varepsilon_-} \frac{\delta_+^2+\delta_-^2}{(1+\delta_+^2)(1+\delta_-^2)} \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\varepsilon_+}{\varepsilon_-} + \frac{\varepsilon_-}{\varepsilon_+}\right) \frac{\delta_+\delta_- \cos\varphi}{(1+\delta_+^2)(1+\delta_-^2)} \right\} \delta_+\delta_- \cdot d\delta_+ d\delta_- \cdot d\varphi. \quad (92.5)$$

このとき

$$\frac{q^2}{m^2} = \delta_+^2 + \delta_-^2 + 2\delta_+\delta_- \cos\varphi + m^2 \left(\frac{1+\delta_+^2}{2\varepsilon_+} + \frac{1+\delta_-^2}{2\varepsilon_-}\right)^2. \quad (92.6)$$

この場合のエネルギー分布は

$$d\sigma = 4Z^2 \alpha r_e^2 \frac{d\varepsilon_+}{\omega^3} \left(\varepsilon_+^2 + \varepsilon_-^2 + \frac{2}{3}\varepsilon_+\varepsilon_-\right) \left(\ln \frac{2\varepsilon_+\varepsilon_-}{m\omega} - \frac{1}{2}\right) \quad (\text{超相}). \quad (92.7)$$

この式の $d\varepsilon_+$ についての積分 (m から ω までの限界内での) は，与えられたエネルギーの光子による対生成の全断面積を与える[1]．

$$\sigma = \frac{28}{9} Z^2 \alpha r_e^2 \left(\ln \frac{2\omega}{m} - \frac{109}{42}\right), \quad \omega \gg m. \quad (92.8)$$

制動輻射に対するのと同様に，超相対論的な場合の断面積中の対数項は $q \sim m^2/\varepsilon$ の値の領域からきている．今は ((91.15) のなかの $\varphi \lesssim m/\varepsilon$ の代りに)

$$|\delta_+ - \delta_-| \lesssim \frac{m}{\varepsilon}, \quad |\pi - \varphi| \lesssim \frac{m}{\varepsilon}$$

になるような角度がこれに対応する．このようにして，対数近似では，電子と陽電子の方向は光子の方向に対してほとんど同じ（小さい）角度をなし，そして光子とほとんど同一平面上で，光子の両側にある．

反応のしきいの近く ($\omega \to 2m$) ではボルン近似は適用できない．この場合に定量的公式を導くためには，終状態に存在する三つの荷電粒子（原子核と対）のクーロン相互作用の正確な考慮を必要とするだろう．（核に引きつけられる）電子と（核から斥けられる）陽電子に関する対称性は，この場合にはなくなってしまう．

もしも

$$Z\alpha \ll \sqrt{\frac{\omega - 2m}{\omega}} \ll 1 \quad (92.9)$$

---

1) 両方の限界での積分の収束性のために，$\varepsilon_\pm - m$ の小さいときの公式 (92.7) が適用できないことは重要でない．

ならば，ボルン近似はまだ適用できる．対が非相対論的なエネルギーのときには $\omega \approx 2m \gg p_\pm$ であり，したがって $q \approx \omega$ である．(92.3) ではいたるところで $\varepsilon_\pm = \kappa_\pm = m$, $\omega = 2m$ と置くことができる．その後この公式はつぎのようになる．

$$d\sigma = \frac{Z^2 \alpha r_e^2}{64\pi^2} \frac{p_+ p_-}{m^5} (p_+^2 \sin^2\theta_+ + p_-^2 \sin^2\theta_-)\, do_+\, do_-\, d\varepsilon_+. \qquad (92.10)$$

角度についての積分ののち

$$d\sigma = \frac{1}{6} Z^2 \alpha r_e^2 \frac{p_+ p_- (p_+^2 + p_-^2)}{m^5} d\varepsilon_+$$

$$= \frac{2Z^2 \alpha r_e^2}{3m^3} (\omega - 2m) \sqrt{(\varepsilon_+ - m)(\varepsilon_- - m)}\, d\varepsilon_+. \qquad (92.11)$$

最後に $d\varepsilon_+$ について(m から $\omega - m$ までの限界で) 積分して，全断面積を得る．

$$\sigma = \frac{\pi}{12} Z^2 \alpha r_e^2 \left(\frac{\omega - 2m}{m} \right)^3. \qquad (92.12)$$

もしも創られた対の成分の相対速度 (v_0) が小さければ，お互いどうしのクーロン相互作用を考慮する必要がある (A. Д. Сахаров, 1948)．この相互作用は v_0 が電子と陽電子の結合状態（ポジトロニウム）内の粒子の速度と同程度の大きさ（あるいは小さい）のとき，すなわち

$$v_0 \lesssim \alpha \qquad (92.13)$$

のときには重要である．

この過程を対の重心系で考察しよう．この系での過程を描く図形では $\sim m$ の仮想的運動量が重要になる．言いかえれば，電子と陽電子のあいだの距離 $\sim 1/m$ が重要である．それにもかかわらず，その相対運動の波動関数は $r \sim 1/mv_0 \sim 1/m\alpha$ の距離で，すなわち $1/m$ にくらべて大きい距離ではじめて大きく変化する．したがって粒子の相互作用の考慮は，遷移行列要素に因子 $\psi^*(0)$ が現われることに帰する．したがって微分全断面積には $|\psi(0)|^2$，すなわち

$$\frac{2\pi\alpha/v_0}{1 - e^{-2\pi\alpha/v_0}} \qquad (92.14)$$

が掛けられる (III (134.11) 参照)．2粒子相対速度は，一方の粒子の，他方の粒子の静止系での速度である．この系と実験室系（原子核の静止系）での不変量 $p_{+\mu} p_-^\mu$ の値を比較して

$$\frac{m^2}{\sqrt{1 - v_0^2}} = \varepsilon_+ \varepsilon_- - \boldsymbol{p}_+ \boldsymbol{p}_-$$

を得る．これから v_0 が見いだされる．もしも $\boldsymbol{p}_+$ および $\boldsymbol{p}_-$ の大きさおよび方向が接近していれば，v_0 に対して（$v_0 \ll 1$ のときに使える）近似式

$$v_0^2 = \frac{p^2\vartheta^2 + (p_+ - p_-)^2}{\varepsilon^2} \tag{92.15}$$

が得られる．ここで $p = (p_+ + p_-)/2$, $\varepsilon = (\varepsilon_+ + \varepsilon_-)/2$ で，ϑ は $\boldsymbol{p}_+$ と $\boldsymbol{p}_-$ のあいだの角度である．

公式 (92.14), (92.15) によって定義される断面積への補正は，創られた電子と陽電子の運動量のあいだの相関関係に異常，すなわち $\boldsymbol{p}_+ \approx \boldsymbol{p}_-$ のときの鋭い極大が現われる結果をもたらす．

§93. 超相対論的な場合の対生成と制動輻射の詳論

前2節では相対論的領域における制動輻射と，対生成がボルン近似を基礎として調べられた．この近似はどの場合にも条件 $Z\alpha \ll 1$ を要求した．この節では上記の制限から離れた，すなわち $Z\alpha \sim 1$ のときにも成り立つような，この過程の理論が述べられる（H. A. Bethe, L. Maximon, 1954）．このとき，両粒子（始めおよび終りの電子，あるいは対の成分）ともに超相対論的と仮定する．すなわち，そのエネルギーは $\varepsilon \gg m$ である．

われわれは，超相対論的な場合には両粒子ともに光子の方向に対して小さい角度（θ, θ' あるいは θ_+, θ_-）で飛び去ること，すなわち，$\theta \lesssim m/\varepsilon$ であることを見てきた．この性質は正確な（$Z\alpha$ について）理論でも保存され，したがってわれわれはもちろんこの角度領域を考察しよう．

この領域では原子核への運動量の転移は $q \sim m$ である．これは，波動関数のなかで衝突径数 $\rho \sim 1/q \sim 1/m$，すなわち《大きい》距離が重要であることを意味している．このような距離では §39 で得られた波動関数を使うことができる．

われわれは対生成に対する計算を詳しく述べよう．ボルン近似に対する補正は，この場合の方が制動輻射に対するよりも一層重要である．

対生成の断面積は光電効果の断面積（(56.1), (56.2) 参照）と似た形を持っている．

$$d\sigma = 2\pi\left|e\sqrt{4\pi}\frac{1}{\sqrt{2\omega}}M_{fi}\right|^2\delta(\omega-\varepsilon_+-\varepsilon_-)\frac{d^3p_+d^3p_-}{(2\pi)^6}. \tag{93.1}$$

ここで

$$M_{fi} = \int \psi_{\varepsilon_-\boldsymbol{p}_-}^{(-)*}(\boldsymbol{\alpha e})e^{i\boldsymbol{kr}}\psi_{-\varepsilon_+-\boldsymbol{p}_+}^{(+)}d^3x. \tag{93.2}$$

ここで $\psi^{(-)}_{\varepsilon_-\boldsymbol{p}_-}$ は，電子の波動関数である．また $\psi^{(+)}_{-\varepsilon_+-\boldsymbol{p}_+}$ は負エネルギー（$-\varepsilon_+$）と運動量 $-\boldsymbol{p}_+$ の波動関数である．

終状態の粒子に関する関数 $\psi^{(-)}_{\varepsilon_-\boldsymbol{p}_-}$ は，その漸近形に（平面波と並んで）収束球面波を含む必要がある．この事情は関数に上の添字（－）によって示されている．(39.10) にしたがってこのような波動関数は[1]

$$\psi^{(-)}_{\varepsilon_-\boldsymbol{p}_-}=\frac{C^{(-)}}{\sqrt{2\varepsilon_-}}e^{i\boldsymbol{p}_-\boldsymbol{r}}\left(1-\frac{i\boldsymbol{\alpha}\nabla}{2\varepsilon_-}\right)F\left(-i\nu,1,-i\left(p_-r+\boldsymbol{p}_-\boldsymbol{r}\right)\right)u(p_-), \tag{93.3}$$

$$C^{(-)}=e^{\pi\nu/2}\Gamma(1+i\nu),\quad \nu=Z\alpha.$$

関数 $\psi^{(+)}_{-\varepsilon_+-\boldsymbol{p}_+}$ は，その意味から言って≪負エネルギーの始状態の≫波動関数であるから，その漸近形には発散球面波（上に添字（＋）がある）を含まねばならない．このとき（$\psi^{(+)*}_{-\varepsilon_+-\boldsymbol{p}_+}$ から作られる）陽電子の波動関数は，終りの粒子に対して要求されるように漸近形が収束波である．(39.11) にしたがって，このような関数は

$$\psi^{(+)}_{-\varepsilon_+-\boldsymbol{p}_+}=\frac{C^{(+)}}{\sqrt{2\varepsilon_+}}e^{-i\boldsymbol{p}_+\boldsymbol{r}}\left(1+\frac{i\boldsymbol{\alpha}\nabla}{2\varepsilon_+}\right)F\left(-i\nu,1,i\left(p_+r+\boldsymbol{p}_+\boldsymbol{r}\right)\right)u(-p_+), \tag{93.4}$$

$$C^{(+)}=e^{-\pi\nu/2}\Gamma(1+i\nu).$$

(93.3), (93.4) で$\sim 1/\varepsilon$ の項を考慮する必要性は，M_{fi} (93.2) の行列の構造と結びついている．行列要素 $(\boldsymbol{\alpha})_{fi}$ は $\boldsymbol{k}$ に近い方向のベクトルである．したがって，$(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{e})_{fi}$ の主な項は小さいこと，そして補正項がそれと同程度の大きさであることがわかる．

(93.3), (93.4) を (93.2) に代入して，$\sim 1/\varepsilon_+\varepsilon_-$ の項を省略して

$$M_{fi}=\frac{N}{2\sqrt{\varepsilon_+\varepsilon_-}}u^*(p_-)\{(\boldsymbol{e}\boldsymbol{\alpha})I+(\boldsymbol{e}\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{I}_+)+(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{I}_-)(\boldsymbol{e}\boldsymbol{\alpha})\}u(-p_+). \tag{93.5}$$

ここで

$$N=C^{(+)}C^{(-)*}=\frac{\pi\nu}{\sinh\pi\nu}, \tag{93.6}$$

$$I=\int e^{-i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}}F_-^*F_+d^3x,$$

$$\boldsymbol{I}_+=\frac{i}{2\varepsilon_+}\int e^{-i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}}F_-^*\nabla F_+d^3x,\qquad \boldsymbol{I}_-=\frac{i}{2\varepsilon_-}\int e^{-i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}}(\nabla F_-)^*F_+d^3x, \tag{93.7}$$

$$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{p}_++\boldsymbol{p}_--\boldsymbol{k}.$$

（簡単のために F_- および F_+ で，(93.3) および (93.4) に現われる超幾何関数を表わ

---

1)　この節では $p_\pm=|\boldsymbol{p}_\pm|$，$q=|\boldsymbol{q}|$ である．

す)．ここで，積分 I, I_+, I_- が一つの恒等式によって結ばれていることを指摘しよう．すなわち

$$\int \nabla (e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} F_-^* F_+) d^3x = 0$$

から

$$\mathbf{q}\boldsymbol{I} + 2\varepsilon_+ \boldsymbol{I}_+ + 2\varepsilon_- \boldsymbol{I}_- = 0. \tag{93.8}$$

平方 $|M_{fi}|^2$ は入射光子の偏りについて平均し，電子および陽電子のスピンの方向についての和をとろう[1]．これはテンソルの置き換え

$$e_i e_k^* \longrightarrow \frac{1}{2}(\delta_{ik} - n_i n_k), \quad \boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{k}}{\omega}$$

および双スピノール積の置き換え

$$u_\pm \cdot \bar{u}_\pm \longrightarrow 2\rho_\pm = (\varepsilon_\pm \gamma^0 - \boldsymbol{p}_\pm \boldsymbol{\gamma} \mp m)$$

によって実現される．また $\boldsymbol{\alpha} = \gamma^0 \boldsymbol{\gamma}$ の置き換えをして

$$|M_{fi}|^2 \longrightarrow \frac{N^2}{2\varepsilon_+ \varepsilon_-}\{\mathrm{Sp}\,\rho_- \mathbf{Q} \rho_+ \bar{\mathbf{Q}} - \mathrm{Sp}\,\rho_- (\boldsymbol{n}\mathbf{Q}) \rho_+ (\boldsymbol{n}\bar{\mathbf{Q}})\},$$
$$\mathbf{Q} = \boldsymbol{\gamma} I - \gamma^0 \boldsymbol{\gamma} (\boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{I}_+) - \gamma^0 (\boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{I}_-) \boldsymbol{\gamma},$$
$$\bar{\mathbf{Q}} = \boldsymbol{\gamma} I^* - \gamma^0 (\boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{I}_+^*) \boldsymbol{\gamma} - \gamma^0 \boldsymbol{\gamma} (\boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{I}_-^*).$$

ここでただちに興味のある超相対論的な場合に対し，小さい角度

$$\theta_\pm \sim \frac{m}{\varepsilon} \ll 1 \tag{93.9}$$

の領域で必要な近似をした結果，得られる結果を書くことにしよう．補助的なベクトル

$$\boldsymbol{\delta}_\pm = \frac{1}{m}(\boldsymbol{p}_\pm)_\perp, \qquad \delta_\pm = \frac{\varepsilon_\pm}{m}\theta_\pm \tag{93.10}$$

を導入しよう（添字⊥は $\boldsymbol{k}$ 方向に垂直な成分を意味している)．これを使って答は

$$|M_{fi}|^2 \longrightarrow \frac{N^2}{4}\left\{\frac{m^2\omega^2}{2\varepsilon_+^2\varepsilon_-^2}|I|^2 + 2\left|I\frac{m\boldsymbol{\delta}_+}{2\varepsilon_+} + \boldsymbol{I}_+\right|^2 + 2\left|I\frac{m\boldsymbol{\delta}_-}{2\varepsilon_-} + \boldsymbol{I}_-\right|^2\right\} \tag{93.11}$$

の形に書かれる．ここでは $I \sim \frac{\varepsilon}{q} I_\pm \sim \frac{\varepsilon}{m} I_\pm$（これは (93.8) からわかる）を考慮し，$m/\varepsilon$ について高次の項は落とされた．

積分 $\boldsymbol{I}_\pm$ は

---

1) すべての粒子の偏りを考慮した計算は，H. Olsen, L. Maximon, *Phys. Rev.* **114**, 887 (1959) 参照．

$$I_{\pm} = i\frac{p_{\pm}}{2\varepsilon_{\pm}}\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{p}_{\pm}},$$
$$J = \int \frac{e^{-i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}}}{r} F(-i\nu, 1, i(p_+r+\boldsymbol{p}_+\boldsymbol{r}))F(i\nu, 1, i(p_-r+\boldsymbol{p}_-\boldsymbol{r}))\,d^3x \tag{93.12}$$

の形に現わすことができる．積分 J は完全超幾何関数を使って表わすことができて[1]

$$J = \frac{4\pi}{q^2}\left(\frac{q^2-2\boldsymbol{p}_+\boldsymbol{q}}{q^2-2\boldsymbol{p}_-\boldsymbol{q}}\right)^{i\nu} F(-i\nu, i\nu, 1, z),$$
$$z = 2\frac{q^2(p_+p_- - \boldsymbol{p}_+\boldsymbol{p}_-)+2(\boldsymbol{p}_+\boldsymbol{q})(\boldsymbol{p}_-\boldsymbol{q})}{(q^2-2\boldsymbol{p}_+\boldsymbol{q})(q^2-2\boldsymbol{p}_-\boldsymbol{q})}. \tag{93.13}$$

$\boldsymbol{p}_{\pm}$ についての微分は，パラメータ $\boldsymbol{q}$ を与えてから行ない．その後始めて $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}_+ + \boldsymbol{p}_- - \boldsymbol{k}$ と置く必要がある．超相対論的な場合に対応し，かつ条件 (93.9) による省略を行なった形の結果を導こう．すなわち

$$I_{\pm} = \frac{4\pi}{q^2}\frac{\varepsilon_{\mp}}{m^2\omega}\left(\frac{\varepsilon_+\xi_+}{\varepsilon_-\xi_-}\right)^{i\nu}\left\{\pm\nu\boldsymbol{q}\xi_{\mp}F(z)+i\frac{q^2}{m^2}F'(z)(\boldsymbol{q}\xi_{\mp}-m\boldsymbol{\delta}_{\pm})\right\} \tag{93.14}$$

となる．ここで簡略記号

$$\xi_{\pm} = \frac{1}{1+\delta_{\pm}^2}, \quad z = 1-\frac{q^2}{m^2}\xi_+\xi_-,$$
$$F(z) = F(-i\nu, i\nu, 1, z) \tag{93.15}$$

が導入された（$F(z)$ は実関数である）．つづいて積分 I は (93.8) から直接に計算される．

積分の値を (93.11) に，続いて (93.1) に代入して，求める微分断面積を得る．最終的な形は

$$d\sigma = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\pi\nu}{\sinh \pi\nu}\right)^2 Z^2\alpha r_e^2\frac{m^4}{q^4\omega^3}\delta_+d\delta_+\cdot\delta_-d\delta_-\cdot d\varphi\, d\varepsilon_+$$
$$\times\Big\{F^2(z)\,[-2\varepsilon_+\varepsilon_-(\delta_+^2\xi_+^2+\delta_-^2\xi_-^2)+\omega^2(\delta_+^2+\delta_-^2)\xi_+\xi_-+2(\varepsilon_+^2+\varepsilon_-^2)\delta_+\delta_-\xi_+\xi_-\cos\varphi]$$
$$+\frac{q^4}{m^4}\frac{\xi_+^2\xi_-^2}{\nu^2}F'^2(z)\,[-2\varepsilon_+\varepsilon_-(\delta_+^2\xi_+^2+\delta_-^2\xi_-^2)+\omega^2(1+\delta_+^2\delta_-^2)\xi_+\xi_-$$
$$-2(\varepsilon_+^2+\varepsilon_-^2)\delta_+\delta_-\xi_+\xi_-\cos\varphi]\Big\}. \tag{93.16}$$

$\nu\to 0$ のとき

$$\frac{\pi\nu}{\sinh \pi\nu}\to 1, \quad F(z)\to 1, \quad F'(z)\approx\nu^2\to 0$$

---

1) 計算のやり方は，428 頁に示されたノルドシークの論文参照．

となる．当然のことながら，(93.16) の式はボルン近似に対応する，ベーテ＝ハイトラーの公式 (92.5) になる．それは任意の ν のときにも，飛び去る角度が条件

$$|\delta_+-\delta_-| \ll 1, \quad |\pi-\varphi| \ll 1$$

を満足すれば，やはり同じ式に帰着する．実際に，このときは $q \ll m$ であり，(93.16) の波括弧のなかの第2項は，そのなかに（第1項にくらべて）余分な因子 $(q/m)^4$ が存在するために落ちてしまう．第1項では（$(1-z) \sim q^2/m^2 \ll 1$ であることに注意して）[1]

$$F(z) \to F(1) \equiv F(-i\nu, i\nu, 1, 1) = \frac{1}{\Gamma(1-i\nu)\,\Gamma(1+i\nu)} = \frac{\sinh \pi\nu}{\pi\nu} \qquad (93.17)$$

と置く．その結果波括弧の前の類似の因子と約される．

断面積の，飛び去る対の方向についての積分に移ろう．

角度による積分は二つの部分 I および II に分かれる．これらではそれぞれ

$$\text{I）}\ 1-z > 1-z_1, \qquad \text{II）}\ 1-z < 1-z_1.$$

ここで z_1 は，$1 \gg 1-z_1 \gg (m/\varepsilon)^2$ のようなある値で．領域 II では $1-z \ll 1$，$q^2 \ll m^2$ なので，上に述べたことにより，ここでは $d\sigma \approx d\sigma_{\text{ボ}} \equiv d\sigma|_{\nu\to 0}$ である．ここで $d\sigma_{\text{ボ}}$ はボルン近似の断面積である．したがって，角度についての積分はつぎのようになる．

$$d\sigma_{\varepsilon_+} \equiv \int d\sigma = \int_{\text{I}} d\sigma + \int_{\text{II}} d\sigma|_{\nu\to 0} = (d\sigma_{\varepsilon_+})_{\text{ボ}} + \int_{\text{I}} (d\sigma - d\sigma|_{\nu\to 0}). \qquad (93.18)$$

ここで $(d\sigma_{\varepsilon_+})_{\text{ボ}}$ は，角度について積分されたボルンの断面積 (92.7) である．

I の領域では

$$\frac{q^2}{m^2} \approx \delta_+^2 + \delta_-^2 + 2\delta_+\delta_- \cos\varphi.$$

変数 $\delta_+, \delta_-, \varphi$ から変数 ξ_+, ξ_-, z に移ろう．変換のヤコビアンの直接の計算によって

$$\delta_+ d\delta_+ \cdot \delta_- d\delta_- \cdot d\varphi \longrightarrow \frac{d\xi_+ d\xi_- dz}{8(\xi_+\xi_-)^3 \delta_+\delta_- \sin\varphi}.$$

このとき

$$1-z = \frac{q^2}{m^2}\xi_+\xi_- = \xi_+ + \xi_- - 2\xi_+\xi_- + 2\sqrt{\xi_+\xi_-(1-\xi_+)(1-\xi_-)}\cos\varphi.$$

これから $\cos\varphi$ および $\sin\varphi$ を表わし，(93.16) に代入する．そして簡単な代数的変形ののち

---

1) この関数の値は，引数が z と $1-z$ の超幾何関数を結んでいる公式 III (e.7) から求めることができる．

$$d\sigma = A d\varepsilon_+ \frac{2d\xi_+ d\xi_- dz}{[z(1-z)-(1-z)(\xi_+ + \xi_- - 1)^2 - z(\xi_+ - \xi_-)^2]^{1/2}}$$

$$\times \left\{ \frac{F^2(z)}{(1-z)^2}[(\varepsilon_+^2+\varepsilon_-^2)(1-z)+2\varepsilon_+\varepsilon_-(\xi_+-\xi_-)^2] \right.$$

$$\left. + \frac{F'^2(z)}{\nu^2}[(\varepsilon_-^2+\varepsilon_-^2)z+2\varepsilon_+\varepsilon_-(\xi_++\xi_--1)^2] \right\},$$

$$A = \left(\frac{\pi\nu}{\sinh \pi\nu}\right)^2 \frac{Z^2\alpha r_e^2}{2\pi\omega^3}.$$

最後に，ξ_+, ξ_- の代りに次式によって新しい《特殊な》変数 χ, ϕ を導入しよう．

$$\xi_+ + \xi_- - 1 = \sqrt{z} \sin \chi \cos \phi,$$

$$\xi_+ - \xi_- = \sqrt{1-z} \sin \chi \sin \phi,$$

$$0 \leqslant \chi \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi;$$

$$2d\xi_+ d\xi_- \longrightarrow \sqrt{z(1-z)} \sin \chi \cos \chi \, d\chi \, d\phi.$$

上記の χ および ϕ の変域は，ξ_+, ξ_- の 0 から 1 までの変化，すなわち δ_+, δ_- (あるいは，同じことだが θ_+, θ_-) の 0 から ∞ までの変化に対応する．積分の急速な収束性は，角度の変域をこのようにひろげることを許している．変換後，分母のなかの根は $\sqrt{z(1-z)} \cos \chi$ となる．したがって，$d\chi\, d\phi$ についての積分は初等的で

$$d\sigma = 2A\cdot 2\pi\, dz \left(\varepsilon_+^2+\varepsilon_-^2+\frac{2}{3}\varepsilon_+\varepsilon_-\right)\left[\frac{F^2(z)}{1-z}+\frac{z}{\nu^2}F'^2(z)\right] Ad\varepsilon_+$$

を与える．ここに余分の因子 2 が出たが，これはつぎのような事実を考慮したからである．すなわち，dz についての積分は 0 から z_1 まで行なわれた．しかし方位角 φ が 0 から π までと，π から 2π まで変化するとき，z のおのおのの値は 2 回出てくるからである．

dz についての積分は公式 (90.14) を使って行なわれ，$\nu' = -\nu$ (およびそれに対応して $F(z)$ が実関数) のとき

$$\frac{F^2}{1-z^2}+\frac{z}{\nu}F'^2 = \frac{1}{\nu^2}\frac{d}{dz}(zFF').$$

この式の積分は $z_1F(z_1)F'(z_1)/\nu^2$ となる．$z_1F(z_1) \approx F(1)$ の値は (93.17) から取る．また $F'(z_1 \to 1)$ の極限値は公式

$$\frac{1}{\nu^2}F'(z) = F(1-i\nu, 1+i\nu, 2, z) \approx -[\ln(1-z)+2f(\nu)]\frac{\sinh \pi\nu}{\pi\nu}$$

によって与えられる[1]. ここで

$$f(\nu)=\frac{1}{2}[\Psi(1+i\nu)+\Psi(1-i\nu)-2\Psi(1)]=\nu^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n^2+\nu^2)}, \qquad (93.19)$$

$$\Psi(z)=\Gamma'(z)/\Gamma(z).$$

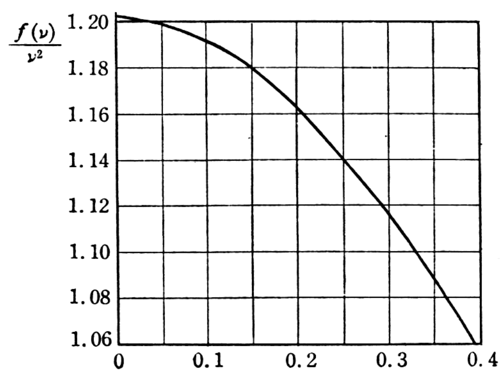
求められたすべての式を (93.18) に代入して，つぎのような最終的な公式を得る．

$$d\sigma_{\varepsilon_+}=4Z^2\alpha r_e^2\left(\varepsilon_+^2+\varepsilon_-^2+\frac{2}{3}\varepsilon_+\varepsilon_-\right)\left[\ln\frac{2\varepsilon_+\varepsilon_-}{m\omega}-\frac{1}{2}-f(\alpha Z)\right]\frac{d\varepsilon_+}{\omega^3}. \qquad (93.20)$$

エネルギー ω の光子による対生成の全断面積は

$$\sigma=\frac{28}{9}Z^2\alpha r_e^2\left[\ln\frac{2\omega}{m}-\frac{109}{42}-f(\alpha Z)\right]. \qquad (93.21)$$

われわれはこれらの公式のなかで，変化は原子番号の普遍的関数 $f(\alpha Z)$ の対数からの引き算に帰することがわかる．第17図にはこの関数の図が与えられている．$\nu\ll 1$ では $f(\nu)\approx 1.2\nu^2$ である．



第 17 図

最後に，制動輻射について簡単に触れよう．この過程の行列要素 M_{fi} は

$$M_{fi}^{\text{制}}=\int\psi_{\varepsilon'\boldsymbol{p}'}^{(-)*}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{e}^*)e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}\psi_{\varepsilon\boldsymbol{p}}^{(+)}d^3x \qquad (93.22)$$

である．始めと終りの電子の波動関数は，その漸近形にそれぞれ発散および収束球面波を含んでいる．この積分の計算は行列要素 (93.2) の計算とまったく似ている．われわれはここで最終的な結果だけを導こう[2]．

---

1) これらの公式の導き方は論文 H. Davies, H. A. Bethe, L. C. Maximon, *Phys. Rev.* **93**, 788 (1954) の付録にある．

2) 正確な波動関数（すなわち超相対論的な場合に移る前の）を使った行列要素は，対生成の行列要素 (93.2) と普通の交叉変換だけの違いである．しかしながら超相対論的な場合には，このような変換をすることはできない．これはわれわれが用いた超相対論的波動関数の形からも明らかである．すなわち，関数 (39.10) から≪負エネルギーの≫正しい関数を得るためには，置き換え $\boldsymbol{p},\varepsilon\longrightarrow-\boldsymbol{p},-\varepsilon$ では不十分↗

輻射の微分断面積は，そのボルン近似 $d\sigma_{\text{ボ}}$ (91.13) と共通因子だけが異なっている．すなわち

$$d\sigma = d\sigma_{\text{ボ}} \frac{1}{F^2(1)}\left[F^2(z)+\frac{(1-z)^2}{\nu^2}F'^2(z)\right]. \tag{93.23}$$

ここで $F(z)$ は超幾何関数 (93.15) と同じであり

$$z = 1-\frac{m^4\omega^2}{4q^2\varepsilon^2\varepsilon'^2}(1+\delta^2)(1+\delta'^2), \quad \delta=\frac{\theta\varepsilon}{m}, \quad \delta'=\frac{\theta'\varepsilon'}{m} \tag{93.24}$$

である．$q \gg m^2/\varepsilon$ のとき $z\approx 1$ である．そして (93.23) の $d\sigma_{\text{ボ}}$ にかかるすべての因子は1になる．このようにして，正確な理論の角度分布は，ほとんどすべての角度領域でボルン近似と比較して変わりがない．

(角度について)積分された輻射断面積を見いだすためには，つぎのような考察から明らかなように，ふたたび新たな積分をする必要はない (H. Olsen, 1955)．(エネルギー ε' が与えられたとき) $\boldsymbol{p}'$ の種々の方向は，電子の終状態の縮退に対応する．一つの縮退した準位に属する状態についての和の結果は，これらの状態の組をどのように選ぶかには依存しないことは明らかである．したがって，われわれは $\boldsymbol{p}'$ の方向についての和をとる目的のために，(微分断面積の計算に必要な) $\psi^{(-)}_{\varepsilon'\boldsymbol{p}'}$ の組の代りに，関数 $\psi^{(+)}_{\varepsilon'\boldsymbol{p}'}$ の組を使うことにしよう．すなわち制動輻射の行列要素を

$$M^{\text{制}}_{fi} = \int \psi^{(+)*}_{\varepsilon'\boldsymbol{p}'}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{e}^*)e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}\psi^{(+)}_{\varepsilon\boldsymbol{p}}\,d^3x$$

のように定義しよう．この積分は，積分 $(M^{\text{対}}_{fi})^*$ と一致することを容易に証明できる．それには後者のなかで波動関数のパラメータを

$$\boldsymbol{p}_+, p_+, \varepsilon_+ \to -\boldsymbol{p}, -p, -\varepsilon, \quad \boldsymbol{p}_-, p_-, \varepsilon_- \to \boldsymbol{p}', p', \varepsilon', \quad \boldsymbol{k}\to -\boldsymbol{k}$$

にしたがって置き換え (そしてまた積分変数を $\boldsymbol{r}\to-\boldsymbol{r}$ の置き換え) をすればよい．

これから明らかに，制動輻射の積分 (角度について) 断面積は対生成の積分断面積から，後者に

$$\frac{\omega^2}{p_+^2}\frac{d\omega}{d\varepsilon_+} \approx \frac{\omega^2}{\varepsilon_+^2}\frac{d\omega}{d\varepsilon_+}$$

↘である．それは正確な波動関数では $iZ\alpha p/\varepsilon$ に等しい，超幾何関数の1番目の引数 $iZ\alpha$ の符号を変える必要があるからである．

行列要素(93.22)の詳細のいくつかは，原論文 H. A. Bethe, L. Maximon, *Phys. Rev.* **93**, 768 (1954) に与えられている．

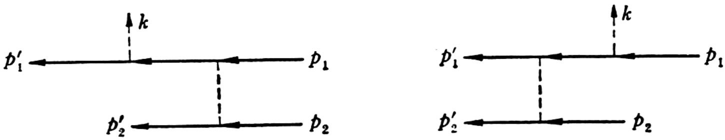
を掛けて ((§2 2) 参照)，$\varepsilon_+ \to -\varepsilon$, $\varepsilon_- \to \varepsilon'$ の置き換えをすることによって求められる．このようにして

$$d\sigma = 4Z^2\alpha r_e^2 \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}+\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}-\frac{2}{3}\right)\left[\ln\frac{2\varepsilon\varepsilon'}{m\omega}-\frac{1}{2}-f(\alpha Z)\right]\frac{d\omega}{\omega}. \qquad (93.25)$$

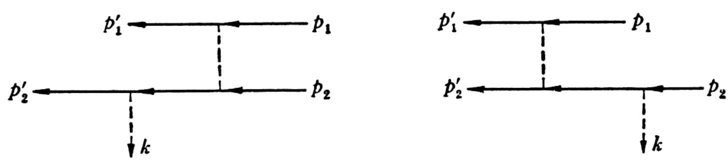
制動輻射および対生成の積分断面積に対するボルンの公式の補正は，同一の関数 $f(\alpha Z)$ によって与えられることがわかる．

§94. 超相対論的な場合の電子による電子の制動輻射

電子による電子の制動輻射は，8個のファインマン図形によって記述される．すなわち4個の図形と，描かれたものから p_1' と p_2' の交換によって得られる4個の《交換》図形である．われわれはここで超相対論的な場合に対する計算の結果を紹介しよう[1]．



(94.1 a)



(94.1 b)

実験室系（始めの電子のなかの一つ，たとえば2番目の静止系）では，光子の方向について積分された輻射断面積は $d\sigma = d\sigma^{(1)}+d\sigma^{(2)}$ の和の形に表わされる．ここで

$$d\sigma^{(1)} = 4\alpha r_e^2 \frac{d\omega}{\omega}\,\frac{\varepsilon-\omega}{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon-\omega}+\frac{\varepsilon-\omega}{\varepsilon}-\frac{2}{3}\right)\left(\ln\frac{2\varepsilon(\varepsilon-\omega)}{m\omega}-\frac{1}{2}\right), \qquad (94.2)$$

$$d\sigma^{(2)} = \frac{2}{3}\alpha r_e^2 \frac{m\,d\omega}{\omega^2}\left\{\left(4-\frac{m}{\omega}+\frac{m^2}{4\omega^2}\right)\ln\frac{2\varepsilon}{m}-2+\frac{2m}{\omega}-\frac{5m^2}{8\omega^2}\right\} \quad \left(\omega \geqslant \frac{m}{2}\right), \qquad (94.3)$$

---

1) これらの結果は，つぎの論文のなかで求められている：В. Н. Байер, В. М. Галицкий, ЖЭТФ **49**, 661 (1965)；В. Н. Байер, В. С. Фадин, В. А. Хозе, ЖЭТФ **51**, 1135 (1966)；**53**, 2194 (1967)．これらの論文では，不変変数の導入に基づいた微分断面積の計算法に注目する必要がある．これらの方法の利用は計算を非常に簡単化した．

$$d\sigma^{(2)}=\frac{2}{3}\alpha r_e^2\frac{d\omega}{\omega}\left\{8\left(1-\frac{\omega}{m}+\frac{\omega^2}{m^2}\right)\ln\frac{\varepsilon}{\omega}\right.$$
$$-\left(1-\frac{2\omega}{m}\right)\ln\left(1-\frac{2\omega}{m}\right)\left[\frac{m^3}{4\omega^3}-\frac{m^2}{2\omega^2}+\frac{3m}{\omega}-2+\frac{4\omega}{m}\right]$$
$$\left.-\frac{m^2}{2\omega^2}+\frac{3m}{2\omega}-2+\frac{2\omega}{m}-\frac{4\omega^2}{m^2}\right\}\qquad\left(\omega\leqslant\frac{m}{2}\right)\tag{94.4}$$

(ε は1番目の電子の始めのエネルギーである).

この公式の精度は相対的に m/ε の程度である．この精度では，種々の図形からの断面積への寄与は互いに干渉しないことがわかる．そしてこの意味で $d\sigma^{(1)}$ と $d\sigma^{(2)}$ は2電子のおのおのからの，すなわち速い電子と反跳電子（図形 (94.1 a) および (94.1 b)）からの輻射に対応する．

交換型の図形は《直接の》図形と同じ寄与を断面積に与える．電子の同一性のために，直接型および交換型の図形の合計の寄与は2で割る必要がある．したがって，粒子の同等性は考えずに直接型の図形の寄与だけを考えればよい．電子と陽電子との衝突に対して，交換型の代りに消滅型の図形が現われる．しかしながら，その寄与は相対的に m/ε の程度であるから無視しよう．したがって上記の精度では，電子と電子の，および電子と陽電子の衝突の制動輻射の断面積は同じである．

$\omega\gg m$ のとき，比

$$\frac{d\sigma^{(2)}}{d\sigma^{(1)}}\sim\frac{m}{\omega}\ll 1$$

である．すなわち，反跳電子による輻射は速い電子による輻射にくらべて小さい（この比が m/ε の程度に達するときには，公式 (94.3) はもちろん意味を失う）．逆に $\omega\ll m$ のときは，断面積の両方の部分はほとんど同程度である．すなわち

$$d\sigma^{(1)}=\frac{16}{3}\alpha r_e^2\frac{d\omega}{\omega}\ln\frac{2\varepsilon^2}{m\omega},\quad d\sigma^{(2)}=\frac{16}{3}\alpha r_e^2\frac{d\omega}{\omega}\ln\frac{\varepsilon}{\omega},\quad \omega\ll m.\tag{94.5}$$

公式 (94.2)～(94.5) が成立するためには，電子中のたとえ一つでも輻射後に超相対論的である必要がある．言いかえると，光子の振動数はスペクトルの硬端，すなわち輻射されうる最大の振動数 $\omega_{\max}$ から十分に離れる必要がある．両電子が衝突後光子の方向に運動し，同一速度を持つときに，電子の終りのエネルギーは極小となり，光子のエネルギーは極大となる．このとき，保存則から

$$\varepsilon+m=\omega_{\max}+2\varepsilon',\quad |\boldsymbol{p}|=\omega_{\max}+2|\boldsymbol{p}'|.$$

ここから ε' と $\boldsymbol{p}'$ を消去して

$$(\varepsilon+m-\omega_{\max})^2-(|\boldsymbol{p}|-\omega_{\max})^2 = 4m^2.$$

これから

$$\omega_{\max} = \frac{m(\varepsilon-m)}{m+\varepsilon-|\boldsymbol{p}|}. \tag{94.6}$$

$\varepsilon \gg m$ のとき $\omega_{\max} \approx \varepsilon$ である．このようにして，公式 (94.2)～(94.4) は条件

$$\omega_{\max}-\omega \sim \varepsilon-\omega \gg m \tag{94.7}$$

のときに成立する．

速い電子による輻射断面積 (94.2) は，$Z=1$ の原子核での電子の輻射断面積（公式 (91.17)) と正確に一致する．この一致は偶然ではない．その原因は輻射過程における反跳の役割の解析から明らかにできる．

公式 (91.17) を導くにあたって，われわれは動かない粒子（原子核）の反跳を無視した．すなわちそれを定外場に置き換えた．これは 4-運動量の転移 $q=p'-p+k$ の時間成分（反跳エネルギー）を無視したことになる．超相対論的な場合には，このような無視は原子核ばかりでなく，電子での電子による輻射の際にも許される．

$$-q^2 = -(\varepsilon'+\omega-\varepsilon)^2+(p'_{\parallel}+\omega-p_{\parallel})^2+(\boldsymbol{p}'_{\perp}-\boldsymbol{p}_{\perp})^2 \tag{94.8}$$

の形に q^2 を書こう．ここで下の添字は（電子の始めおよび終りの運動量の）ベクトル $\boldsymbol{p}'$ および $\boldsymbol{p}$ の，光子 $\boldsymbol{k}$ の方向に平行および垂直な成分を示している．超相対論的な場合には，($\boldsymbol{k}$ とそれぞれ $\boldsymbol{p}$ および $\boldsymbol{p}'$ のあいだの）角度 θ および θ' は小さい．すなわち $\theta \lesssim m/\varepsilon$, $\theta' \lesssim m/\varepsilon'$ である．したがって

$$|\boldsymbol{p}_{\perp}| \sim |\boldsymbol{p}|\theta \sim m,$$
$$p_{\parallel} \approx |\boldsymbol{p}|-\frac{\boldsymbol{p}_{\perp}^2}{2|\boldsymbol{p}|} \approx \varepsilon-\frac{m^2}{2\varepsilon}-\frac{\boldsymbol{p}_{\perp}^2}{2\varepsilon}. \tag{94.9}$$

および $\boldsymbol{p}'_{\perp}$, $p'_{\parallel}$ に対しても同様な式が成り立つ．

反跳を考慮しないと，$\varepsilon'+\omega-\varepsilon=0$ である．差 $p'_{\parallel}+\omega-p_{\parallel} \sim m^2/\varepsilon$ である．したがって

$$-q^2 \approx (\boldsymbol{p}'_{\perp}-\boldsymbol{p}_{\perp})^2 \sim m^2. \tag{94.10}$$

（電子の）反跳エネルギーは

$$q_0 = \varepsilon'+\omega-\varepsilon \sim \frac{q^2}{2m} \sim m. \tag{94.11}$$

ε' の変化による $\boldsymbol{p}'_\perp$ の変化は無視できる．したがって，(94.8) の始めの2項が反跳を考察した際の q^2 の変化を与える．これを Δq^2 で表わそう．(94.9) を使って

$$\Delta q^2 \approx (\varepsilon'+\omega-\varepsilon)\left(-\frac{m^2}{\varepsilon'}-\frac{\boldsymbol{p}'^2_\perp}{\varepsilon'}+\frac{m^2}{\varepsilon}+\frac{\boldsymbol{p}^2_\perp}{\varepsilon}\right) \sim m^2\frac{m}{\varepsilon}.$$

(94.10) と比較して，$\Delta q^2 \ll |q^2|$ であることがわかる．これによって反跳の無視が正当化される[1]．

速い粒子はその運動方向の（頂角 $\sim m/\varepsilon$ の）鋭い円錐内に輻射する事実は，実験室系から断面積 (94.2) の単なる換算によって，重心系での輻射断面積を得ることを可能にしている[2]．

両電子の重心系ではそのおのおのの運動方向に同様に輻射をする[3]．重心系での超相対論的電子のエネルギー E は，実験室系でのそのエネルギー ε と関係式 $2E^2 = m\varepsilon$ により，またこれらの系における光子の振動数 Ω および ω は関係式 $\omega/\varepsilon = \Omega/E$ により結ばれる（これらの等式は両方の系で不変量 (p_1p_2) および (p_1k) をくらべることによって容易に得られる）．したがって，重心系で電子のおのおのの輻射断面積に対して

$$d\sigma^{(1)} = d\sigma^{(2)}$$
$$= 4\alpha r_e^2\frac{d\Omega}{\Omega}\frac{E-\Omega}{E}\left(\frac{E}{E-\Omega}+\frac{E-\Omega}{E}-\frac{2}{3}\right)\left(\ln\frac{4E^2(E-\Omega)}{m^2\Omega}-\frac{1}{2}\right) \qquad (94.12)$$

を得る (G. Altarelli, F. Buccella, 1964)．

(94.12) が適用可能のためには，光子の振動数がスペクトル端に接近しないことが必要である．超相対論的粒子に対しては，上記の変換はただちに $\omega_{\max} \approx \varepsilon$ から

$$\Omega_{\max} \approx \omega_{\max}\frac{E}{\varepsilon} \approx E \qquad (94.13)$$

を与える．このようにして，重心系で電子はその全エネルギー $2E$ の半分だけを輻射することができる．このような光子を輻射したのち電子は（同じ系で）光子と同じ速度で，光

---

1) この結論はもちろん，原子核での電子による輻射に対して，より一層正しい．そこでは反跳エネルギーは $q_0 \approx q^2/2M \sim m^2/M$ だからである．ここで M は原子核の質量である．

2) 一般の場合には，このような換算は不可能である．なぜかというと，与えられた振動数区間 $d\omega$ のなかのスペクトルへの寄与は，まったく別の方向へ輻射された光子からきているからである．

3) この事情は，両粒子の輻射のあいだに干渉がないことの原因を，はっきりさせていることを指摘しよう．

子の方向と逆方向に動くことに注意すれば，$\Omega_{\max}$ の直接の計算は容易に行なうことができる．

$$2E = 2E' + \Omega_{\max}, \quad 2|\boldsymbol{p}'| = \Omega_{\max}.$$

これから

$$\Omega_{\max} = \frac{\boldsymbol{p}^2}{E} = E - \frac{m^2}{E} \tag{94.14}$$

であり，超相対論的な場合にはふたたび (94.13) となる．このようにして，公式 (94.12) は条件

$$\Omega_{\max} - \Omega \sim E - \Omega \gg m \tag{94.15}$$

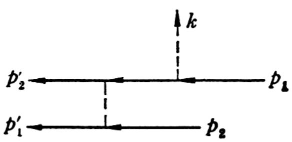
のときに適用可能である．

今度はスペクトル端に近い，すなわち[1]

$$\Omega_{\max} - \Omega \ll m. \tag{94.16}$$

のような反対の場合に，重心系で輻射の公式を導こう．この場合には，反跳が非常に重要になってくるので，結果は動かない中心による散乱の場合と異なり，電子－電子および電子－陽電子散乱に対して異なることがわかる．

電子による電子の散乱のときには，スペクトル端近くの輻射断面積へ，図形 (94.1) の平方のほかに直接型とそれと同じ始めの粒子が輻射をする交換型の図形との積（干渉項）もまた寄与をする．たとえば図形 (94.1 a) の二番目と，図形



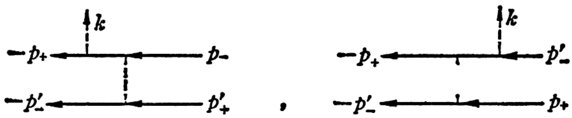
との積である．これは端の近くでは，終りの粒子は近い運動量を持ち，交換項が小さくなる原因がなくなることと関連している．断面積に対する最終的な答は

$$d\sigma = 2\alpha r_e^2 \frac{[E(\Omega_{\max} - \Omega)]^{1/2}}{m} \frac{d\Omega}{\Omega_{\max}}. \tag{94.17}$$

---

1) もちろん，普通のように，ボルン近似で得られた結果は，終りの電子の相対速度が α にくらべて大きい限りは役に立つ．逆の場合には終状態にある粒子間の相互作用を考慮する必要がある．

陽電子による電子の散乱では，始めの粒子が輻射するような消滅型の図形，すなわち



(94.18)

の平方が輻射断面積に対して，対数的に大きい寄与をもたらす．また非対数型の精度ではまた，他の図形の平方が重要である．干渉項は小さい．最終的な答は

$$d\sigma = 2\alpha r_e^2 \frac{[E(\Omega_{\max}-\Omega)]^{1/2}}{m}\left(\ln\frac{2E}{m}+1\right)\frac{d\Omega}{\Omega_{\max}}. \tag{94.19}$$

このようにして，電子－陽電子散乱のときの輻射は，電子－電子散乱のときの輻射にくらべて対数的に大きい．

§95. 衝突の際の軟光子の輻射

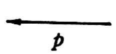
一定数の輻射を伴う荷電粒子の，ある散乱過程の断面積を $d\sigma_0$ としよう．この過程と並んで，1個の追加光子の放出だけがこれと異なる他の過程も考察しよう．この光子の振動数 ω が（この先で定式化される条件に対応するように）十分に小さいとすれば，第2の過程の断面積は，$d\sigma_0$ と簡単な形で結ばれる．

実際に，ω が小さいときには，この量子放出の散乱過程への逆の影響を無視できる．言いかえれば，断面積 $d\sigma$ は，二つの独立な因子の積の形に表わすことができる．すなわち $d\sigma_0$ と衝突の際に1個の光子を放出する確率 dw とである．軟光子の放出は準古典的な過程である．したがって，その確率は衝突の際に放出される量子の，古典的に計算された数と一致する．すなわち，輻射の（全エネルギーの）古典的強度を ω（$=\hbar\omega$）で割ったものと一致する．このようにして

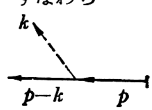
$$d\sigma = d\sigma_0 \frac{dI}{\omega}. \tag{95.1}$$

図形手法の一般則によって，どのようにしてこの式が得られるかを示そう（J. M. Jauch, F. Rohrlich, 1954）.

光子が追加される過程の図形はもとの図形から，（外あるいは内の）電子線のどれかから≪分岐した≫外光子線を付け加えることにより，すなわち



を



(95.2)

に置き換えることによって得られる．外電子線に対するこのような置き換えによって得られる図形が，基本的な役割をすることが容易にわかる．事実，もしも p が外線の運動量であるとすると ($p^2=m^2$)，k が小さいときはまた $(p-k)^2\approx m^2$ である．すなわち，図形に付け加えられる因子 $G(p-k)$ はその極の近くにあるはずである．

始めの電子線 p に対して，置き換え (95.2) は反応振幅の中の置き換えになる．

$$u(p)\longrightarrow e\sqrt{4\pi}\,G(p-k)\hat{e}^*u(p)=e\sqrt{4\pi}\,\frac{\hat{p}-\hat{k}+m}{(p-k)^2-m^2}\hat{e}^*u(p)$$

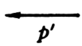
$$\approx -e\sqrt{4\pi}\,\frac{\hat{p}+m}{2(pk)}\hat{e}^*u(p)$$

(最初の因子 e は電荷である)．

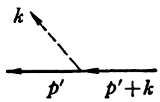
$\hat{p}\hat{e}^*=2pe^*-\hat{e}^*\hat{p}$ であり，$\hat{p}u(p)=mu(p)$ であることに注意して

$$u(p)\longrightarrow -e\sqrt{4\pi}\,\frac{(pe^*)}{(pk)}u(p) \tag{95.3}$$

の形の置き換えの規則を得る．同様に終りの電子線 p' に対し図形



を



の置き換えは，振幅の中の置き換え

$$\bar{u}(p')\longrightarrow e\sqrt{4\pi}\,\bar{u}(p')\frac{(p'e^*)}{(p'k)} \tag{95.4}$$

に対応する．図形の残りの部分では，一般に，光子 k の放出に伴う線の運動量の変化を無視できる．このとき，光子のエネルギー ω は反応に参加するすべての粒子のエネルギーにくらべて（放出される硬光子がもし存在すれば，そのエネルギーにくらべることも含めて）小さいものと考えることにする．

わかりやすくするために断面積 $d\sigma_0$ は動かない原子核による（硬光子の輻射の可能性を持った）電子の散乱に関するものとしよう．この過程の振幅は

$$M_{fi}^{(0)}=\bar{u}(p')\mathrm{M}u(p)$$

の形をしている．このなかで置き換え (95.3) を1回，そして (95.4) を1回行なって，硬光子および1個の軟光子 k の制動輻射の振幅を得る[1]．

---

1) この式のなかに差が現われるのはゲージ不変性，すなわち，反応振幅は偏りの 4-ベクトルの置き換え $e\longrightarrow e+\mathrm{const}\cdot k$ に対して，変わってはいけないことの自然の結果である．

$$M_{fi}=M_{fi}^{(0)}e\sqrt{4\pi}\left(\frac{p'e^*}{p'k}-\frac{pe^*}{pk}\right). \tag{95.5}$$

これにしたがって断面積は

$$d\sigma=d\sigma_0\cdot 4\pi e^2\left|\frac{p'e}{p'k}-\frac{pe}{pk}\right|^2\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega}. \tag{95.6}$$

光子 k の偏りについて加えて

$$d\sigma=-e^2\left(\frac{p'}{(p'k)}-\frac{p}{(pk)}\right)^2\frac{d^3k}{4\pi^2\omega}d\sigma_0. \tag{95.7}$$

3次元の量で表わして，この式は

$$d\sigma=\alpha\left(\frac{[\boldsymbol{v}'\boldsymbol{n}]}{1-\boldsymbol{v}'\boldsymbol{n}}-\frac{[\boldsymbol{v}\boldsymbol{n}]}{1-\boldsymbol{v}\boldsymbol{n}}\right)^2\frac{d\omega\, do_{\boldsymbol{k}}}{4\pi^2\omega}d\sigma_0 \tag{95.8}$$

の形になる[1]，ここで $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{k}/\omega$ で，$\boldsymbol{v}$ および $\boldsymbol{v}'$ は電子の始めと終りの速度である．$d\sigma_0$ の前にある式は，実際に公式 (95.1) で主張したように，古典的輻射強度（II (69.4) を見よ）と一致することがわかる．

得られた公式の適用可能の条件は，原子核への反跳運動量 $\boldsymbol{q}$ が，軟光子の放出に結びついた運動量の変化 $\delta\boldsymbol{q}$ とくらべて大きいことを要求する．

$$\delta\boldsymbol{q}=(\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k})-(\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p})|_{\omega=0}=\delta\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{k}$$

が成り立つ．ここで $|\delta\boldsymbol{p}'|\sim\dfrac{\partial|\boldsymbol{p}'|}{\partial\varepsilon}\omega\sim\dfrac{\omega}{v}$ で，$|\boldsymbol{k}|=\omega$ である．したがって，非相対論的な場合（$v\ll 1$）には，つぎの条件を得る．

$$\frac{\omega}{|\boldsymbol{q}|v}\ll 1. \tag{95.9}$$

一方 $|\boldsymbol{q}|\sim 1/\rho$ (ρ は衝突径数) であるから，この条件は $\omega\tau\ll 1$ の形に表わすことができる．ここで $\tau\sim\rho/v$ は衝突の固有時間である．

超相対論的な場合には，光子は主として ((95.8) の分母からわかるように) $\boldsymbol{v}$ あるいは $\boldsymbol{v}'$ の近くの方向に輻射される．もしも電子の散乱角 θ が小さければ，すべての三つのベクトル $\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}',\boldsymbol{n}$ は互いに接近している．このとき

$$|\delta\boldsymbol{q}|=|\delta\boldsymbol{p}'|-|\boldsymbol{k}|=\omega\left(\frac{1}{v}-1\right)\sim\frac{\omega m^2}{\varepsilon^2}$$

となる．そして $|\boldsymbol{q}|\sim\varepsilon\theta$ であるからつぎの条件を得る．

---

1)　これを導くためには (95.6) にもどって，$p=(\varepsilon,\varepsilon\boldsymbol{v})$，$pk=\varepsilon\omega(1-\boldsymbol{v}\boldsymbol{n}),\cdots\cdots$，$e=(0,\boldsymbol{e})$ と置く．そして (45.4a) を使ってふたたび偏りについての和を行なう．

$$\theta \gg \frac{\omega}{\varepsilon}\frac{m^2}{\varepsilon^2}. \tag{95.10}$$

公式 (95.5)～(95.8) の準古典的な性質から，これは任意の荷電粒子（電子に対して結論したが，必ずしも電子に限らない）に対して成り立つ．このように粒子のいくつかが反応に参加する一般の場合に，公式 (95.5) は

$$M_{fi} = M_{fi}^{(0)} e\sqrt{4\pi}\sum Z\left(\frac{p'e^*}{p'k}-\frac{pe^*}{pk}\right) \tag{95.11}$$

の形に書かれる．ここで和は（電荷 Ze を持つ）すべての粒子について行なわれ，公式 (95.6)～(95.8) を対応する形に変形する．

特に非相対論的な場合には

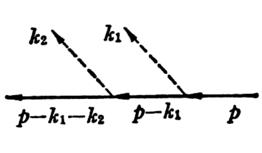
$$M_{fi} = M_{fi}^{(0)} \frac{e\sqrt{4\pi}}{\omega}\sum Z(v'-v)e^*. \tag{95.12}$$

2粒子に対してこの公式は

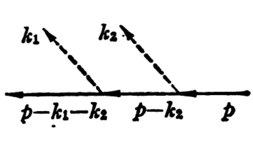
$$M_{fi} = M_{fi}^{(0)}\frac{\sqrt{4\pi}}{\omega}\left(\frac{Z_1 e}{m_1}-\frac{Z_2 e}{m_2}\right)q e^*, \qquad q = m(v'-v), \quad m = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \tag{95.13}$$

の形をとる．ここで v および v' は衝突の前後の粒子の速度である．

得られた結果は，同時に何個かの軟光子を放出する場合に一般化される．各光子に対して振幅 M_{fi} のなかに，(95.5) のなかの $M_{fi}^{(0)}$ についたのと同じ形の因子が付け加えられる．たとえば2光子を例として，直接にこのことを確かめることが容易にできる．両方の放出される光子線が，電子の外線に付け加えられる．このとき二つの異なる順序で，すなわち外線 p の図形は



または



を持つ図形に変えられる．これらのおのおのは因子（電子の伝播関数の分母）

$$\frac{1}{2(pk_1+pk_2)}\frac{1}{2pk_1} \quad \text{あるいは} \quad \frac{1}{2(pk_1+pk_2)}\frac{1}{2pk_2}$$

を含んでいる．これらの和は

$$\frac{1}{2pk_1}\frac{1}{2pk_2}$$

に等しい，すなわち1番目と2番目の光子に対応する独立因子の積を含んでいる．このあと，和のなかで項のすべての図形は（ゲージ不変性のために）差の積

$$\left(\frac{p'e_1^*}{p'k_1}-\frac{pe_1^*}{pk_1}\right)\left(\frac{p'e_2^*}{p'k_2}-\frac{pe_2^*}{pk_2}\right)$$

の形に集められる．

振幅の因数分解に対応して，この過程の断面積もまた分解される．このようにして，軟光子は独立に放出される．n 個の軟光子の放出を伴う過程の断面積は

$$d\sigma = d\sigma_0 dw_1 \cdots dw_n \tag{95.14}$$

の形に表わされる．ここで dw_1，dw_2，…… は光子 k_1, k_2，…… 個々の放出の確率である．この公式を，変数（振動数と方向）の値の有限の変域——これはすべての光子に対して同一である——について積分するときには，光子の同一性を考慮して因子 $1/n!$ を導入する必要がある．

もしも輻射断面積 (95.1) を振動数について ω_1 から ω_2 までの有限区間で積分すると

$$d\sigma \sim \alpha \ln\frac{\omega_2}{\omega_1} d\sigma_0 \tag{95.15}$$

の形の式を得る（(95.8) とくらべよ）．このときは，両方の振動数がともに小さく，ω_2 の可能な値がこの方法の適用可能の条件で制限されているものと了解されている．しかしながら，対数的精度では，$\omega_2 \sim \varepsilon$ と置くことができる．ここで ε は輻射粒子の始めのエネルギーである．ω_1 の値は一般に下からは何の制限もない．しかし $\omega_1 \to 0$ に近づけると，すべての可能な軟光子の輻射断面積は無限大になる．この立場，すなわちいわゆる**赤外破局** (F. Bloch, A. Nordsieck, 1937) の意味を明らかにしよう．

$$\alpha \ln\frac{\varepsilon}{\omega_1} \gtrsim 1 \tag{95.16}$$

のとき，$d\sigma \gtrsim d\sigma_0$ である．しかしこれは摂動論の適用不可能，すなわち $d\sigma$ を $d\sigma_0$ よりも高次の微小量として計算することが不可能なことを意味している．言いかえれば，微小量のパラメータはこの場合に α でなく積 $\alpha \ln(\varepsilon/\omega_1)$ と考える必要がある．

このようにして，公式 (95.5)～(95.8) を摂動論を基礎として導くことは，振動数が十分に小さいときには正しくないことがわかる．他方，強度 dI に対する古典式（II (69.4) は，ω が小さければ小さいほどいっそう適用可能度が大きい．したがって，もしも古典性

の大きい側でその意味を改めれば，公式 (95.1) は正しい．すなわち，(95.1) では，1個の光子が輻射されるものとする．このとき粒子から輻射へ失われるエネルギーはωと一致し，《相対的エネルギー損失の断面積》は $\omega d\sigma/\varepsilon$，あるいは

$$d\sigma_0 \frac{dI}{\varepsilon} \tag{95.17}$$

で与えられる．実際に，十分小さいωのときには輻射確率は小さい．そして2個および多数の光子の輻射確率は小さくなく，1個の光子の輻射確率より大きい．このような条件のもとで (95.17) の式は正しい．しかし古典的強度 dI は1個の光子の輻射確率を与えるのでなく，輻射される光子の平均数

$$d\bar{n} = \frac{dI}{\omega}, \tag{95.18}$$

あるいは有限の振動数領域での平均数

$$\bar{n} = \int_{\omega=\omega_1}^{\omega_2} \frac{dI}{\omega} \tag{95.19}$$

を決定する．

軟光子は統計的に独立に輻射される（これは摂動論のすべての近似に対して正しい）ので，多重輻射過程に対しては，ポアッソンの公式を適用できる．すなわち，n個の光子の輻射確率 $w(n)$ は公式

$$w(n) = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}} \tag{95.20}$$

により，平均数$\bar{n}$を使って表わされる．

光子放出を伴う散乱過程の断面積を

$$d\sigma = d\sigma_0 \cdot w(n) \tag{95.21}$$

の形に表わそう．$\sum w(n) = 1$ であるから，$d\sigma_0$ は任意の軟輻射を伴う全散乱断面積を表わしている．この事情は古典的考察から明らかである．摂動論では$d\sigma_0$は純弾性散乱の断面積である．しかしここでは摂動論は使えない．こうして，摂動論にしたがって弾性散乱の断面積として計算された$d\sigma_0$が，実際には任意の軟光子の輻射を考慮していることがわかる．純粋の弾性散乱に関して言えば，それは実際には0に等しい．すなわち $\omega_1 \to 0$ のとき平均数 $\bar{n} \to \infty$ であり，(95.20) にしたがって任意の有限個の光子の輻射確率は0になる[1]．

1) われわれは，本書の第2部で輻射による補正に関連して，この事情のより詳しい考察にたちもどろう．

問　　題[1]

1.　超相対論的電子の原子核での制動輻射の軟光子のスペクトル分布を見いだせ．

解　公式 (95.8) を $do_{\mathbf{k}}$ で積分すると

$$d\sigma = \alpha K(\xi)\frac{d\omega}{\omega}d\sigma_0 \tag{1}$$

を与える．ここで

$$K(\xi) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{2\xi^2+1}{\xi\sqrt{\xi^2+1}}\ln\left(\xi+\sqrt{\xi^2+1}\right)-1\right],\quad \xi = \frac{|\mathbf{p}|}{m}\sin\frac{\theta}{2} \tag{2}$$

($\mathbf{p}$ は電子の運動量，θ は散乱角である)．超相対論的な場合に，角度領域

$$\frac{m^2\omega}{\varepsilon^3} \ll \theta \ll \frac{m}{\varepsilon} \tag{3}$$

が基本的な役割を果たしている（下限は条件(95.10)であり，上限については以下参照)．このとき $\xi\approx\varepsilon\theta/2m\ll 1$ である．したがって

$$K(\xi)\approx\frac{8}{3\pi}\xi^2.$$

電子の原子核による弾性散乱断面積は ((81.10) 参照)

$$d\sigma_0 \approx 4Z^2 r_e^2\frac{m^2}{\varepsilon^2}\frac{do}{\theta^4}. \tag{4}$$

積分

$$d\sigma_\omega = \frac{16}{3}Z^2\alpha r_e^2\frac{d\omega}{\omega}\int\frac{d\theta}{\theta}$$

は対数的に発散する．これは，下は角度 $\theta\sim m^2\omega/\varepsilon^3$ で，上は $\xi\sim 1$，すなわち角度 $\theta\sim m/\varepsilon$ で切断される．($\xi\to\infty$ とすると

$$K\approx\frac{4}{\pi}\ln\xi$$

となり積分は収束する)．このようにして対数的精度で

$$d\sigma_\omega = \frac{16}{3}Z^2\alpha r_e^2\frac{d\omega}{\omega}\ln\frac{\varepsilon^2}{m\omega}. \tag{5}$$

これは対数的精度で公式 (91.17) と一致する（そこで $\varepsilon\approx\varepsilon'$ と置く必要がある)．非対数的精度を得ることは，準古典的領域の限界から出て初めて可能である．

---

1)　以下の公式 (95.7) の応用はヴェ・エヌ・バイエルおよびヴェ・エム・ガリツキー (1964) のものである．

2. 二つの超相対論的電子の衝突に際し，（重心系で）電子の運動量と小さい角度で，反対方向に二つの軟光子が同時に放出する断面積を決定せよ．

解 反対方向に飛んでいる光子は，別の電子によりその運動方向に放出される．同時放出の断面積は

$$d\sigma = d\sigma_0 \cdot \alpha K(\xi)\frac{d\omega_1}{\omega_1} \cdot \alpha K(\xi)\frac{d\omega_2}{\omega_2}, \quad \xi = \frac{\varepsilon}{m}\sin\frac{\theta}{2}. \qquad (6)$$

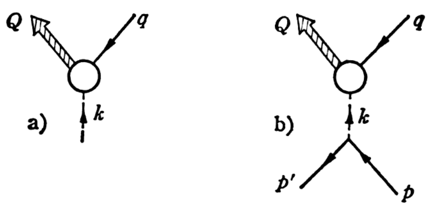
ここで ε は各電子のエネルギー，θ は重心系での散乱角で，両方の電子に対して同じである（光子はもちろん異なる方向に放出されるので，断面積に因子 1/2 を導入する必要はない）．重心系で電子の小さい角度の弾性散乱の断面積は，超相対論的な場合には（4）と一致する（(82.11) を見よ）．（1）と違って断面積（6）は $\theta\to 0$ のときに $\theta d\theta$ のようにふるまい，したがって積分は収束する．一面では，この事情は（この方法の適用可能条件を破る可能性について心配することなしに）$\theta=0$ まで積分することを許している．他面では，積分断面積への主な寄与が（$\theta \ll m/\varepsilon$ からでなく）$\theta \sim m/\varepsilon$ の領域からくるので，正確な式 (2) を使う必要がある．断面積を散乱角について積分した結果

$$d\sigma_{\omega_1\omega_2} = \frac{2}{\pi}\left[5+\frac{7}{2}\zeta(3)\right] r_e^2\alpha^2\frac{d\omega_1}{\omega_1}\frac{d\omega_2}{\omega_2} = 5.9\, r_e^2\alpha^2\frac{d\omega_1}{\omega_1}\frac{d\omega_2}{\omega_2}$$

となる（ζ はリーマン関数である，そして $\zeta(3)=1.202$ である）．

§96. 等価光子の方法

つぎの図形で記述される二つの過程を比較しよう．



(96.1)

（円は図形の内側の部分すべてを表わすものと約束する）．図形 a) は光子 k ($k^2=0$) と 4-運動量 q（および質量 m，したがって $q^2=m^2$）を持つ粒子との衝突を描いている．衝突の結果，一般的 4-運動量 Q を持つ系（粒子あるいは粒子系）が作られる．図形 b) は同じ粒子 q と 4-運動量 p，質量 M ($p^2=M^2$) の他の粒子との衝突を描いている．衝突の結果，あとの粒子は 4-運動量 p' を獲得し，同じ系 Q を形成する．2番目の過程は粒子 q と，粒子 p から放出された運動量が $k=p-p'$ ($k^2<0$) の仮想的光子との衝突と考える

ことができる．もしもこのとき $|k^2|$ が小さければ，仮想的光子は現実の光子とわずかしか異ならない．このような事情は，非常に速い粒子の衝突の際に起こりうる．すなわち，$v\approx 1$ の速度で動いている荷電粒子の電磁場は，ほとんど横波で，したがってその性質が光波中の場に近いものである．これらの条件の下で，過程 b) の断面積は過程 a) の断面積によって表わすことができる[1]．

そこで粒子 M を超相対論的，すなわちそのエネルギー (粒子 m の静止系では) が $\varepsilon\gg M$ と考えよう．もしも衝突粒子の質量 m および M が違うならば，はっきりさせるために $m<M$ と考えることにしよう．

(現実の光子が加わる) 過程 a) の振幅は

$$M_{fi}^{(\gamma)}=-e\sqrt{4\pi}\,(e_\mu J^\mu) \tag{96.2}$$

の形に表わせる．ここで e_μ は光子の偏りの4-ベクトル，J^μ は (円形) 図形の頂点に対応する遷移電流である．過程 b) の振幅は

$$M_{fi}=Ze^2\frac{4\pi}{k^2}(j_\mu J^\mu). \tag{96.3}$$

ここで j_μ は (図形の上の頂点の) 粒子 m の遷移電流である．Ze はこの粒子の電荷である．電流 J は $k=Q-q$ の関数である．したがって両方の場合で異なっている．すなわち (96.2) では $k^2=0$ で，(96.3) では $k^2\neq 0$ だからである．しかし2番目の場合に

$$|k^2|\ll m^2 \tag{96.4}$$

であれば，ここでは $k^2=0$ のときの J をとることができる．

仮想的光子放出の際の，粒子 M の運動量の変化，$\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'=\boldsymbol{k}$ は，始めの運動量 $|\boldsymbol{p}|\approx\varepsilon$ にくらべると小さい．したがって，遷移電流 j 中では $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}'$ と置くことができる．言いかえれば，粒子 M の運動を等速直線であるとみなすわけである．このような運動は準古典的なので，対応する電流は粒子のスピンに依存しない[2]．すなわち

$$j^\mu=2p^\mu. \tag{96.5}$$

---

1) 以下に述べる方法は，ワイゼッカーおよびウィリアムズが作った (K. Weizsäcker, E. J. Williams, 1934). この方法の基本的な考え方はさらに早くフェルミによって述べられている (E. Fermi, 1932).

2) 波動関数を単位体積に1粒子で規格化するとき，電流は $j^\mu=(1,\boldsymbol{v})$ である．ここで $\boldsymbol{v}$ は速度である．しかしわれわれは (§65) 波動関数のなかで規格化因子 $1/\sqrt{2\varepsilon}$ を落とすように約束した．これに対応して j^μ のなかでも付加的因子 2ε を導入する必要がある．そしてわれわれは (96.5) 式に到達する．

電流の横波条件 ($jk=0$) は，今は $\varepsilon\omega-p_xk_x=0$ になる．ここで x 軸は $\boldsymbol{p}$ の方向に選んだ．これから

$$\omega=vk_x. \tag{96.6}$$

ここで $v=p_x/\varepsilon$ は粒子 M の速度である．

$$-k^2=-\omega^2+k_x^2+\boldsymbol{k}_\perp^2\approx\omega^2(1-v^2)+\boldsymbol{k}_\perp^2 \tag{96.7}$$

($\boldsymbol{k}_\perp$ はベクトル $\boldsymbol{k}$ の x 軸に垂直な成分) であるから，条件 (96.4) は不等式 $|\boldsymbol{k}_\perp|\ll m$ および ω に対して非常に弱い不等式，すなわち $\omega\ll m/\sqrt{1-v^2}$ と同値である．

さらに，電流 J の横波条件 ($Jk=0$) から (96.6) を利用して

$$J_0=\frac{J_x}{v}+\frac{\boldsymbol{J}_\perp\boldsymbol{k}_\perp}{\omega}.$$

したがってスカラー積 jJ に対しては

$$jJ=2(J_0\varepsilon-J_xp_x)\approx2\frac{\varepsilon}{\omega}\left(\boldsymbol{k}_\perp\boldsymbol{J}_\perp+\frac{\omega M^2}{\varepsilon^2}J_x\right). \tag{96.8}$$

現実の光子の偏りの4-ベクトルを3次元横波ゲージを選んで，(96.2)のなかの積 Je を展開しよう．すなわち $ek=-\boldsymbol{ek}=0$ であり，これから $e_x\approx-\boldsymbol{e}_\perp\boldsymbol{k}_\perp/\omega$ となる．このとき

$$Je=-\boldsymbol{e}_\perp\left(\boldsymbol{J}_\perp-\frac{\boldsymbol{k}_\perp}{\omega}J_x\right). \tag{96.9}$$

式 (96.8) と (96.9) を比較しよう．もしも括弧中の第2項も無視できれば，これらは互いに比例することがわかる．電流 J は図形(96.1b)の上の頂点に関するものであるから，$\boldsymbol{p}$ の方向には関係しない．したがって，J_x および $\boldsymbol{J}_\perp$ は同じ程度の大きさと考える必要がある．上記の無視が許されるためには，したがって条件 $|\boldsymbol{k}_\perp|\ll\omega$ および $\omega\ll\varepsilon^2|\boldsymbol{k}_\perp|/M^2$ が守られることが要求される．これらの条件はすでに $\boldsymbol{k}_\perp$ および ω に課されている前出の条件とは矛盾しない．

(96.9) では光子は $x,\boldsymbol{k}$ 面内に偏っている (したがって $\boldsymbol{e}_\perp\|\boldsymbol{k}_\perp$ である) と考え，横波条件のために $\boldsymbol{e}_\perp^2\approx\boldsymbol{e}^2=1$ であることに注意して

$$M_{fi}=M_{fi}^{(\gamma)}\frac{Ze\sqrt{4\pi}}{-k^2}\frac{2\varepsilon}{\omega}|\boldsymbol{k}_\perp|. \tag{96.10}$$

ここで上に述べたことにしたがって，条件

$$|\boldsymbol{k}_\perp|\ll\omega\ll m\gamma, \tag{96.11}$$

$$\frac{\omega}{\gamma^2} \ll |\boldsymbol{k}_\perp| \ll m \tag{96.12}$$

が満たされると仮定される．ここで簡単のためにつぎのように置いた．

$$\gamma = \frac{\varepsilon}{M} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}.$$

これから対応する断面積間の関係を見いだすことができる．一般公式 (65.18) にしたがって（粒子 m の静止系で）

$$d\sigma_\gamma = |M_{fi}^{(\gamma)}|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)} (P_f - P_i) \frac{1}{4m\omega} d\rho_Q,$$

$$d\sigma = |M_{fi}|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)} (P_f - P_i) \frac{1}{4m\varepsilon} \frac{d^3p'}{2\varepsilon(2\pi)^3} d\rho_Q.$$

ここで $d\rho_Q$ は粒子 Q の統計的重みである．(96.10) と (96.7) を使って

$$d\sigma = d\sigma_\gamma \cdot n(\boldsymbol{k}) d^3p'. \tag{96.13}$$

ここで

$$n(\boldsymbol{k}) = \frac{Z^2e^2}{\pi^2} \frac{\boldsymbol{k}_\perp^2}{\omega\left(\boldsymbol{k}_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}\right)^2}. \tag{96.14}$$

$d\sigma_\gamma$ は，現実の光子と静止粒子との衝突によって，起こされた過程 a) の断面積で，その際運動量の一定の区間に系 Q が作られることを思い起こそう．断面積 $d\sigma$ は，速い粒子（質量 M）と同じ静止粒子の衝突の際に同じ系 Q を作り，その際速い粒子は運動量 $\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'=\boldsymbol{k}$ を失い，静止粒子を $\boldsymbol{p}'$ の値の区間 d^3p' に残すような過程 b) に関するものである．(96.13) の因子 $n(\boldsymbol{k})$ は速い粒子の電磁場と同等な，光子数の（k-空間での）密度と推論することができる．

d^3p' についての積分は，$d^3k = d\omega d^2k_\perp$ についての積分と同等である．$d^2k_\perp$ についての積分を行なって，粒子系 Q の全エネルギー E が与えられた区間 $dE = d\omega$ ($E-m=\varepsilon-\varepsilon'=\omega$. ここで ε および ε' は粒子 M の始めおよび終りのエネルギーである）にくる過程の断面積を得る．$\boldsymbol{k}_\perp$ の方向についての積分は，(2π の掛け算と一緒に行なった）入射光子の偏りについての平均に対応する．そうすると

$$d\sigma = n(\omega) d\sigma_\gamma d\omega. \tag{96.15}$$

ここで

$$n(\omega) = \int n(k)\, 2\pi k_\perp\, dk_\perp = \frac{2Z^2e^2}{\pi\omega}\int \frac{k_\perp^3\, dk_\perp}{\left(k_\perp^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}\right)^2}.$$

$dk_\perp$ についての積分は $k_\perp$ の大きいところで発散する．しかしながら，発散はすべて対数的である．この事情は（述べられた方法の適用可能の限界内で）対数近似の答を得ることを可能にしている．すなわち，対数の引数だけでなく対数自身も大きいからである．このような精度では，積分の上限として $k_{\perp\max} \sim m$ ——不等式 (96.12) の上限——と置けば十分である．積分を行なって，等価光子のスペクトル分布に対して（普通の単位で）

$$n(\omega)d\omega = \frac{2}{\pi} Z^2\alpha \ln\frac{\gamma mc^2}{\hbar\omega}\frac{d\omega}{\omega}. \tag{96.16}$$

ここで使われた近似は，対数の引数の数値係数が，不定のままで残っていることを意味している．すなわち，このような係数の導入は，大きい対数に比較的小さい量（～1）を付け加えることに対応し，許されうる精度を超えることになろう．

問　　題

1. 電子による光子の散乱断面積から出発して，原子核と速い電子の衝突の際の制動輻射の断面積を求めよ．

解 衝突前の電子が静止している基準系では，この過程は，原子核の場の等価光子の電子による散乱とみなすことができる[1]．(86.10) にしたがって，電子による光子の散乱断面積は K_1 系で

$$d\sigma_{散}(\omega_1, \omega_1') = \pi r_e^2 \frac{m\, d\omega_1'}{\omega_1^2}\left[\frac{\omega_1}{\omega_1'}+\frac{\omega_1'}{\omega_1}+\left(\frac{m}{\omega_1'}-\frac{m}{\omega_1}\right)^2-2m\left(\frac{1}{\omega_1'}-\frac{1}{\omega_1}\right)\right]. \tag{1}$$

ここで ω_1 および ω_1' はこの系での光子の始めおよび終りのエネルギーである．K_1 系での制動輻射の断面積は

$$d\sigma_{輻}(\omega_1') = \int d\omega_1 \cdot n(\omega_1)\, d\sigma_{散}(\omega_1, \omega_1'). \tag{2}$$

ここで $n(\omega_1)$ は関数 (96.16) である．断面積の不変性のために，原子核が静止している K 系への移行は振動数 ω_1' の変換に帰する．K_1 および K 系での振動数 ω_1' および ω' はローレンツの公式

---

1) （原子核の静止系での）原子核での仮想的光子の散乱は，核の大きい質量のために除かれる．散乱粒子の質量が大きくなると散乱断面積は 0 になる．

$$\omega' = \gamma\omega_1'(1-v\cos\theta_1),\quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \tag{3}$$

によって結ばれている．ここで θ_1 は K_1 系の散乱角である．この角は (86.8) によって ω_1' と ω_1 とを結びつけている．

$$\frac{1}{\omega_1'}-\frac{1}{\omega_1} = \frac{1}{m}(1-\cos\theta_1). \tag{4}$$

（3）と（4）とから

$$\omega_1' = \omega_1\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}. \tag{5}$$

ここで $\varepsilon = m\gamma$ および ε' は K 系の電子の始めと終りのエネルギーである $(\varepsilon-\varepsilon' = \omega')$．（5）を（1）に代入して

$$d\sigma_{散} = \pi r_e^2\frac{m\,d\omega'}{\varepsilon\omega_1}\left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}+\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}+\frac{m^2\omega'^2}{\varepsilon'^2\omega_1^2}-\frac{2m\omega'}{\omega_1\varepsilon'}\right).$$

この式を（2）に代入し，ω' が与えられた（すなわち，ε' が与えられた）ときに，$d\omega_1$ について上下限

$$\omega_{1\max} = \frac{2\varepsilon\omega'}{m},\quad \omega_{1\min} = \frac{m\omega'}{2\varepsilon'}$$

のあいだで積分しなければならない（これらの値は $\theta_1 = 0$ および $\theta_1 = \pi$ のときに（3）–（4）から得られる）．ω_1 が大きいときに積分が急速に収束するために，ω_1 の下限の近くの領域が主な寄与を与える（すなわち $\omega_{1\max}\to\infty$ と置くことができる）．積分を対数的精度で計算して[1)]

$$d\sigma_{輻} = 4r_e\alpha Z^2\frac{d\omega'}{\omega'}\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}+\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}-\frac{2}{3}\right)\ln\frac{\varepsilon\varepsilon'}{m\omega'}.$$

この結果が成立するためには $\varepsilon \gg m$（超相対論的電子）の条件のほかに，条件 (96.11) も満足されなければならない．すなわち，積分のときに重要な振動数 $\omega_1 \sim \omega_{1\min}$ は $\ll \varepsilon$ でなければならないからである．これから $\varepsilon-\varepsilon' = \omega' \ll \varepsilon\varepsilon'/m$ である．この条件のもとで，得られた結果は，当然のことながら，対数的精度で (91.17) と一致する．

2. 電子による電子の制動輻射に対して同じことを行なえ．

解　この場合には仮想的光子は，速い電子によっても，反跳電子によっても散乱されう

1)　これは，1回部分積分をすることによって，大きい対数を含む項が分離され，残りの項を無視することを意味する．この操作は $\omega_1 = \omega_{1\min}$ のときに，積分記号のなかから $\ln(\varepsilon/\omega_1)$ を取り出すことと同じになる．

る．一方の電子の場とも等価な光子は，他の電子によって散乱され，またその逆の場合もある．速い電子による光子の散乱は，$Z=1$ を持つ原子核での電子の輻射断面積と一致する断面積 $\sigma^{(1)}_{輻}$ を与える．

反跳電子での仮想的光子の散乱は，輻射断面積

$$d\sigma^{(2)}_{輻}=\int d\omega\cdot n(\omega)d\sigma_{散}(\omega,\omega')$$

を与える．$d\sigma_{散}(\omega,\omega')$ は（振動数の置き方を適当に変えて）(1) から持ってくる．ω' の値が与えられたとき ω がとる値の領域としては ((4) 参照)

$$\omega'\leqslant\omega\leqslant\infty\quad\left(\omega'>\frac{m}{2}\right),$$

$$\omega'\leqslant\omega\leqslant\frac{\omega'}{m-2\omega'}\quad\left(\omega'<\frac{m}{2}\right).$$

$\omega'<m/2$ のとき，$d\omega$ についての積分は

$$d\sigma^{(2)}_{輻}=\frac{16}{3}\alpha r_e^2\frac{d\omega'}{\omega'}\left(1-\frac{\omega'}{m}+\frac{\omega'^2}{m^2}\right)\ln\frac{\varepsilon}{\omega'}$$

を与え，これは(94.4)と一致する．もしも $\omega'>m/2$ ならば，$\omega'\sim m$ の場合と $\omega'\sim\varepsilon\gg m$ の場合を区別する必要がある．1番目の場合は

$$d\sigma^{(2)}_{輻}=\frac{2}{3}\alpha r_e^2\frac{m\,d\omega'}{\omega'^2}\left(4-\frac{m}{\omega'}+\frac{m^2}{4\omega'^2}\right)\ln\frac{\varepsilon}{m}.$$

これは (94.3) と一致する（対数の引数中で，われわれは要求される精度で ε/ω' を ε/m に置き換えた）．

$\omega'\sim\varepsilon$ の場合には，等価光子の方法は $d\sigma^{(2)}_{輻}$ の計算には一般には適用できない．仮想的光子の振動数 ω は ω' から始まる値をとり，$\omega=\omega'\sim\varepsilon$ では，したがって，条件 (96.11) を満足しない．

3. 2光子の衝突の際の対生成断面積から出発して，光子と原子核の衝突の際の対生成の全断面積を決定せよ．

解 原子核の静止系（K 系）での光子のエネルギーは，$\omega=m\gamma$，$\gamma\gg1$ である．原子核が光子に向かって速度 v_0 で運動しているような基準系 K_0 へ移ろう．ここで v_0 は

$$\frac{1}{\sqrt{1-v_0^2}}=\frac{\gamma}{2}.$$

この系で光子のエネルギーは

$$\omega_0=\omega\frac{1-v_0}{\sqrt{1-v_0^2}}\approx\frac{\omega}{2}\sqrt{1-v_0^2}=m.$$

求める断面積 σ は K_0 系で，入射光子 ω_0 と原子核の等価光子——そのエネルギーを ω' とする——との衝突の際の対生成断面積として計算される．すなわち

$$\sigma = \int \sigma_{\gamma\gamma} n(\omega') d\omega'.$$

ここで $\sigma_{\gamma\gamma}$ は2光子による対生成断面積である．これは §88 の問題で得られた公式 (1)によって与えられる．そこで

$$v = \sqrt{1-\frac{m^2}{\omega_0 \omega'}} = \sqrt{1-\frac{m}{\omega'}}$$

と置く必要がある．ω' の代りに変数 v に移って

$$\sigma = 2r_e^2 \alpha Z^2 \int_0^1 v \ln [\gamma(1-v^2)] \left\{(3-v^4) \ln \frac{1+v}{1-v} - 2v(2-v^2)\right\} dv.$$

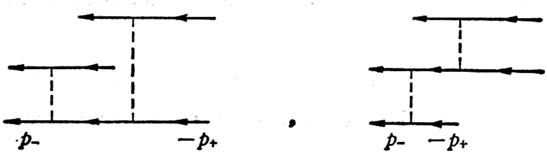
上限での積分の収束性を考慮すれば，積分は，反応のしきい $\omega' = m (v = 0)$ から $\omega' = \infty$ $(v = 1)$ の全領域にわたり，対数的精度（すなわち，対数 $\ln [\gamma(1-v^2)]$ は $v = 0$ の値で置き換えられ，積分記号の外に出される）で行なわれる．その結果

$$\sigma = \frac{28}{9} \alpha Z^2 r_e^2 \ln \gamma.$$

これは (92.8) と一致する．この公式は $\ln \gamma \gg 1$ のときに正しい．

§97. 粒子の衝突の際の対生成

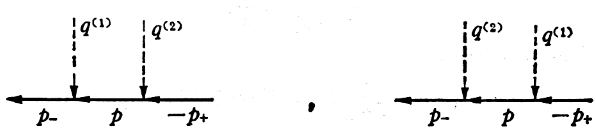
荷電粒子の衝突の際の電子対生成は，二つの型の図形



a)　　　　b)　　　　(97.1)

によって記述される．二つの上の実線は対を作る衝突粒子に対応している．

超相対論的な場合の，二つの重い粒子（原子核）の衝突を考えよう．このような衝突の際に，これらの粒子自身の運動の変化は無視できる．すなわちこれらを外場の源とみなすことができる．したがって，1番目の型には二つの図形



(97.2)

が対応する．ここで $q^{(1)}$, $q^{(2)}$ は二つの粒子の場のフーリエ成分の《運動量》である．

この場合対生成の断面積は，われわれがすでに知っている原子核での光子による対生成の断面積から，等価光子の方法を使って決定できる．粒子中の一つ（たとえば1番目）の場を，等価光子のスペクトルで置き換えることは，図形 (97.2) で線 $q^{(1)}$ が現実の光子線とみなされることを意味している．このときこれら二つの図形の組は，原子核2での光子による対生成に対応する図形の組と同じである．$\varepsilon_+, \varepsilon_- \gg m$ のときには，この過程の断面積は公式 (92.7) で与えられる．この式に1番目の原子核の等価光子のスペクトル(96.16)を掛け，(対数的精度で)粒子の衝突の際に対生成の微分断面積を得る．すなわち

$$d\sigma=\frac{8}{\pi}r_e^2(Z_1Z_2\alpha)^2\frac{d\varepsilon_+d\varepsilon_-}{(\varepsilon_++\varepsilon_-)^4}\left(\varepsilon_+^2+\varepsilon_-^2+\frac{2}{3}\varepsilon_+\varepsilon_-\right)\ln\frac{\varepsilon_+\varepsilon_-}{m(\varepsilon_++\varepsilon_-)}\ln\frac{m\gamma}{\varepsilon_++\varepsilon_-}. \quad (97.3)$$

ここで $\gamma=1/\sqrt{1-v^2}\gg 1$ である．

ここで

$$m\ll\varepsilon_+,\varepsilon_-\ll m\gamma \quad (97.4)$$

が仮定されている．上の不等式は等価光子の方法の適用可能の条件である．同時に，不等式 (97.4) で決定される領域は，(97.3) の式の積分の際に重要な，電子および陽電子のエネルギー領域と一致する．和 $\varepsilon\equiv\varepsilon_++\varepsilon_-$ ($\gg m$) が与えられたとき，$d\varepsilon_+$ あるいは $d\varepsilon_-$ についての積分は，上限に近い領域が重要である．大きい対数を含まない項を落として

$$d\sigma=\frac{56}{9\pi}r_e^2(Z_1Z_2\alpha)^2\ln\frac{\varepsilon}{m}\ln\frac{m\gamma}{\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}.$$

(97.4) の領域で行なう $d\varepsilon$ についての積分は，対数の3乗のように発散する．しかしこの領域の端では対数の平方のように発散するだけである．したがって対数近似 ($\ln\gamma\gg 1$) では，(97.4) の領域が実際には主であって，積分は m から $m\gamma$ の限界内で行なうことができる．すなわち

$$\int_1^\gamma\ln\xi(\ln\gamma-\ln\xi)\frac{d\xi}{\xi}=\frac{1}{6}\ln^3\gamma.$$

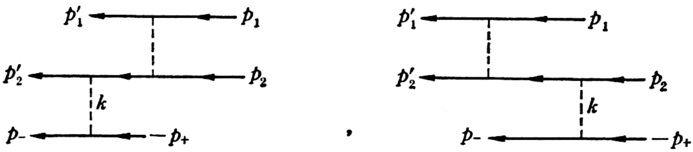
したがって，対生成の全断面積は

$$\sigma=\frac{28}{27\pi}r_e^2(Z_1Z_2\alpha)^2\ln^3\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \quad (97.5)$$

(Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, 1934).

今度は衝突する原子核が非相対論的速度の場合を考察しよう．この場合には，相互作用の影響での原子核の運動の変化が重要になってくる．そして対生成の断面積への主な寄与

は (97.1) のなかの2番目の型の図形によって与えられる．このような図形は四つある．すなわち，二つの図形



(97.6)

および，(対を作る)仮想的光子が2番目でなく1番目の核によって放出されるような，さらに二つの類似の図形とである[1]．

重心系における原子核の相対運動の運動エネルギーにくらべて，対のエネルギーが小さいものと考えよう．すなわち

$$\varepsilon_+ + \varepsilon_- \ll \frac{Mv^2}{2} \tag{97.7}$$

($\boldsymbol{v}$ は始めの相対速度で，$M = M_1M_2/(M_1+M_2)$ は原子核の換算質量である)．このとき，対生成の原子核への逆の影響を無視することができる．もしも (97.6) の図形で電子-陽電子線を取り去ると，その残りの部分は衝突粒子による，小さい振動数 ($\omega = \varepsilon_+ + \varepsilon_-$) の仮想的光子の放出を描くことになる．このようにしてわれわれは，§95 で考察された，現実の軟光子の放出に対する事情にもどったことになり，非相対論的な場合に対してそこで得られた公式 (95.13) を利用できる (現実の光子の振幅 $\sqrt{4\pi}\ e^*$ の代りに，仮想的光子の伝播関数が現われる点の違いはある)[2]．このようにして，対生成の全過程の振幅は

$$M_{fi} = M_{fi}^{(0)}\frac{1}{\omega}\left(\frac{Z_1e}{M_1} - \frac{Z_2e}{M_2}\right)q^\lambda D_{\lambda\mu}(k)\left[-ie(\bar{u}_-\gamma^\mu u_+)\right]. \tag{97.8}$$

ここで $q = (0, \boldsymbol{q})$，$\boldsymbol{q} = M(\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v})$ である．

---

1)　2電子の衝突の際の対生成には，合計36個の図形が対応する．すなわち，二つの始めの電子と，三つの終りの電子どうしの交換によって得られる．合計 $2!\cdot3! = 12$ 個の a) 型の図形と，(97.6) の図形から同じようにして得られる合計 $2\cdot2!\cdot3! = 24$ 個の b) 型の図形を加えたものである．

2)　非相対論的な場合には，光子の運動量は輻射粒子の運動量の変化にくらべて小さい ($|\delta\boldsymbol{p}| \sim \omega/v$)．したがって，光子のエネルギーが無視されないときでも，($\delta\boldsymbol{p}$ にくらべて) それを無視することができる．今与えられた場合に，このことは仮想的光子に対して特にそうである．それに対しては4次元の平方 $k^2 = (p_+ + p_-)^2 > 0$ であり，したがって $|\boldsymbol{k}| < \omega$ であるからである．この条件のもとで，現実と仮想的の光子間の差は消滅する．これは，公式 (95.15) を使って証明できる．

普通のように，非相対論的な場合に対して，ゲージ (77.14) の光子の伝播関数を選ぶ必要がある．振幅 (97.8) にしたがって，過程の断面積は

$$d\sigma = d\sigma_{散}\cdot e^4\left(\frac{Z_1}{M_1}-\frac{Z_2}{M_2}\right)^2 \frac{d^3p_+d^3p_-}{2\varepsilon_+2\varepsilon_-(2\pi)^6\omega^2(\omega^2-\boldsymbol{k}^2)^2}(4\pi)^2|\bar{u}_-\gamma\boldsymbol{Q}u_+|^2. \quad (97.9)$$

ここで

$$\omega = \varepsilon_+ + \varepsilon_-, \quad \boldsymbol{k} = \boldsymbol{p}_+ + \boldsymbol{p}_-, \quad \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{q} - \frac{1}{\omega^2}\boldsymbol{k}(\boldsymbol{qk}).$$

$d\sigma_{散}$ は原子核どうしの（重心系での）弾性散乱の断面積である．これはラザフォードの公式によって与えられる[1]．

$$d\sigma_{散} = 4(Z_1Z_2e^2)^2\frac{M^2do}{q^4} \approx 4(Z_1Z_2e^2)^2\frac{dq_y\,dq_z}{v^2q^4} \quad (97.10)$$

(あとの等式は，原子核が始めの運動方向―― x 軸――からの傾きがわずかであることを前提にしている)．この式を (97.9) に代入して，普通のように対の偏りについて加えて

$$d\sigma = (Z_1Z_2e^2)^2\frac{e^4}{v^2}\left(\frac{Z_1}{M_1}-\frac{Z_2}{M_2}\right)^2 \mathrm{Sp}\,\{(\hat{p}_-+m)(\gamma\boldsymbol{Q})(\hat{p}_+-m)(\gamma\boldsymbol{Q})\}$$

$$\times\frac{d^3p_+d^3p_-dq_y\,dq_z}{4\pi^4\varepsilon_+\varepsilon_-\boldsymbol{q}^4(\omega^2-\boldsymbol{k}^2)^2\omega^2}. \quad (97.11)$$

これから先の計算は近似的に行なわれる．そこでは積分で出てきた対数は大きい量と考えられる．この精度では対のエネルギーが $\varepsilon_+, \varepsilon_- \gg m$，$\boldsymbol{p}_+$ および $\boldsymbol{p}_-$ のあいだの角 θ が

$$\frac{m}{\varepsilon} \ll \theta \ll 1 \quad (97.12)$$

の領域が主な役割を果たすことがわかる．これに対応する省略を行ない，(97.11) の跡の計算は

$$\mathrm{Sp}\{\cdots\} = 4\Big[-(\varepsilon_+\varepsilon_- - \boldsymbol{p}_+\boldsymbol{p}_-)\Big(\boldsymbol{q}^2-\frac{(\boldsymbol{qk})^2}{\omega^2}\Big)$$

$$+2(\boldsymbol{p}_+\boldsymbol{q})(\boldsymbol{p}_-\boldsymbol{q})+\frac{2\varepsilon_+\varepsilon_-}{\omega^2}(\boldsymbol{qk})^2-\frac{2\boldsymbol{qk}}{\omega}(\varepsilon_+\boldsymbol{qp}_-+\varepsilon_-\boldsymbol{qp}_+)\Big]$$

を与える．ここで $|\boldsymbol{p}_+| = \varepsilon_+$，$|\boldsymbol{p}_-| = \varepsilon_-$ と置くことができる．分母では

$$\omega^2-\boldsymbol{k}^2 \approx \varepsilon_+\varepsilon_-\theta^2+m^2\frac{(\varepsilon_++\varepsilon_-)^2}{\varepsilon_+\varepsilon_-}.$$

---

1) 図形 (97.6) は，原子核の散乱に対するボルン近似を前提として描かれている．しかしながら，ラザフォードの公式が（クーロン相互作用に対して）正確なので，得られた公式の正当性は，実際には，ボルン近似の適用可能の条件が守られることを要求しない．

$\boldsymbol{p}_+$ および $\boldsymbol{p}_-$ のあいだの角度が与えられたとき，それらの方向に対する積分を行なって

$$d\sigma = \frac{32}{3\pi^2}(Z_1Z_2e^2)^2\frac{e^4}{v^2}\left(\frac{Z_1}{M_1}-\frac{Z_2}{M_2}\right)^2\frac{(\varepsilon_+^2+\varepsilon_-^2)d\varepsilon_+d\varepsilon_-}{\omega^4}$$

$$\times\frac{\theta^3d\theta}{\left[\theta^2+\dfrac{m^2(\varepsilon_++\varepsilon_-)^2}{\varepsilon_+^2\varepsilon_-^2}\right]^2}\frac{dq_y\,dq_z}{q^2}. \qquad (97.13)$$

θ 依存性の形は(97.12)の仮定を証明するもので，θ についての積分は $\ln \varepsilon_+\varepsilon_-/m(\varepsilon_++\varepsilon_-)$ を与える．(97.13) のあとの因子の積分は $q_y=q_z=0$ から $\sqrt{q_y^2+q_z^2}\sim 1/R$ の限界内で行なわれる．ここで R は原子核の半径の大きさである（この値は最小の衝突径数に対応する．以下参照)．この積分は

$$\pi\ln(q_x^2+q_y^2+q_z^2)\Big|\approx 2\pi\ln\frac{1}{Rq_x}$$

を与える．また対の全エネルギーは，原子核のエネルギーの変化に等しく

$$\varepsilon\equiv(\varepsilon_++\varepsilon_-)=\frac{M}{2}(v'^2-v^2)\approx Mv(v'_x-v_x)=vq_x.$$

これから $q_x=\varepsilon/v$．このようにして

$$d\sigma=\frac{64}{3\pi}(Z_1Z_2e^2)^2\frac{e^4}{v^2}\left(\frac{Z_2}{M_2}-\frac{Z_1}{M_1}\right)^2\frac{\varepsilon_+^2+\varepsilon_-^2}{\varepsilon^4}\ln\frac{v}{R\varepsilon}\ln\frac{\varepsilon_+\varepsilon_-}{m\varepsilon}d\varepsilon_+d\varepsilon_-.$$

そして和 ε が与えられたとき $d\varepsilon_+$ あるいは $d\varepsilon_-$ について積分したのち

$$d\sigma=\frac{2^7}{9\pi}(Z_1Z_2e^2)^2\frac{e^4}{v^2}\left(\frac{Z_2}{M_2}-\frac{Z_1}{M_1}\right)^2\ln\frac{v}{R\varepsilon}\ln\frac{\varepsilon}{m}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}. \qquad (97.14)$$

エネルギー ε は衝突径数に対応させることができる（対のエネルギーは衝突時間に対応する振動数の程度の大きさである)．したがって，(97.14) のなかで，$d\varepsilon$ についての積分の際の対数的発散は，衝突径数についてのこのような発散を意味している．これは大きい ρ が重要であることを意味する（これにより，原子核の純クーロン場内での散乱断面積 (97.10) の使用の正当性が証明される)．したがって，エネルギー領域 $m\ll\varepsilon\ll v/R$ が重要になる．(97.14) の積分は対生成の全断面積を与え，最終的に（普通の単位で)

$$\sigma=\frac{64}{27\pi}(Z_1Z_2\alpha)^2r_e^2\left(\frac{c}{v}\right)^2\left(\frac{Z_2m}{M_2}-\frac{Z_1m}{M_1}\right)^2\ln^3\frac{\hbar v}{mc^2R} \qquad (97.15)$$

(E. M. Лифшиц, 1935).

問 題

1. 図形 (97.2) に対応する，二つの速い原子核の衝突の際の対生成の断面積に対する式を書け.

解 反応の振幅は

$$M_{fi}=e^2\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\bar{u}(p_-)\hat{A}^{(1)}(p_--p)G(p)\hat{A}^{(2)}(p_++p)u(-p_+)+(1\leftrightarrow 2).$$

ここで $A^{(1)}(q)$, $A^{(2)}(q)$ は1および2番目の原子核によって作られる外場である．書かれなかった項は第1項から原子核の番号の交換によって得られる.

速度 $\boldsymbol{v}$ で一様な運動をしている古典的粒子によって作られるポテンシャル $A^\mu=(A_0, \boldsymbol{A})$ は，方程式

$$\Box A_0=-4\pi Ze\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}t-\boldsymbol{r}_0),$$

$$\Box \boldsymbol{A}=-4\pi Ze\boldsymbol{v}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}t-\boldsymbol{r}_0)$$

を満足する．このフーリエ成分は

$$A_0(\boldsymbol{k},\omega)=-\frac{8\pi^2Ze}{\omega^2-\boldsymbol{k}^2}e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}_0}\delta(\omega-\boldsymbol{k}\boldsymbol{v}),$$

および $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k},\omega)$ に対する同様な式である．4次元形式では

$$A^\mu(q)=-\frac{8\pi^2Ze}{q^2}e^{iqx_0}U^\mu\delta(Uq).$$

ここで U は粒子の4-速度で，4-ベクトル $x_0=(0,\boldsymbol{r}_0)$ である．もしも原子核 *1* が座標原点 ($\boldsymbol{r}_0^{(1)}=0$) で静止していると，$\boldsymbol{\rho}\equiv\boldsymbol{r}_0^{(2)}$ は（原子核 *2* の運動方向に垂直な平面内では）衝突径数のベクトルである.

さて振幅は

$$M_{fi}=4Z_1Z_2e^4\bar{u}(p_-)Qu(-p_+),$$

$$Q=\hat{U}^{(1)}(\hat{I}+I_m)\hat{U}^{(2)}+\hat{U}^{(2)}(\hat{I}'+I'_m)\hat{U}^{(1)},$$

$$\bar{Q}=\hat{U}^{(2)}(\hat{I}^*+I_m^*)\hat{U}^{(1)}+\hat{U}^{(1)}(\hat{I}'^*+I'^*_m)\hat{U}^{(2)}.$$

ここで I, I' は4-ベクトルの積分である.

$$I=\int p\frac{e^{-i(p_++p)\rho}\delta[U^{(1)}(p_--p)]\delta[U^{(2)}(p_++p)]}{(p_--p)^2(p^2-m^2)(p_++p)^2}d^4p,$$

$$I'=\int p\frac{e^{-i(p_--p)\rho}\delta[U^{(1)}(p_++p)]\delta[U^{(2)}(p_--p)]}{(p_--p)^2(p^2-m^2)(p_++p)^2}d^4p.$$

また I_m, I'_m は積分記号のなかの因子 p を m で置き換えることによって得られる．

衝突径数が与えられたときの衝突の際の対生成の確率は

$$dw = \frac{|M_{fi}|^2}{2\varepsilon_+ 2\varepsilon_-} \frac{d^3p_+}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_-}{(2\pi)^3}.$$

また対の偏りについて加えたのち

$$dw = \frac{(Z_1Z_2e^4)^2}{16\pi^6\varepsilon_+\varepsilon_-} \mathrm{Sp}\{(\hat{p}_- + m) Q (\hat{p}_+ - m) \bar{Q}\} d^3p_+ d^3p_-.$$

断面積は dw を $d^2\rho$ について積分することによって得られる[1]．

§98.　強い電磁場内での電子による輻射

電子と輻射場の相互作用の過程へ摂動論が適用できるためには，（その相互作用定数 α が小さいことのほかに）またその場の強度が十分弱いことが仮定される．もしも a を電磁波の場の古典的4-ポテンシャル振幅とすると，この意味での特長的な大きさは，次元のない不変量の比

$$\xi = \frac{e\sqrt{-a^2}}{m} \tag{98.1}$$

である．

この節でわれわれは，ξ が任意の値を取りうるような，強い電磁波の場と電子との相互作用の際に起こる輻射過程を考察しよう．適用される方法は，これらの相互作用の正確な考慮に基礎を置いている．電子と新たに放出される光子の相互作用は前と同じく小さい摂動とみなされる[2]．

一定の円偏光の単色平面波を考えよう．その4-ポテンシャルを

$$A = a_1 \cos\varphi + a_2 \sin\varphi, \quad \varphi = kx \tag{98.2}$$

の形に書こう．ここで $k^\mu = (\omega, \boldsymbol{k})$ は波動4-ベクトル（$k^2 = 0$）である．4-振幅 a_1 およ

---

1)　これから先の計算法は，エリ・デ・ランダウ，イェ・エム・リフシッツ，*Phys. Zs. Sowjet*, **6**, 244 (1934) 参照．

2)　強い平面電磁波のなかでの種々の量子過程の系統的研究は，А. И. Никишов, В. И. Ритус, ЖЭТФ, **46** 776, 1768 (1964)；**47** 1130(1964)；**52** 1707 (1967)；Н. Б. Нарожный, А. И. Никишов, В. И. Ритус, ЖЭТФ **47**, 930 (1964) の仕事に与えられている．これらの仕事のなかで（これをわれわれの叙述のなかで追うわけだが）特に，種々の偏りの平面波の場のなかでの光子の放出，対生成が考察されている．

び a_2 は大きさが同じで，互いに直交している．

$$a_1^2 = a_2^2 \equiv a^2, \quad a_1 a_2 = 0.$$

ローレンツ・ゲージでポテンシャルを表わすと仮定しよう．したがって，$a_1 k = a_2 k = 0$ である．

任意の平面電磁波の場内の電子の正確な波動関数は，§40 で見いだされた公式(40.7)，(40.8) で与えられる．しかしながら，その規格化を変更しよう．すなわち，ψ_p が粒子数の 1 に等しい空間密度に対応するようにしよう．これはわれわれが自由粒子の波動関数を，≪単位体積に粒子 1 個で≫ 規格化することに対応している．関数 (40.7) に対して平均密度は $\bar{j}^0 = q_0/p_0$ に等しいので，求める規格化を得るためにはそれに $\sqrt{p_0/q_0}$ を掛ける必要がある．すなわち (40.7) で因子 $1/\sqrt{2p_0}$ を $1/\sqrt{2q_0}$ に変える必要がある．4-ポテンシャル (98.2) を持つ波に対しては

$$\psi_p = \left[1 + \frac{e}{2(kp)}(\hat{k}\hat{a}_1 \cos\varphi + \hat{k}\hat{a}_2 \sin\varphi)\right] \frac{u(p)}{\sqrt{2q_0}}$$
$$\times \exp\left\{-ie\frac{(a_1 p)}{(kp)}\sin\varphi + ie\frac{(a_2 p)}{(kp)}\cos\varphi - iqx\right\}. \qquad (98.3)$$

ここで

$$q^\mu = p^\mu - e^2 \frac{a^2}{2(kp)} k^\mu. \qquad (98.4)$$

(40.14) にしたがって，4-ベクトル q は電子の平均的な運動学的 4-運動量である．これを準運動量と名付けよう．

4-運動量 $k^{\mu\prime} = (\omega', \boldsymbol{k}')$ および偏りの 4-ベクトル e' を持つ光子の輻射を伴う，電子の状態 ψ_p から状態 $\psi_{p'}$ への遷移に対する S-行列の要素は

$$S_{fi} = -ie\sqrt{4\pi}\int (\bar{\psi}_{p'}\hat{e}'^*\psi_p)\frac{e^{ik'x}}{\sqrt{2\omega'}} d^4x. \qquad (98.5)$$

(98.5) の被積分関数は

$$e^{-i\alpha_1 \sin\varphi + i\alpha_2 \cos\varphi},$$
$$\cos\varphi\, e^{-i\alpha_1 \sin\varphi + i\alpha_2 \cos\varphi},$$
$$\sin\varphi\, e^{-i\alpha_1 \sin\varphi + i\alpha_2 \cos\varphi}$$

という量の一次結合である．ここで

$$\alpha_1 = e\left(\frac{a_1 p}{kp} - \frac{a_1 p'}{kp'}\right), \quad \alpha_2 = e\left(\frac{a_2 p}{kp} - \frac{a_2 p'}{kp'}\right). \qquad (98.6)$$

因子 $\exp[i(k'+q'-q)x]$とともに，これらの量は被積分関数の x への依存性を分離している．

これらをフーリエ級数に展開し，その係数をそれぞれ B_s，B_{1s}，B_{2s} と置こう．たとえば

$$e^{-i\alpha_1\sin\varphi+i\alpha_2\cos\varphi}=e^{-i\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}\sin(\varphi-\varphi_0)}=\sum_{s=-\infty}^{\infty}B_s e^{-is\varphi}.$$

これらの係数はつぎの公式により，ベッセル関数を使って表わされる．

$$\begin{aligned}B_s&=J_s(z)e^{is\varphi_0},\\ B_{1s}&=\frac{1}{2}[J_{s+1}(z)e^{i(s+1)\varphi_0}+J_{s-1}(z)e^{i(s-1)\varphi_0}],\\ B_{2s}&=\frac{1}{2i}[J_{s+1}(z)e^{i(s+1)\varphi_0}-J_{s-1}(z)e^{i(s-1)\varphi_0}].\end{aligned}\qquad(98.7)$$

ここで

$$z=\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2},\quad \cos\varphi_0=\frac{\alpha_1}{z},\quad \sin\varphi_0=\frac{\alpha_2}{z}.$$

関数 B_s，B_{1s}，B_{2s} は関係式

$$\alpha_1B_{1s}+\alpha_2B_{2s}=sB_s\qquad(98.8)$$

によって相互に結びつけられている．これはベッセル関数に対するよく知られた関係式，すなわち $J_{s-1}(z)+J_{s+1}(z)=2sJ_s(z)/z$ の結果である．

この結果，行列要素 (98.5) は

$$S_{fi}=\frac{1}{(2\omega'2q_0 2q_0')^{1/2}}\sum_s M_{fi}^{(s)}(2\pi)^4 i\delta^{(4)}(sk+q-q'-k')\qquad(98.9)$$

の形になる．ここで

$$\begin{aligned}M_{fi}^{(s)}=&-e\sqrt{4\pi}\,\bar{u}(p')\left\{\left(\hat{e}'^*-e^2\frac{a^2(k\hat{e}'^*)\hat{k}}{2(kp)(kp')}\right)B_s\right.\\ &\left.+e\left(\frac{\hat{a}_1\hat{k}\hat{e}'^*}{2(kp')}+\frac{\hat{e}'^*\hat{k}\hat{a}_1}{2(kp)}\right)B_{1s}+e\left(\frac{\hat{a}_2\hat{k}\hat{e}'^*}{2(kp')}+\frac{\hat{e}'^*\hat{k}\hat{a}_2}{2(kp)}\right)B_{2s}\right\}u(p).\end{aligned}\qquad(98.10)$$

このようにして，行列要素 S_{fi} はその各項が保存則

$$sk+q=q'+k'\qquad(98.11)$$

に対応するような無限個の項の和である．

$$q^2=q'^2=m^2(1+\xi^2)\equiv m_*^2\qquad(98.12)$$

であり ((40.15) 参照)，$k^2=k'^2=0$ であるから，等式 (98.11) は $s\geqslant1$ に対してのみ可

能である．和の s 番目の項は，4−運動量 k を持つ s 個の光子の波からの吸収と引き換えの，光子 k' の輻射を記述している．等式 (98.11) の形から，もしも電子の運動量を準運動量 q で，また入射光子の運動量を4−ベクトル sk で置き換えれば，コンプトン効果に対して成立した運動学的な関係式がすべて，今考察されている過程にも成り立つことが明らかである．特に，電子が平均して静止しているような基準系では，輻射される光子の振動数に対して

$$\omega' = \frac{s\omega}{1+\dfrac{s\omega}{m_*}(1-\cos\theta)} \tag{98.13}$$

が成立つ．ここで θ は k および k' のあいだの角である ((86.8) 参照)．振動数 ω' は ω の倍振動数であるということができる．

われわれが使う記号では (§65) s 倍振動数を輻射する過程の振幅は $M_{fi}^{(s)}$ と一致し

$$dW_s = |M_{fi}^{(s)}|^2 \frac{d^3k'\,d^3q'}{(2\pi)^6 2\omega' 2q_0 2q_0'}(2\pi)^4\delta^{(4)}(sk+q-q'-k') \tag{98.14}$$

は対応する（単位時間で単位体積あたりの）微分確率を与える[1]．

振幅 (98.10) の構造は，平面波での散乱振幅の構造と似ている．したがって，粒子の偏りについての和は普通のやり方で行なわれる．終りの電子および光子の偏りについて加え，始めの電子の偏りについて平均して

$$dW_s = \frac{e^2m^2}{4\pi}\frac{d^3k'd^3q'}{q_0q_0'\omega'}\delta^{(4)}(sk+q-q'-k')$$
$$\times\left\{-2J_s^2(z)+\xi^2\left(1+\frac{(kk')^2}{2(kp)(kp')}\right)(J_{s+1}^2+J_{s-1}^2-2J_s^2)\right\}. \tag{98.15}$$

(98.15) の式を計算するために，円偏光の場が軸対称であるから微分確率は，一般に k 向のまわりの方位角 φ には依存しないことに注意しよう．δ−関数が存在することとともに，この事情は一つを除いた全変数についての積分を行なうことを可能にしている．その一つとして不変量 $u=(kk')/(kp')$ を選ぶことにしよう． このとき $d^3kd\varphi d(q_0'+\omega')$ についての積分ののち

$$\delta^{(4)}(sk+q-q'-k')\frac{d^3q'd^3k'}{q_0'\omega'} \longrightarrow \frac{2\pi du}{(1+u)^2}.$$

---

1) ψ_p を単位密度で規格化することは，《q の尺度で》δ−関数で規格化することに対応する ((40.17) を見よ．そこでは右辺の因子 q_0/p_0 は今は存在しない)．したがって，電子の終りの状態の数は要素 d^3q' で測る必要がある．

実際に,($sk+q=q'+k'=0$ であるような)重心系で上記の積分は $2\pi|q'|d\cos\theta/E_s$ を与える．ここで $E_s=s\omega+q_0=\omega'+q_0'$ であり，θ は k と q' のあいだの角である（変換(65.12)を見よ)．他面，この同じ系では

$$u=\frac{E_s}{q_0'-|q'|\cos\theta}-1,\quad d\cos\theta=\frac{E_s du}{|q'|(1+u)^2}.$$

区間 $-1\leqq\cos\theta\leqq1$ は区間

$$0\leqslant u\leqslant u_s\equiv\frac{E_s^2}{m_*^2}-1=\frac{2s(kp)}{m_*^2}$$

に対応する（変換の際に $kp=kq$ であることを思い起こす必要がある)．

このようにして，単位時間に単位体積からの全輻射確率は[1]

$$W=\sum_{s=1}^{\infty}W_s=\frac{e^2m^2}{4q_0}\sum_{s=1}^{\infty}\int_0^{u_s}\frac{du}{(1+u)^2}\left\{-4J_s^2(z)\right.$$
$$\left.+\xi^2\left(2+\frac{u^2}{1+u}\right)(J_{s+1}^2+J_{s-1}^2-2J_s^2)\right\}. \qquad (98.16)$$

ここで[2]

$$u=\frac{(kk')}{(kp')},\quad u_s=2s\frac{(kp)}{m_*^2},\quad z=2sm^2\frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}}\sqrt{\frac{u}{u_s}\left(1-\frac{u}{u_s}\right)}. \qquad (98.17)$$

$\xi\ll1$（摂動論の適用可能条件）のときに，(98.16) の被積分関数は ξ の冪に展開できる．したがって，W_1 のなかの展開の第1項に対して

$$W_1=\frac{e^2m^2}{4p_0}\xi^2\int_0^{u_1}\left[2+\frac{u^2}{1+u}-4\frac{u}{u_1}\left(1-\frac{u}{u_1}\right)\right]du$$
$$=\frac{e^2m^2}{4p_0}\xi^2\left[\left(1-\frac{4}{u_1}-\frac{8}{u_1^2}\right)\ln\,(1+u_1)+\frac{1}{2}+\frac{8}{u_1}-\frac{1}{2(1+u_1)^2}\right]. \qquad (98.18)$$

ここで $u_1\approx2(kp)/m^2$ である．当然のことながらこの結果は，電子による光子の散乱に対する**クライン=仁科の公式**と一致する．すなわち (98.18) で $-a^2=4\pi/\omega$, $\xi^2=4\pi e^2/m^2\omega$ と置き，入射光子の密度 (65.14) で割り，(86.16) にもどることになる（散乱の積

1) この公式はまた，イ・イ・ゴルドマンによっても得られた (1964).

2) z の計算のためにはあらかじめ，$z^2=(a_1Q)^2+(a_2Q)^2=a^2Q^2$ であることを知っておく必要がある．ここで $Q=q/(kq)-q'/(kq')$ である．$(a_1)_0=(a_2)_0=0$ で，ベクトル a_1, a_2, k が x^1, x^2, x^3 軸方向になるような系を選び，$kQ=0$ であるために $Q_0=Q_3$ であることに気付くと，これは容易に確かめられる．

分断面積は光子の始めの偏りには依存しない)[1].

2倍振動数の放出確率に対する式（ξのときの展開 W_2 の第1項）を導こう．すなわち

$$W_2 = \frac{e^2m^2\xi^4}{p_0}\int_0^{u_2}\frac{du}{(1+u)^2}\frac{u}{u_2}\left(1-\frac{u}{u_2}\right)\left[2+\frac{u^2}{1+u}-4\frac{u}{u_2}\left(1-\frac{u}{u_2}\right)\right]$$

$$= \frac{e^2m^2\xi^4}{p_0}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3u_1}-\frac{4}{u_1^2}-\frac{2}{u_1^3}-\frac{1}{2(1+2u_1)}-\left(\frac{1}{2u_1}-\frac{3}{2u_1^2}-\frac{3}{u_1^3}-\frac{1}{u_1^4}\right)\times\ln(1+2u_1)\right]. \quad (98.19)$$

一般に（sがそう大きくないときの）W_s 中の主な項は ξ^{2s} に比例する．

今度は逆の場合，すなわち$\xi\gg 1$の場合を詳論しよう．たとえば場の強さを固定しておいて振動数 ω を小さくすることによって，パラメータξは大きくすることができる(Fを場の張力の振幅として，$\xi = eF/m\omega$ であることは明らかである)．したがって，$\xi\gg 1$の場合，実際は張力 $\boldsymbol{E}$ および $\boldsymbol{H}$ が互いに垂直で大きさが等しいような一様な定場（このような場を十字場と呼ぶことにしよう）のなかでの過程に帰してしまう．このような場内での輻射確率は$\xi\to\infty$ の極限移行により求められる．しかし4-ポテンシャルを

$$A^\mu = a^\mu\varphi, \quad \varphi = kx, \quad (ak) = 0 \quad (98.20)$$

（したがって $F_{\mu\nu} = k_\mu a_\nu - k_\nu a_\mu = \text{const.}$）の形に持つ定場に対して，じかに計算をした方が簡単である．この場のなかでの電子の正確な波動関数は，(98.20) を (40.7), (40.8)に代入して求められる．すなわち

$$\psi_p = \left[1+e\frac{\hat{k}\hat{a}}{2(kp)}\varphi\right]\frac{u(p)}{\sqrt{2p_0}} \times\exp\left\{-ie\frac{(ap)}{2(kp)}\varphi^2+ie^2\frac{a^2}{6(kp)}\varphi^3-ipx\right\}. \quad (98.21)$$

この関数を使って得られた結果は，電子のエネルギーが任意のときに，十字場内での電子の輻射に対しては正確である．しかしながら，超相対論的な場合に，この結果が（その仮定に必要な形式で——以下参照）十字場内だけでなく，一般の一様な定電磁場——そのなかには定磁場を含めて——のなかの電子の輻射に対して成立することは注目に値する（最後の場合は §59 で考察されている）．

この命題を定式化するために，つぎの点に注意しよう．任意の一様な定場内の粒子の状

---

1) 上記の a^2 の値は，4-ポテンシャルの《単位体積に1光子の》規格化に対応している．この定義のためには ω を（実の）4-ポテンシャル (98.2) を持つ，古典場のエネルギーと同じに置かなければならない．

態は自由粒子の状態と同じ量子数により定義され，これらの量子数はいつも，場がなくなったときに自由粒子の量子数，すなわちその4-運動量 p^μ ($p^2 = m^2$) に移るようなものに選ぶことができる．このようにして，定場中の粒子の状態は定4-ベクトル p で記述できる．

輻射強度は不変量なので不変量だけに依存する．この不変量は定4-テンソル $F_{\mu\nu}$，および4-ベクトル p^μ から作ることができる[1]．また $F_{\mu\nu}$ は強度のなかに電荷 e とともに入ることを考慮して，三つの次元のない不変量を得る．すなわち

$$\chi^2 = -\frac{e^2}{m^6}(F_{\mu\nu}p^\nu)^2 = -\frac{e^2}{m^6}a^2(kp)^2, \quad f = \frac{e^2(F_{\mu\nu})^2}{m^4},$$
$$g = \frac{e^2}{m^4}e_{\lambda\mu\nu\rho}F^{\lambda\mu}F^{\nu\rho}. \tag{98.22}$$

十字場では $f = g \equiv 0$ であり，同時に一般の場合には，三つの不変量全部が 0 と異なる．しかしもしも電子が超相対論的 ($p_0 \gg m$) であり，ベクトル $\boldsymbol{p}$ が場 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ と角度 $\theta \gg m/p_0$ をなしているときには， $\chi^2 \gg f, g$ である（言いかえれば，超相対論的粒子に対し，ほとんど $\boldsymbol{p}$ のすべての方向に対して，任意の定場は十字型に見えることになる）．もしもこのほかに，場の張力 $|\boldsymbol{E}|, |\boldsymbol{H}| \ll m^2/e$ $(= m^2c^3/e\hbar)$ であれば，$|f|, |g| \ll 1$ である[2]．このような条件のもとでは，十字場に対して計算され，不変量 χ を使って表わされた強度は，すべての定場内での輻射に対してもまた成立する．

不変量 χ はつぎの式によって張力 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ を使って表わされる．すなわち

$$\chi^2 = \frac{e^2}{m^6}\{(|\boldsymbol{pH}| + p_0\boldsymbol{E})^2 - (\boldsymbol{pE})^2\}.$$

定磁場に対して χ は § 59 で導入された量 (59.3) と一致し，ここで述べられた考察は § 59 の結果を得る別の方法を与えることになる[3]．

---

1)　微分強度に対しても，同様な考察をすることができる．

2)　このとき $(F_{\mu\nu}p^\nu)^2$ という量のなかで，同じ精度で，p を粒子の普通の運動学的4-運動量と考えることができることを指摘しよう．

3)　これらの方法による計算の実行については，А. И. Никишов, В. И. Ритус ЖЭТФ **46**, 1769 (1964) 参照．

付　　　録[1)]

§ a. 有限回転の演算子

角運動量の2乗の演算子 $\mathbf{j}^2$ および角運動量の座標軸への投影の演算子 j_z はお互いどうしのあいだのみでなく，空間の与えられた方向 $\boldsymbol{n}$ (ζ 軸) への角運動量の投影の演算子 $\mathrm{j}_\zeta = \mathbf{j}\boldsymbol{n}$ とも可換である．このことは直接の計算によって容易に確かめられるが，そうしなくてもこれは自明である．角運動量演算子は無限小回転の演算子と結びつき，二つのベクトルのスカラー積 $\boldsymbol{j}\boldsymbol{n}$ は座標の任意の回転に関して不変である．

このようにして，j, $j_z = m$ および $j_\zeta = m'$ を持つ状態が可能となり，これに対応する波動関数，すなわち演算子 $\mathbf{j}^2$, j_z, j_ζ の共通の固有関数を見いだす問題が起こる．特に剛体とみなされうる軸対称系の回転（対称独楽）の量子化の際に，われわれはこのような問題に遭遇する．この場合に方向 $\boldsymbol{n}$ は独楽の軸である (III, § 103).

関数 $\psi_{jmm'}$ を求める問題は数学的には，有限角の回転の際の角運動量固有関数の変換の問題と深く結びついている．

二つの（右手系の）座標系を導入しよう．すなわち固定系 xyz と《動く》系 $\xi\eta\zeta$ で，その ζ 軸は任意の（変動する）方向 $\boldsymbol{n}$ に沿っている．xyz 系に対して $\xi\eta\zeta$ 系をオイラー角 α, β, γ だけ回転させよう．この角はつぎのようにして定義される．すなわち，1) z 軸のまわりの角 α ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$) だけの回転，2) 新しい位置の y 軸 (y') のまわりの角 β ($0 \leq \beta \leq \pi$) だけの回転，3) 最終的に得られた z 軸 (ζ) のまわりの角 γ ($0 \leq \gamma \leq 2\pi$) だけの回転である[2)]．角 α, β は新しい軸 ζ の xyz 軸に対する球面角 φ および θ と一致することは明らかである．

---

1) この付録の2節は《量子力学》第14章の続きで，これはIII, § 109に続くべきものである．

2) オイラー角のこのような定義は，I, § 35 および III, § 58 で使われたものと，2番目の回転が x' 軸のまわりでなく y' 軸のまわりに行なわれる点が異なっている．角 α, β, γ は I および III の φ, θ, ψ（球面角 φ, θ と混同しないこと!）とつぎの式によ↗

$$\alpha=\varphi, \quad \beta=\theta.$$

一定の j の値を持つ状態を $x\,y\,z$ 座標では関数 ψ_{jm} ($m=-j,\cdots\cdots,j$) が記述し，また同じ状態を $\xi\eta\zeta$ 軸に対しては関数 $\psi_{jm'}$ が記述するとしよう．1番目の場合に m は j_z の値であり，2番目では $m'=j_\zeta$ である．これらの関数は互いに1次式で結びつけられる．これを

$$\psi_{jm}=\sum_{m'} D^{(j)}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma)\,\psi_{jm'} \tag{a.1}$$

の形に書こう．係数 $D^{(j)}_{m'm}$ は（添字 $m'm$ について）$(2j+1)$ 階の行列，すなわち**有限回転の行列** $\mathrm{D}^{(j)}$ を形成している．その要素は角度 α,β,γ の関数である．

もしも $\xi\eta\zeta$ 軸が物理系と≪固く≫結びつけられていれば，$\psi_{jm'}$ は系の向きに依存しない一定値を持つはずである（これを $\psi^{(0)}_{jm'}$ としよう）．式 (a.1) は関数 ψ_{jm} の角度依存性を与えることになるだろう．今度は状態 jm がまた角運動量の ζ 軸への投影 m' の一定値を持つものとしよう．これは $\psi^{(0)}_{jm'}$ という量のすべてのなかから，与えられた m' の値を持つただ一つだけが0と異なることを意味する．このとき (a.1) のなかの和は一つの項になってしまう．すなわち

$$\psi_{jmm'}=\psi^{(0)}_{jm'}\,D^{(j)}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma) \tag{a.2}$$

である．行列要素 $D^{(j)}_{m'm}$ は関数 $\psi_{jmm'}$ の角度依存性を決定していることがわかる．これによって，前に触れた有限回転の行列と波動関数 $\psi_{jmm'}$ のあいだの関係が確立される．

行列 $\mathrm{D}^{(j)}$ の組み立ては，関数 ψ_{jm} のスピノール表示を使って実現できる．この目的のために，われわれがここで使ったオイラー角の定義を使って書いた，スピノールの変換公式(III, §58参照) を思い出そう．$x\,y\,z$ 系でのスピノールの反変成分 (ψ^1,ψ^2) は，$x\,y\,z$ に対して角 $\alpha\beta\gamma$ だけ回転した $\xi\eta\zeta$ 系での成分 $(\psi^{1'},\psi^{2'})$ と，変換則

$$\begin{aligned}\psi^1&=\psi^{1'}e^{-\frac{i}{2}(\alpha+\gamma)}\cos\frac{\beta}{2}-\psi^{2'}e^{-\frac{i}{2}(\alpha-\gamma)}\sin\frac{\beta}{2},\\ \psi^2&=\psi^{1'}e^{\frac{i}{2}(\alpha-\gamma)}\sin\frac{\beta}{2}+\psi^{2'}e^{\frac{i}{2}(\alpha+\gamma)}\cos\frac{\beta}{2}\end{aligned} \tag{a.3}$$

↘って結ばれている．

$$\varphi=\alpha+\frac{\pi}{2}, \quad \theta=\beta, \quad \psi=\gamma-\frac{\pi}{2}.$$

このような α,β,γ の定義はエドモンズにしたがった (A. R. Edmonds《Augular momentum in quantum mechanics》Princeton, 1957).

によって結ばれている．スピノールの共変成分 (ψ_1, ψ_2) は複素共役な変換則によって変換される．

$j=1/2$ に対しては二つの関数 $\psi_{1/2\,m}$ $(m=\pm 1/2)$ が，ちょうど1階の共変スピノールを作っている (III, §58 参照)．これからただちに変換行列 (a. 1) を書くことができる．

$$D^{(1/2)}_{m'm} = e^{im'\gamma}\, d^{(1/2)}_{m'm}(\beta)\, e^{im\alpha}$$

で，ここで行列は

$$d^{(1/2)}_{m'm} = \left\{ \begin{array}{c|cc} m' \backslash m & \tfrac{1}{2} & -\tfrac{1}{2} \\ \hline \tfrac{1}{2} & \cos\dfrac{\beta}{2} & \sin\dfrac{\beta}{2} \\ -\tfrac{1}{2} & -\sin\dfrac{\beta}{2} & \cos\dfrac{\beta}{2} \end{array} \right. \qquad (a. 4)$$

公式 III (58. 1) にしたがって，任意の j 個の関数 ψ_{jm} $(m=j, j-1, \cdots\cdots, -j)$ に $2j$ 階の対称スピノールの成分を対応させることができる．すなわち

$$\psi_{jm} = \frac{1}{\sqrt{(j+m)!\,(j-m)!}}\,\psi_{\underbrace{1/2\;1/2\ldots}_{j+m}\underbrace{-1/2\;-1/2\ldots}_{j-m}}$$

である．$2j$ 階のスピノール成分の変換行列は $2j$ 個の行列 $\mathrm{D}^{(1/2)}$ の積である．この行列のおのおのはスピノール添字のなかの一つに作用するものである．乗算を行ないふたたび関数 ψ_{jm} にもどって，われわれは後者の変換を

$$D^{(j)}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma) = e^{im'\gamma}\, d^{(j)}_{m'm}(\beta)\, e^{im\alpha} \qquad (a. 5)$$

の形に求める．ここで $d^{(j)}_{m'm}(\beta)$ は定義された関数である[1]（関数 $d^{(j)}_{m'm}$ に対するもっと便利な式が他の考察を基礎にして書かれているので，われわれはここではこのような方法で得られる結果は書かないことにしよう——以下参照)．

行列 $D^{(j)}_{m'm}$ は回転変換の行列であるのでユニタリーである．これとともに行列 $d^{(j)}_{m'm}$ もまた，ユニタリーである．さらに後者は実である（これは (a. 4) および先にいっての任意の j に対する一般化からも導かれる)．逆変換は $\alpha\beta\gamma$ の符号を変えることによって得られるので，ユニタリー条件は

$$d^{(j)}_{m'm}(-\beta) = d^{(j)}_{mm'}(\beta) \qquad (a. 6)$$

---

1)　前に触れたエドモンズの著書参照のこと（われわれが用いた関数 $D^{(j)}_{m'm}(\alpha\beta\gamma)$ の定義はエドモンズのものと α と γ が入れ替っている点が違っている)．

を与える．さらにつぎの等式も成立する．

$$d^{(j)}_{m'm}(\beta)=d^{(j)}_{-m,-m'}(\beta),\tag{a.7}$$

$$\begin{aligned} d^{(j)}_{m'm}(\pi) &= (-1)^{j+m}\,\delta_{m',-m}\,,\\ d^{(j)}_{m'm}(-\pi) &= (-1)^{j-m}\,\delta_{m',-m}\,,\\ d^{(j)}_{m'm}(0) &= \delta_{m'm}. \end{aligned}\tag{a.8}$$

$j=1/2$ のときにこれらは (a.4) から明らかである．また任意の j に対する一般化は，前述の変換行列の作り方からも明らかである．

角度 $\pi-\beta$ の回転を，角度 π および $-\beta$ の連続した二つの回転として行なうと

$$d^{(j)}_{m'm}(\pi-\beta)=\sum_{m''}d^{(j)}_{m'm''}(\pi)\,d^{(j)}_{m''m}(-\beta)=(-1)^{j-m'}\,d^{(j)}_{-m'm}(-\beta),$$

あるいは (a.6) を使って

$$d^{(j)}_{m'm}(\pi-\beta)=(-1)^{j-m'}\;d^{(j)}_{m,-m'}(\beta).\tag{a.9}$$

同一の軸のまわりの二つの回転の結果は，その順序によらない．したがって，角度 $-\beta$ および π の回転を逆の順序で行なっても，われわれは同じ結果を得るはずである．これを行なって，その答と (a.9) とを比較してつぎの関係式を得る．

$$d^{(j)}_{m'm}(\beta)=(-1)^{m'-m}\,d^{(j)}_{-m',-m}(\beta).\tag{a.10}$$

(a.10) と (a.7) とから

$$d^{(j)}_{m'm}(\beta)=(-1)^{m'-m}\,d^{(j)}_{mm'}(\beta).\tag{a.11}$$

(a.6)～(a.11) を基礎として，完全な行列要素の種々の対称性を書くことができる．特に，その複素共役要素の式が

$$D^{(j)*}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma)=D^{(j)}_{m'm}(-\alpha,\beta,-\gamma)=(-1)^{m'-m}\,D^{(j)}_{-m',-m}(\alpha,\beta,\gamma)\tag{a.12}$$

であることを指摘しておこう．

数学的観点から言うと，行列 $D^{(j)}$ は回転群の $2j+1$ 次元のユニタリー既約表現である．これからただちに，これらの行列に対する規格直交関係が出る．

$$\int D^{(j_1)*}_{m_1'm_1}(\alpha,\beta,\gamma)\,D^{(j_2)}_{m_2'm_2}(\alpha,\beta,\gamma)\frac{d\omega}{8\pi^2}=\delta_{j_1j_2}\delta_{m_1m_2}\delta_{m_1'm_2'}\frac{1}{2j_1+1}.\tag{a.13}$$

ここで $d\omega=\sin\beta\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma$ であり，したがって $\int d\omega=8\pi^2$ である[1]．

添字 m および m' についての関数の直交性は，因子 $e^{i(m\alpha+m'\gamma)}$ によって与えられる．添字 j についての直交性は関数 $d^{(j)}_{m'm}$ と結びついている．これに対しては

$$\int_0^\pi d^{(j_1)}_{m'm}\, d^{(j_2)}_{m'm}\frac{\sin\beta\, d\beta}{2}=\frac{1}{2j+1}\delta_{j_1j_2}. \qquad \text{(a. 14)}$$

前節の始めに，対称独楽の量子化の際に，jmm' の一定値を持つ状態の問題を扱うことに触れた．これらの状態の波動関数の角度依存性は公式 III (103. 10) によって与えられる．これらの結果を利用し，変数の置き方や規格化のしかるべき変更を行なって

$$d^{(j)}_{m'm}(\beta)=(-1)^{j-m'}\left[\frac{(j+m')!}{2^{2j}(j-m')!\,(j+m)!\,(j-m)!}\right]^{1/2}(1+\cos\beta)^{-\frac{m'+m}{2}}$$
$$\times(1-\cos\beta)^{-\frac{m'-m}{2}}\left(\frac{d}{d\cos\beta}\right)^{j-m'}\left[(1+\cos\beta)^{j+m}(1-\cos\beta)^{j-m}\right]. \qquad \text{(a. 15)}$$

回転の問題でこの公式を導くときには，整数値の j だけを考慮したが，これは回転群の既約表現の一般的性質を表わし，任意の j に対して成立する．

特に $j=1$ に対しては

$$d^{(1)}_{11}=d^{(1)}_{-1-1}=\frac{1}{2}(1+\cos\beta),\quad d^{(1)}_{00}=\cos\beta,$$
$$d^{(1)}_{1-1}=d^{(1)}_{-11}=\frac{1}{2}(1-\cos\beta),\quad d^{(1)}_{01}=-d^{(1)}_{10}=d^{(1)}_{0-1}$$
$$=-d^{(1)}_{-10}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta. \qquad \text{(a. 16)}$$

$j=l$ が整数で $m'=0$ のときに公式 (a. 15) は

$$d^{(l)}_{0m}(\beta)=(-1)^m\sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\,P_l^m(\cos\beta) \qquad \text{(a. 17)}$$

に移る．この公式の導出は始めの定義 (a. 1) から容易にたどることができる．ψ_{jm} を軌道

---

1)　連続群の既約表現に対するこのような関係式は，有限群の表現に対する直交関係 (III (94. 9) 参照)

$$\frac{1}{g}\sum_G G^{(\alpha)}_{ik}G^{(\beta)}_{lm}=\frac{1}{f_\alpha}\delta_{il}\,\delta_{km}\,\delta_{\alpha\beta}$$

の直接の一般化である．ここで α,β は表現の番号で，f_α はその次元数，g は群の次数である．

$d\omega$ についての積分はいわゆる群の不変積分である．積分要素は，その要素に群のすべての要素を作用させると，ふたたび積分要素が得られるように選ばれる．

角運動量の固有関数，すなわち球関数 $Y_{lm}(\beta,\alpha)$（球面角 $\varphi\equiv\alpha$，$\theta\equiv\beta$ の関数である）としよう．右辺の $Y_{lm'}$ の値は軸 ζ に関するものである．(7.2a) を使って，(a.1) から

$$Y_{lm}(\beta,\alpha)=i^l\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}D^{(l)}_{0m}(\alpha,\beta,\gamma) \tag{a.18}$$

を得る．これは，(a.17) と同等である．

関数 $d^{(l)}_{\pm 1m}$ に対する簡単な式は §16 で得られている ((16.24) 参照)．

§ b. 独楽に対する行列要素

角運動量の固有関数の二つの積 $(\psi_{j_1m_1}\psi_{j_2m_2})$ の，回転の際の変換演算子は行列の積 $\mathrm{D}^{(j_1)}\mathrm{D}^{(j_2)}$ である．他面角運動量の合成の公式

$$\psi_{j_1m_1}\psi_{j_2m_2}=\sum_j C^{jm}_{m_1m_2}\psi_{jm}\equiv \mathrm{C}\psi_{jm}$$

（$C^{jm}_{m_1m_2}$ はクレブシュ=ゴルダン係数である．$m=m_1+m_2$ である）にしたがって，これらの積は回転の際に行列 $\mathrm{D}^{(j)}$ によって変換される関数 ψ_{jm} と，ユニタリー行列 C によって結ばれている．これから

$$\mathrm{D}^{(j_1)}\mathrm{D}^{(j_2)}=\mathrm{C}^+\mathrm{D}^{(j)}\mathrm{C},$$

あるいは展開した形

$$D^{(j_1)}_{m_1'm_1}(\omega)\ D^{(j_2)}_{m_2'm_2}(\omega)=\sum_j C^{jm'}_{m_1'm_2'}D^{(j)}_{m'm}(\omega)C^{jm}_{m_1m_2} \tag{b.1}$$

が出る（このとき，$m=m_1+m_2$，$m'=m_1'+m_2'$ で簡単のために角 α,β,γ の組を ω と置いた）．$3j$-記号で表わすと，これらの式は

$$D^{(j_1)}_{m_1'm_1}(\omega)D^{(j_2)}_{m_2'm_2}(\omega)=\sum_j(2j+1)\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j\\ m_1' & m_2' & -m'\end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j\\ m_1 & m_2 & -m\end{pmatrix}D^{(j)*}_{-m',-m}(\omega) \tag{b.2}$$

の形になる（ここでまた (a.12) が使われた）．

この式の両辺に $D^{(j)}_{-m',-m}(\omega)$ を掛けて $d\omega$ で積分すると，公式 (a.13) を使って

$$\int D^{(j_1)}_{m_1'm_1}(\omega)D^{(j_2)}_{m_2'm_2}(\omega)D^{(j_3)}_{m_3'm_3}(\omega)\frac{d\omega}{8\pi^2}=\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3\\ m_1' & m_2' & m_3'\end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3\\ m_1 & m_2 & m_3\end{pmatrix} \tag{b.3}$$

（対称性を非常によくするために，ここで添字の付け方の変更が行なわれた）[1]．

---

1) $j_1=l_1$，$j_2=l_2$，$j_3=l_3$ が整数値で，$m_1'=m_2'=m_3'=0$ のときに，関数 $D^{(l)}_{0m}$ は↗

この公式は，対称独楽の型の系を特徴づける，物理量の行列要素の計算の基礎になるものである．

$\bar{f}_{kq'}$ を，それと結びついた座標軸 $\xi\eta\zeta$ (ζ 軸は独楽の軸に沿っている) で独楽を特徴づける k 階の球面テンソルとしよう．たとえば，これは電気的あるいは磁気的多重極モーメントであってもよい．f_{kq} を同じテンソルの動かない座標系 xyz に関する成分としよう．$\bar{f}_{kq'}$ という量は一定で独楽の回転に依存しない．また f_{kq} という量は独楽の向きを定義する角度 α, β, γ の関数である．これらのあいだの関係は

$$f_{kq} = \sum_{q'} D^{(k)}_{q'q}(\omega)\,\bar{f}_{kq'} \tag{b.4}$$

にしたがって，有限回転の行列によって定義される．

独楽の波動関数は，関数 $D^{(J)}_{\Omega M}(\omega)$ と規格化だけが異なっている (J は独楽の全角運動量，Ω はその独楽の軸への投影，M はその z 軸への投影である)[1]．すなわち

$$\psi_{JM\Omega}(\omega) = i^{J-\Omega}\sqrt{\frac{2J+1}{8\pi^2}}\,D^{(J)}_{\Omega M}(\omega) \tag{b.5}$$

である．これらの関数によって (b.4) という量の行列要素を計算し，公式 (b.3) を使って

$$\begin{aligned}(J'\Omega'M'|f_{kq}|J\Omega M)\\ &= i^{J+J'-\Omega-\Omega'}(-)^{J'-M'}\sqrt{(2J+1)(2J'+1)}\\ &\quad\times\begin{pmatrix} J' & k & J \\ -\Omega' & q' & \Omega\end{pmatrix}\begin{pmatrix} J' & k & J \\ -M' & q & M\end{pmatrix}\bar{f}_{kq'}\end{aligned} \tag{b.6}$$

を得る (ここで $q' = \Omega'-\Omega$, $q = M'-M$ である)．

公式 (b.6) が設定された問題の解である．これは行列要素の，角運動量 J, J' およびその投影 M, M' への依存性を定義している．量子数 Ω, Ω' に関しては，それへの依存性は，もちろん決まらないままである．すなわち，これらの量子数の値は独楽の≪内部≫構造と結びついていて，一般的に言って，$\bar{f}_{kq'}$ という量がそれに依存するからである．行列要素の量子数 M, M' への依存性は当然与えられた全角運動量を持つすべての系に対してとまったく同様なものである (III (107.6) 参照)．

行列要素 (b.6) の絶対値の2乗を，M が与えられたときに終りの量子数 M' (および

↘ (a.18) にしたがって球関数になる．そして公式 (b.3) は三つの球関数の積の積分に対する式を与え，それは III (107.13) ～ (107.16) と一致する．

1) 位相因子は，$\Omega = 0$ のときに関数 (b.5) が，整数値の自由な角運動量 J と投影 M を持つ波動関数 ((a.18) とくらべよ) に移るように選ばれている．

$q=M'-M$）のすべての値について加えると，M には依存しないで

$$\sum_{qM'}|(J'\Omega'M'|f_{kq}|J\Omega M)|^2=(2J'+1)\begin{pmatrix}J' & k & J\\ -\Omega' & q' & \Omega\end{pmatrix}^2|\bar{f}_{kq'}|^2 \qquad \text{(b. 7)}$$

に等しい（和は公式 III (107. 11) を使って行なわれる）．

公式 (b. 6) は（記号の意味を若干変更して），2 原子分子，あるいは非球形（軸性）核のような，軸対称系に適用できる．独楽と違ってその回転は系の軸の方向を定義する，合計二つの角（$\alpha\equiv\varphi$, $\beta\equiv\theta$）によって記述される．回転波動関数は (b. 5) と違って因子 $e^{i\Omega\gamma}/\sqrt{2\pi}$ がない．しかしながら，この変更は行列要素には反映しない．すなわち関数 $D^{(j)}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma)$ の γ 依存性は因子 $e^{im'\gamma}$ に帰し，公式 (b. 3) は

$$\delta_{m'0}\int D^{(j_1)}_{m_1'm_1}(\alpha,\beta,0)\,D^{(j_2)}_{m_2'm_2}(\alpha,\beta,0)\,D^{(j_3)}_{m_3'm_3}(\alpha,\beta,0)\frac{\sin\beta\,d\alpha\,d\beta}{4\pi}$$
$$=\begin{pmatrix}j_1 & j_2 & j_3\\ m_1 & m_2 & m_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}j_1 & j_2 & j_3\\ m_1' & m_2' & m_3'\end{pmatrix}$$

（ここで $m'=m_1'+m_2'+m_3'$ である）となり，積分の計算は変わらないからである．このとき，角運動量の軸への投影についての選択則は，電子の波動関数の直交性の結果生じた前の形（$\Omega'-\Omega=q'$）のとおりである．今は公式 (b. 6) で $\bar{f}_{kq'}$ は f という量の，原子核が動かないとしたときの，（分子に固定された座標系 $\xi\eta\zeta$ での）電子の波動関数に関する行列要素と考える必要がある．

第1巻への補遺

§82 a. 高速粒子の電離損失

原子の励起および電離を伴う，速い相対論的粒子と原子との衝突を考察しよう．非相対論的な場合には，このような非弾性衝突は，III，§145，§146 で考察された．ここでは，そこで得られた公式の相対論的一般化が与えられる (H. A. Bethe, 1933)．

原子に入射する粒子の速度は原子内電子の速度にくらべて大きい（それにより，あらゆる場合に $Z\alpha \ll 1$，すなわち原子番号がそう大きくはないことを仮定する）．考察している問題へのボルン近似の適用可能性は，この条件によって保証される．速い粒子が軽い（電子，陽電子）か重い（中間子，陽子，α 粒子その他）かによって，問題の解が多少異なっている．

衝突前に原子が静止している実験室系で，速い粒子の始めと終りの運動量を $p=(\varepsilon, \boldsymbol{p})$ および $p'=(\varepsilon', \boldsymbol{p}')$ としよう．差 $q=p'-p$ は，粒子から原子に転移されるエネルギーおよび運動量を与える．可能な運動量転移の全積分を二つの領域に分ける．すなわち

$$\text{I)}\quad \frac{\boldsymbol{q}^2}{m} \ll m, \qquad \text{II)}\quad \frac{\boldsymbol{q}^2}{m} \gg I. \tag{82a.1}$$

ここで m は電子の質量，I はある平均原子エネルギー（原子の電離ポテンシャル）である．この二つの領域は，$I \ll \boldsymbol{q}^2/m \ll m$ で重なり合っている．この事情があるので，この領域のおのおのに対して得られた結果を，正確につなぎ合わせることができる．第1および第2の領域での $\boldsymbol{q}$ の値をそれぞれ，小さい運動量転移および大きい運動量転移ということにしよう．

A. 小さい運動量転移

この領域で原子内電子は，原子の始状態でも終状態でも非相対論的と考えることができる．

過程の振幅はつぎの式で与えられる．

$$M_{fi}^{(n)} = e^2 J_{n0}^{\mu}(-q) J_{p'p}^{\nu}(q) D_{\mu\nu}(q). \tag{82a.2}$$

ここで J_{n0} は原子の始状態 (0) から終状態 (n) への遷移 4－電流である．また $J_{p'p}$ は速い粒子の遷移 4－電流である．これらの電流はここでは，たとえば二つの《素》粒子，すなわち電子とミューオン (74.17) の散乱振幅のなかにあるはずの式 ($\bar{u}'\gamma u$) と入れ替わる ((140.3) もまた参照)．遷移電流は運動量表示にする ((43.11) 参照)．実験室系でのこの過程の断面積は

$$d\sigma_n = 2\pi\delta(\varepsilon-\varepsilon'-\omega_{n0})|M_{fi}^{(n)}|^2\frac{d^3p'}{2|\boldsymbol{p}|2\varepsilon'(2\pi)^3} \tag{82a.3}$$

である．ここで $\omega_{n0}=E_n-E_0$ は原子状態間の遷移の振動数である．終状態は離散スペクトルでも連続スペクトルでもよい．1番目の場合は原子の励起に，2番目は電離に対応する．エネルギー保存則 ((82a.3) のなかの δ－関数で考慮されている) のなかで，原子の反跳エネルギーは無視された．これは運動量転移が小さいときにはもちろん許される．

光子伝播関数は与えられた場合にゲージ (77.14) をとるとつごうがよい．ここではその空間成分だけが0と異なる．すなわち

$$D_{ik}(q) = -\frac{4\pi}{\omega^2-\boldsymbol{q}^2}\left(\delta_{ik}-\frac{q_iq_k}{\omega^2}\right). \tag{82a.4}$$

このとき，(82a.2) のなかの遷移 4－電流はその空間成分だけが必要である．

原子の遷移電流 $\boldsymbol{J}_{n0}(\boldsymbol{q})$ は与えられた場合に，普通の非相対論的な式

$$\boldsymbol{J}_{n0}(\boldsymbol{q}) = \frac{i}{2m}\int e^{-i\boldsymbol{qr}}(\psi_0\nabla\psi_n^*-\psi_n^*\nabla\psi_0)\,d^3x \tag{82a.5}$$

のフーリエ成分である．ここで ψ_0, ψ_n は原子の波動関数である (このとき書き方を簡単にするために，ここおよび以下で原子内電子についての和の記号は落とした．すなわち，あたかも原子内に唯一個の電子しかないとしたときのような公式を書いた)．第1項で部分積分を行ない，この式を行列要素の形の式に書き直すことができる．

$$\boldsymbol{J}_{n0}(\boldsymbol{q}) = \frac{1}{2}(\mathbf{v}e^{-i\boldsymbol{qr}}+e^{-i\boldsymbol{qr}}\mathbf{v})_{n0}. \tag{82a.6}$$

ここで $\mathbf{v}=-(i/m)\nabla$ は電子の速度の演算子である．

散乱される粒子の遷移電流に関しては，それによって失う運動量が比較的小さいので ($|\boldsymbol{q}|\ll|\boldsymbol{p}|$)，それを単なる行列要素

$$\boldsymbol{J}_{pp}(0) = 2\boldsymbol{p}z \tag{82a.7}$$

に置きかえることができる．これは古典的直線運動に対応する ((96.5) 参照)．ここでまた因子 z が導入された．これは粒子の電荷 (ze) と電子の電荷との差を考慮したものであ

る．

q が小さいことはまた粒子の屈折角 ϑ が小さいことを意味する．このとき（p に対する）q の縦および横成分は

$$-q_{\parallel} \approx \frac{dp}{d\varepsilon}\omega_{n0} = \frac{\omega_{n0}}{v}, \quad q_{\perp} \approx |p|\vartheta \tag{82a.8}$$

に等しい．したがって $qp \approx -\varepsilon\omega_{n0}$ である．

(82a.4)～(82a.8) を (82a.2) に代入すると

$$M_{fi}^{(n)} = -\frac{4\pi ze^2}{q^2}\left\langle n \left| \frac{\varepsilon}{\omega_{n0}}(q\mathbf{v}e^{-iqr} + e^{-iqr}q\mathbf{v}) + (p\mathbf{v}e^{-iqr} + e^{-iqr}p\mathbf{v}) \right| 0 \right\rangle$$

となる．

第1項でつぎのことに注意しよう．それは

$$q\mathbf{v}f + fq\mathbf{v} = 2i\dot{f}$$

である．ここで $f \equiv e^{-iqr}$（III，669 頁参照），したがってこの演算子の行列要素は行列要素 $2i(\dot{f})_{n0} = 2\omega_{n0}f_{n0}$ と一致する．第2項では，q が小さいので e^{-iqr} を1に置き換えれば十分である．このとき

$$M_{fi}^{(n)} = -\frac{8\pi ze^2}{q^2}\{\varepsilon(e^{-iqr})_{n0} - ipr_{n0}\omega_{n0}\}$$

である．この式の絶対値の2乗は

$$|M_{fi}^{(n)}|^2 = \frac{64\pi^2(ze^2)^2}{(q^2)^2}\{\varepsilon^2|(e^{-iqr})_{n0}|^2 + 2(qr_{n0})(pr_{n0})\varepsilon\omega_{n0} + (pr_{n0})^2\omega_{n0}^2\} \tag{82a.9}$$

である（ここで第2項では $e^{-iqr} \cong 1 - iqr$ と置かれた．第1項では，先へいって明らかになる理由で，こう置いてはいけない．273 頁脚注参照）．

その原子との非弾性散乱の結果として速い粒子のエネルギーの消失は

$$\kappa = \sum_n \int \omega_{n0}\, d\sigma_n = \frac{1}{16\pi^2}\sum_n \int \omega_{n0}|M_{fi}^{(n)}|^2 do' \tag{82a.10}$$

で決定される[1]，ここで和は可能なすべての原子の終状態について行なわれ，積分は散乱粒子の方向について行なわれる．この量を**有効制動**と呼ぼう（これをまた**エネルギー損失の断面積**とも呼ぶ）．

(82a.10) における積分は，2段階で行なうことができる．それはp に対する p' の方位

1) この損失は原子の電離だけでなく励起と関係しているけれども，これはしばしば電離損失と呼ばれる．

角についての平均と，そのあとでの $do' \cong 2\pi\vartheta\, d\vartheta$ についての積分である．ここで ϑ は小さい散乱角である．最初の操作は qr_{n0} を

$$qr_{n0} \to q_{\parallel} x_{n0} = -\frac{\omega_{n0}}{v} x_{n0}$$

に置き換える．ここで x_{n0} は原子内電子のデカルト座標中の一つの行列要素である[1]．$d\vartheta$ についての積分は，q^2 についての積分に換えることができる．それには

$$-q^2 = -\omega_{n0}^2 + \boldsymbol{q}^2 \approx -\omega_{n0}^2 + \frac{\omega_{n0}^2}{v^2} + p^2\vartheta^2 = \frac{\omega_{n0}^2 M^2}{p^2} + p^2\vartheta^2 \qquad (82\text{a}.11)$$

であり，したがって $2\vartheta\, d\vartheta = d|q^2|/p^2$ であることに気がつけばよい（M は速い粒子の質量である）．結果として

$$\kappa = 4\pi (ze^2)^2 \sum_n \int \left\{ |(e^{-i\boldsymbol{qr}})_{n0}|^2 \frac{\omega_{n0}}{v^2} - \omega_{n0}^3 |x_{n0}|^2 \left(\frac{M^2}{p^2} + \frac{1}{v^2}\right) \right\} \frac{d|q^2|}{|q^2|^2} \qquad (82\text{a}.12)$$

を得る．

q^2 についての積分の下限は

$$|q^2|_{\min} = \frac{M^2}{p^2}\omega_{n0}^2 \qquad (82\text{a}.13)$$

である．上限としては

$$I \ll \frac{|q^2|_1}{m} \ll m \qquad (82\text{a}.14)$$

であるようなある値 $|q^2|_1$ を選ぼう．すなわち領域 I および II (82a.1) の重なり合う領域に存在する．

(82a.12) における積分と和は，III，§146 で非相対論的な場合に対して行なわれたのと同様に行なわれる．すべての積分をさらに二つの部分に分ける．すなわち，a) $|q^2|_{\min}$ から $|q^2|_0$ まで，および b) $|q^2|_0$ から $|q^2|_1$ までである．ここで $|q^2|_0$ の値は

$$\frac{IM}{|\boldsymbol{p}|} \ll \sqrt{|q^2|_0} \ll m\alpha \qquad (82\text{a}.15)$$

のようなものである（右にある量 $m\alpha$ は，原子内電子の運動量の程度の大きさである）．領域 a) では $e^{-i\boldsymbol{qr}} \cong 1 - i\boldsymbol{qr}$ の展開をすることができる．この領域から κ への寄与はつぎの形になる．

---

1) どうでもよいことだが，あとで終状態の原子の角運動量の方向について加えることを暗に了解していれば，行列要素 x_{n0} はもう軸 x の方向にはよらない．

$$4\pi(ze^2)^2\sum_n\int_{|q^2|_{\min}}^{|q^2|_0}\left\{\frac{1}{v^2}\omega_{n0}|x_{n0}|^2\frac{1}{|q^2|}-\frac{M^2}{p^2}\omega_{n0}^3|x_{n0}|^2\frac{1}{|q^2|^2}\right\}d|q^2|$$
$$\approx\frac{4\pi(ze^2)^2}{v^2}\sum_n\omega_{n0}|x_{n0}|^2\left[\ln\frac{|q^2|_0p^2}{M^2\omega_{n0}^2}-v^2\right]$$

(第2項における積分は，無限大まで伸ばしてもよい)．

和は公式

$$\sum_n\omega_{n0}|x_{n0}|^2=\frac{1}{2m}Z \tag{82a.16}$$

を使って行なわれる．ここで Z は原子内電子の数である（III（146.10）参照）．結果をつぎの形に表わすことにしよう．

$$\frac{2\pi(ze^2)^2Z}{mv^2}\left[\ln\frac{|q^2|_0p^2}{M^2I^2}-v^2\right]. \tag{82a.17}$$

ここで I はつぎの公式で定義される平均の原子エネルギーである．

$$\ln I=\frac{\sum_n\omega_{n0}|x_{n0}|^2\ln\omega_{n0}}{\sum_n\omega_{n0}|x_{n0}|^2}=\frac{2m}{Z}\sum_n\omega_{n0}|x_{n0}|^2\ln\omega_{n0}. \tag{82a.18}$$

領域 b）では（82a.11）にしたがって $|q^2|\approx p^2\vartheta^2$ が成り立つ．すなわち $|q^2|$ は原子の終状態の番号 n によらない．したがって，(82a.12）における n についての和は積分記号の内で行なうことができる．第1項は，公式

$$\sum_n|(e^{-iqr})_{n0}|^2\omega_{n0}=\frac{Z}{2m}q^2 \tag{82a.19}$$

によって実現される（III（146.5）参照）．そしてこの積分は

$$\frac{2\pi Z(ze^2)^2}{mv^2}\ln\frac{|q^2|_1}{|q^2|_0}$$

に等しい[1]．(82a.12）の第2項の，この領域での積分は κ に対して無視しうる寄与しかしない．

最後の公式を（82a.17）と一緒にして，運動量転移が小さい領域全部からの κ への寄与を求めることができ

$$\frac{2\pi Z(ze^2)^2}{mv^2}\left[\ln\frac{|q^2|_1p^2}{M^2I^2}-v^2\right] \tag{82a.20}$$

となる．

1)（82a.12）のなかの第1項で e^{-iqr} を q で展開をしてはいけなかった原因は，積分の上限での対数発散である．

B. 大きい運動量転移

原子内電子の運動量にくらべて大きい運動量転移を伴う衝突に進もう ($q^2 \gg mI$). この領域では, 明らかに, 原子内電子の結合エネルギーを無視すること, すなわちそれを自由電子と考えることができる. これに対応して原子と高速粒子との衝突は, それと Z 個の原子内電子のおのおのとの弾性衝突となるであろう. このとき粒子の速度が大きいので, 原子内電子ははじめ静止していると見なすことができる.

高速粒子から原子内電子に与えられたエネルギーを $m\Delta$ と置こう. そして $d\sigma_\Delta$ をこのような転移を伴う弾性散乱の断面積としよう. 全原子の微分有効断面積はこのとき

$$d\kappa = Zm\Delta\, d\sigma_\Delta \tag{82a.21}$$

となる.

静止電子に, それと衝突する質量 $M \gg m$ の粒子から与えられる最大エネルギーは

$$m\Delta_{\max} = \frac{2mp^2}{m^2 + M^2 + 2m\varepsilon} \approx \frac{2mp^2}{M^2 + 2m\varepsilon}$$

である. ここで ε および p は跳び去る粒子のエネルギーおよび運動量である (II (13.13) 参照). さらに, エネルギー ε は超相対論的である ($\varepsilon \gg M$) けれども, 同時に

$$\varepsilon \ll \frac{M^2}{m} \tag{82a.22}$$

を満足すると仮定しよう. このとき最大のエネルギー転移

$$m\Delta_{\max} \approx \frac{2mp^2}{M^2} = 2mv^2\gamma^2 \qquad (\gamma = \varepsilon/M = 1/\sqrt{1-v^2}) \tag{82a.23}$$

でさえも, 入射粒子の始めの運動エネルギーにくらべればまだ小さい ($m\Delta_{\max} \ll \varepsilon - M$). したがって, 運動量転移 $\boldsymbol{q}$ はいつも粒子の初めの運動量 $\boldsymbol{p}$ にくらべると小さいままである. この事情があるので, 入射粒子の運動は衝突の際に不変である, すなわち無限に重いと考えてもよい. このとき散乱断面積は, 不動中心による電子散乱 (81.7) を電子が初め静止している実験室系への単なる変換として求められる. これは上述の近似では

$$-q^2 \approx \boldsymbol{q}^2 = 4p^2 \sin^2\frac{\vartheta}{2}, \quad do' = \frac{\pi d|q^2|}{p^2}$$

で, 二つの系における相対速度は同じ v であることに気がつけば, 容易に行なうことができる. 公式 (81.7) は

$$d\sigma = \frac{4\pi(ze^2)^2}{v^2}\left(1 - \frac{|q^2|}{4m^2\gamma^2}\right)\frac{d|q^2|}{|q^2|}$$

の形になる. エネルギー移動 Δ は $-q^2 = 2m^2\Delta$ にしたがって同じ不変量 q^2 を使って表

わすことができる．したがって

$$d\sigma_\Delta = \frac{2\pi(ze^2)^2}{m^2v^2}\left(1 - v^2\frac{\Delta^2}{\Delta_{\max}^2}\right)\frac{d\Delta}{\Delta^2} \qquad (82a.24)$$

となる[1]．

運動量転移のいま考えられている領域からの有効制動への寄与は，前に導入した限界 $|q^2|_1$ から $|q^2|_{\max} = 2m^2\Delta_{\max}$ までの範囲で（82a.21）を積分することによって得られる．それは

$$\frac{2\pi(ze^2)^2Z}{mv^2}\left(\ln^2\frac{2\Delta_{\max}m^2}{|q^2|_1} - v^2\right) \qquad (82a.25)$$

に等しい．

最後に，寄与（82a.20）と（82a.25）を一緒にして，重い高速粒子の全電離損失に対するつぎのような最終的な結果を得る．すなわち（普通の単位で）

$$\kappa = \frac{4\pi Z(ze^2)^2}{mv^2}\left(\ln\frac{2mv^2}{I\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} - \frac{v^2}{c^2}\right) \qquad (82a.26)$$

である．非相対論的な場合には，これから前の公式 III（147.10）が得られる．すなわち

$$\kappa = \frac{4\pi Z(ze^2)^2}{mv^2}\ln\frac{2mv^2}{I} \qquad (82a.27)$$

である．また超相対論的な場合には

$$\kappa = \frac{4\pi Z(ze^2)}{mc^2}\left(\ln\frac{2mc^2}{I\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} - 1\right) \qquad (82a.28)$$

となる．制動はただ高速粒子の速度だけに依存する（質量には依存しない）．速度が大きくなったときの制動の減少（82a.27）は，超相対論的領域のゆるやかな（対数的）増大に変わる．

問　　題

1. 相対論的電子の有効制動を求めよ．

解 運動量転移の小さい領域は前と同様に（82a.20）で与えられる．運動量転移の大きい領域に対しては交換効果を考慮して（82a.24）の代りに公式（82a.14）を利用する必要

---

1) この公式ではもちろん，重い粒子がハドロンでなければ，強い相互作用の特有の効果は考慮されない．しかしながらこれらの効果（ハドロンの形状因子）は，$|q^2| \sim 1/M^2$ のときにのみ重要になり，また条件（82a.22）のときはこのような運動量転移は除かれる．

がある．$\Delta\,d\sigma_\Delta$ を，$d\Delta$ について $|q|_1^2/2m^2$ から $(\gamma-1)/2$ まで積分し，(82a.20) と一緒にして

$$\kappa=\frac{2\pi Ze^4}{mv^2}\left[\ln\frac{m^2(\gamma^2-1)(\gamma-1)c^4}{2I^2}-\left(\frac{2}{\gamma}-\frac{1}{\gamma^2}\right)\ln 2+\frac{1}{\gamma^2}+\frac{(\gamma-1)^2}{8\gamma^2}\right], \quad (1)$$

$$\gamma=(1-v^2/c^2)^{-1/2}$$

を得る．非相対論的な場合にはIII，§146の問題の式が得られ，超相対論的な場合 $(\gamma\gg1)$ には

$$\kappa=\frac{2\pi Ze^4}{mc^2}\left(\ln\frac{m^2c^4\gamma^3}{2I^2}+\frac{1}{8}\right) \quad (2)$$

が得られる．

2. 陽電子について同じことを行なえ．

解 運動量転移の大きい領域の $d\sigma_\Delta$ に対しては，(82a.23) を使う必要がある．このとき $d\Delta$ についての上限は $\gamma-1$ に等しい．超相対論的場合の解は

$$\kappa=\frac{2\pi Ze^4}{mc^2}\left(\ln\frac{2m^2c^4\gamma^3}{I^2}-\frac{23}{12}\right)$$

である．

人名索引

ア　行

カ　行

サ 行

タ 行

ナ 行

ハ 行

マ 行

ヤ 行

ラ　行

ワ　行

事項索引

タ　行

ナ 行

ハ 行

マ　行

ヤ　行

訳者あとがき

本書はランダウ，リフシッツ共著の有名な「理論物理学教程」の第４巻≪相対論的量子力学≫第１部の全訳である．この教程は約30年にわたって着々と刊行され，当初全７巻の構想が約10年程前に全９巻に改められた．この教程には，理論物理学のほとんど全分野にわたるさまざまな問題が，著者達の独創的な見方にしたがって再構成されて配列され，多くの物理学者の魅力をそそってきたものであり，早くからその全巻の完結が望まれていたものである．不幸にしてこの仕事の中心であったエリ・デ・ランダウに不測の事故が起こり，この仕事が大きな挫折に見舞われた．その当時完成していたのは旧計画で５巻，新計画では７巻であり≪相対論的量子力学≫および≪運動学≫と題する２巻は未刊のままであった．その後，既刊の各巻の増補改訂はしばしば行なわれてはいたが，この２巻がどうなるかについては謎に包まれ，未刊のままで終るのではないかとも思われていた．1960年に当時刊行されていた「理論物理学教程」全５巻（旧計画による）に対して，レーニン賞が与えられたのはよく知られたことであったし，この教程もこれで未完成のまま終る印象を持ったものであった．

しかし増補される他の巻には，その後もこれら２巻を予告していて，どのような扱いになるかいろいろと想像はしていたが，遺稿その他をまとめて出版することになったものと思われる．その一つの本書が昨年ついに出版されたわけで，このなかに故ランダウの直接の手になるものがどのくらい含まれているかは明らかでない．本書のまえがきに述べられていること以外は憶測の域を出ない．

この第１部は素粒子場の基本的性質および輻射場の量子論の初歩に関する部分に当てられ，豊富な材料を集めた懇切丁寧な解説を行なっていて，この教程の他の巻と比べて，材料の配列その他がいわゆる標準型に近く，比較的特色が少ないようである．特色が薄れたのはランダウが欠けたためか，理論物理のこの分野の特質のためか何とも言えないが，本教程中の１巻として，物理的内容の検討に当たっては本教程II≪場の古典論≫，III≪量子

力学≫の内容を引用して，それらとの関係を詳細に述べるように留意している．

昨年暮れに本書を手にし急に翻訳することになったが，昨年から今年にかけては大学紛争に明け暮れした時期であった．この翻訳に着手してからも，身辺落ち着くひまがなく，ようやく上梓のはこびになって肩の荷が下りる思いでいっぱいであるが，他面力不足のために読者に迷惑を掛けることを思うと心安からざるものがある．あわただしいなかで何とかここまでこぎつけたのも，日本大学および都立大学大学院で素粒子を学んでおられる柳沢英治君，加藤一男君，山崎庸人君の助力に負うところが大きい．いずれも多少とも紛争の渦中に身を置きながら，式のチェックその他いろいろの点で助力して下さったことに感謝するしだいです．また東京図書の松本重彰さんの熱心な努力に励まされてようやく完成にこぎつけることができたわけで，謝意を表するしだいです．

1969年8月

井　上　健　男

訳者紹介

井上健男（いのうえたけお）　1942年　東京大学理学部物理学科卒業
同大学工学研究所助手を経て，
日本大学文理学部教授，定年退職
原子核理論専攻

ランダウ＝リフシッツ理論物理学教程

相対論的量子力学 1

1969年 9 月30日　第 1 刷発行　　Printed in Japan
1995年 5 月20日　第14刷発行

検印省略

著者　ヴェ・ベレステツキー
　　　イェ・リフシッツ
　　　エリ・ピタエフスキー
訳者　井上健男
発行所　東京図書株式会社
〒112 東京都文京区水道 2—5—22
振替00140-4-13803 電話03(3814)7818

ISBN4-489-01164-4